

és elhagyásuk a maradó anyag megértését nem zavarja. Ilyenformán elég, ha csak a nagy betűvel szedett részeket és az A jelű megjegyzéseket olvassa.

Aki nem győzi ezt a leegyszerűsített munkát sem, és mégis képet akar alkotni az anyag egészéről, az további könnyítés céljából elsősorban azoknak a tételeknek a bizonyítását hagyhatja el, amelyeknek helyessége a szemlélet alapján közvetlenül is belátható. További könnyítést jelent, ha a szövevényesebb, hosszabb lélegzetű bizonyításokat csak átfutja, bár ezzel lemond a teljes anyag igazi elsajátításáról.

Minden olvasó számára hangsúlyoznunk kell, hogy mit sem ér a könyv tanulmányozása, ha ennek eredményeként nem állnak tisztán az olvasó előtt a tárgyalta fogalmak és tételek, s ha ezek birtokában nem tud feladatokat megoldani. Feladatok megoldását mindenkinek a legmelegebben ajánljuk, mert ellenőrzik a tudást, elvezetnek a tudás hasznosításához, és önálló gondolkodásra serkentenek.

Akinek a képessége megengedi, hogy a könyv olvasásában örömet lelje, az törekedjék — talán ismételt olvasás alkalmával — a könyv egészének áttanulmányozására. Ne szegje kedvét, ha a B jelű megjegyzések között egyik-másik megemészthetetlennek bizonyul. Sokszor nem a bennük közölt gondolatok okozzák a nehézséget, hanem annak belátása, hogy ilyen közlésre miért van egyáltalában szükség. Inkább tanácsoljuk a nehéznek bizonyuló megjegyzések átugrását, mintsem azt, hogy valaki a félig-meddig való megértést tudásnak könyvelje el. Ez a szempont vezetett, amikor megcsillagoztuk a legnehezebbnek vélt megjegyzéseket.

Aki tudományos ambícióval olvassa ezt a könyvet, az sajátítsa el maradéktalanul a könyv egészét. Tudományos munkát csak szilárd alapra lehet építeni, és a könyv egészének célja az, hogy a geometria tanulmányozásához szilárd alapot nyújtson.

I. RÉSZ

ELEMI GEOMETRIA

ELSŐ FEJEZET

ALAPFOGALMAK

Ebben a bevezető fejezetben csak előkészítjük a geometria tárgyalását. Bevezetjük azokat a fogalmakat, amelyekről a tárgyalás megkezdésekor szó lesz, valamint megemlíti azokat a tényeket, amelyekre a tárgyalást majd építjük. Helyenként rámutatunk ugyan arra is, hogy megállapításaink egyikének-másikának helyessége hogyan következik logikai úton a többiéből, azonban az ilyen vizsgálatot feladatunknak nem tekintjük. Ebben a fejezetben csak az a célunk, hogy a valóságból absztrakcióval származó, szemlélettel alátámasztott alapot adjunk a további tárgyaláshoz, s hogy a legalapvetőbb elnevezésekkel megismerkedjünk.

1. § Tételek

Ebben a paragrafusban a pont, egyenes és sík bevezetésével foglalkozunk és alapvető tulajdonságaikat ismerjük meg.

1.1 A tér fogalmához a tapasztalásból absztrakció útján jutunk. Az anyagi tárgyak a térben helyezkednek el. Terünk minden irányban határtalanul kiterjedt. A nyugvó tárgyak a térnek egy részét foglalják el. Ha elvonatkozunk a tárgyak fizikai jellemzőitől (anyagától, színétől stb.), és csak az általuk elfoglalt térrész alakját tekintjük, akkor eljutunk a mértani *test* fogalmához. Ha olyan tárgyakat gondolunk el, amelyek a valóságban nem is léteznek, pl. egy végtelenbe nyúló oszlopot, akkor is tekinthetjük alakjukat, az általuk szolgáltatott mértani testet. A tér feldarabolásakor mértani testek keletkeznek.

A testeket *felületek* határolják. Véges kiterjedésű testeket zárt felületek határolnak. A felületek darabjait is felületnek mondjuk, így pl. az asztal lapja is felület. A felületekről képet adhatunk vékony lemezzel, hártyával is. A felületnek nincs vastagsága.

Ha egy felületet feldarabolunk, a darabokat *vonalak* határolják. Véges kiterjedésű felületdarabokat zárt vonalak határolnak. E vonalak darabjait is vonalnak nevezzük, így pl. az asztalnak egy éle is vonal. A vonalakról képet adhatunk vékony dróttal, fonállal is. A vonalnak sem vastagsága, sem szélessége nincs.

Ha egy vonalat feldarabolunk, a darabokat *pontok* határolják. A pontokról képet adhat a tű hegye vagy egy igen kis kiterjedésű tárgy is. A pontnak semmilyen kiterjedése sincs.

Az *egyenes* mindkét irányban végtelenbe nyúló vonal, amely mindenütt olyan, mint a kifeszített húr, a fénysugár útja homogén közegben, az anyagi pont pályája, ha külső erőhatás nélkül, pusztán tehetetlenségének hatására mozog, vagy mint a merev test helyben maradó pontjainak összessége, ha két pontját rögzítjük, és a testet forgatjuk.

A *sík* minden irányban végtelenbe nyúló felület, amely mindenütt olyan, mint a simára gyalult deszka, a nyugvó víz felszíne, vagy két csatlakozó egyenes rúd között kifeszített hártya. A sík feldarabolásakor *síkidomok* keletkeznek.

A1 A bevezetett fogalmakat nem definiáltuk, csak képet adtunk róluk, s rámutattunk, hogy absztrakció révén a valóságból keletkeznek. Nem lesz szükségünk arra, hogy pontosan körülírjuk, mit nevezünk testnek és síkidomnak, valamint felületnek és vonalnak. Az egyenes és a sík fogalomalkotásával viszont részletesen foglalkozunk a következőkben. Ez a szakasz a rendszeres tárgyalást csak előkészítette.

A2 A geometria első tudományos rendszerezője a görög EUKLIDÉS volt (i. e. 325 körül). *Elemek* című munkája mind a mai napig a geometria tárgyalásának alapjául szolgál. Ma már tudjuk, hogy rendszere korábbi munkákra is támaszkodik.

1.2 A geometria (mértan) a tér pontjaiból álló *alakzatokkal* (ponthalmaz, idom) foglalkozik. Ilyen alakzatok a *tételek*: a pont, az egyenes és a sík, sőt maga a teljes tér is. Beszélünk *linedris*, *síkbeli* és *térbeli* alakzatokról aszerint, hogy az alakzat pontjai egy egyenesen vannak, egy síkban helyezkednek el, vagy pedig csak annyit állapítunk meg, hogy a tér pontjai. A *térgeometria* (tér-mértan, sztereometria) a térbeli alakzatokkal, a *síkgeometria* (síkmértan, planimetria) pedig egy sík alakzataival foglalkozik. Az alakzatok közé soroljuk sokszor az *üres* alakzatot is, amelynek egyetlenegy pontja sincs. Sem az üres alakzatot, sem pedig a teljes teret, illetőleg a síkgeometriában a teljes síkot nem mondjuk *valódi* alakzatnak.

Két alakzat *közös része* (metszet) a két alakzat közös pontjaiból áll. Két alakzat *egyesítését* azok a pontok alkotják, amelyeket a két alakzatnak legalább az egyike tartalmaz. Szó lehet természetesen kettőnél több alakzat közös részéről és egyesítéséről is.

A pontokat nagybetűkkel, az egyeneseket kisbetűkkel, a síkokat nagybetűkkel vagy görög betűkkel szokás jelölni.

Ha két térelem egyike tartalmazza a másikat, azt mondjuk, hogy a két térelem *illeszkedik* egymáshoz. Egy egyeneshez illeszkedő pontokat *kollinearisanak*, egy síkhoz illeszkedő pontokat és egyeneseket *komplanárisaknak* (egysíkú) mondunk.

Tételek illeszkedésére vonatkozóan a következő megállapításokat tehetjük:

I. Két ponthoz egy és csak egy egyenes illeszkedik.

II. Ha három pont nincs egy egyenesen, akkor egy és csak egy sík illeszkedik hozzájuk.

III. Ha egy sík tartalmazza egy egyenes két pontját, akkor tartalmazza a teljes egyenest is.

Az A, B pontok által meghatározott egyenest AB egyenesnek, az A, B, C pontok által meghatározott síkot ABC síknak mondjuk. Ezeknél a megnevezéseknél közömbös az, hogy a szereplő pontokat milyen sorrendben adjuk meg.

Két egyenesnek legfeljebb egy közös pontja van, mert különben a két egyenes I. szerint azonos volna. Ha egy egyenes nem illeszkedik egy síkhoz, akkor legfeljebb egy közös pontjuk van, hiszen különben III. szerint illeszkedniük kellene.

A1 Ha egy állításban „egy és csak egy” áll, ez azt jelenti, hogy van egy, s hogy több nincs. A köznap nyelv „egyetlenegy” kifejezése ugyanezt fejezi ki (ha a mondat szerkezete nem tagadó). Így pl. I. azt mondja ki, hogy két ponthoz egyetlenegy egyenes illeszkedik, azaz egyrészt van olyan egyenes, amely két adott ponthoz illeszkedik, másrészt viszont nincs több ilyen egyenes.

A2 A bevezetett szakkifejezések után sokszor említjük zárójelben a használatos egyéb megnevezéseket. Így említjük a szakkifejezés teljes alakját, ha az csak félreértés lehetősége esetén használatos, szokásos rövidítéseit, a ritkábban használt, vagy ma már alig használt megnevezéseket, s ezek között sokszor idegen, többnyire latin vagy görög eredetű szakkifejezéseket is. Ez utóbbiak ismerete megkönnyíti az idegen nyelvű szakirodalom megértését is.

A3 Ha két alakzatról van szó, akkor eleve két különböző alakzatra gondolunk. Ugyanez áll akkor is, ha kettő helyett nagyobb természetes számot mondunk. Felesleges lett volna ezért pl. I.-ben két pont helyett két különböző pontról szólni.

Előfordul majd, hogy több alakzatról beszélünk, és megengedjük, hogy közöttük azonosak is legyenek. Ilyenkor ezt a tényt a szövegezésben is kifejezésre juttatjuk, és pl. három nem feltétlenül különböző pontról szólnunk.

A4 Néhány szokásos jelölés: $A \cap B$ az A, B alakzatok közös részét, $A \cup B$ pedig az egyesítésüket jelöli; $A \supset B$ és $B \subset A$ egyaránt azt mondja ki, hogy az A alakzat tartalmazza a B alakzatot, hogy tehát B az A alakzathoz tartozik; azt, hogy a P pont a pontokból álló A alakzat eleme, azaz P az A alakzathoz tartozik, $P \in A$ módon is jelölhetjük.

A tételekkel kapcsolatos és kevésbé általános jelölések: a kerek zárójel a metszetet, a szögletes zárójel pedig az összekötő alakzatot, tehát pl. (ab) az a, b egyenesek metszéspontját, $[ABC]$ pedig az A, B, C pontok által meghatározott síkot jelöli; $—$ az illeszkedés jele.

B1 Megállapításainkat a szemléletre hivatkozva mondhattuk ki. Tapasztaljuk a helyességüket, bizonyítani azonban nem kívánjuk. Bizonyításuk már csak azért sem sikerülhet, mert a bennük szereplő fogalmakat nem definiáltuk. Azokat az állításokat, amelyeket nem bizonyítunk, s amelyekre okoskodásainkat építjük, *axiómáknak* nevezzük. Az általunk kimondott axiómák a valóságot tükröző egyszerű megállapítások. Az axiómák bizonyos mértékig pótolják a bennük szereplő fogalmak definícióját. Mi is mondhatjuk, hogy pontnak, egyenesnek, síknak olyan alakzatokat nevezünk, amelyekre a már kimondott és a továbbiakban kimondandó axiómáink teljesülnek. E fogalmak teljes szemléletes tartalmát azonban még akárhány axiómával sem lehet megragadni.

B2 Azt mondtuk, hogy minden alakzat pontokból áll, tehát a pontot választottuk a geometria felépítéséhez alapelemül. Ez nem az egyedül lehetséges módszer, bár szemléletünk számára ez a legkönnyebb.

1.3 Az egyenest egy pont két *félegyenesre* bontja fel. Ez a pont mindkét félegyenes *kezdőpontja* (végpont), és egyben a két félegyenes egyetlen közös pontja. AB félegyenesnek mondjuk az AB egyenes A kezdőpontú félegyenesei közül azt, amelyik a B pontot tartalmazza. Eszerint az AB félegyenes különbözik a BA félegyenestől. Néha megteesszük, hogy az ábrán az A kezdőpontú félegyenes mellé odairjuk a B pont jelét, de e pont helyét nem jelezzük, mert csak az a célunk, hogy az AB félegyenesről beszélhessünk, és ezért közömbös az, hogy a B pont hol helyezkedik el.

Az egyenest bármely két pontja két félegyenesre és egy *szakaszra* (egyenesszakasz, intervallum) bontja fel. A két pont a szakasz két *végpontja*. Az A, B

végpontú szakaszt AB szakasznak mondjuk, de BA szakasznak is mondhatjuk. Ez a szakasz az AB félegyenes és a BA félegyenes közös részeként is származtatható, s mindkét félegyenesnek *kezdőszakasza*. Az AB szakaszt néha \overline{AB} jelöli.

A síkot egy egyenes két *félsíkra* vágja. Ez az egyenes a két félsík közös része. A teret egy sík két *féltérre* vágja. Ez a sík a két féltér közös része.

A félegyenes kezdőpontját, a szakasz végpontjait, a félsíkot meghatározó egyenesnek s a féltér meghatározó síknak a pontjait közös néven *határpontoknak* nevezzük. Az egyenesnek, a síknak és a térnek nincs határpontja. A már említett alakzatainknak az olyan pontjait, amelyek nem határpontok, *belső pontoknak* nevezzük. Egy szakasz belső pontjai azok, amelyeket a végpontok közrefognak, amelyeken a szakasz áthalad. Az egyenesről, félegyenesről vagy szakaszcsoportról azt mondjuk, hogy alakzatainknak valamelyikét metszi (döfi), ha egyetlen közös pontjuk van, és ez nem határpontja a két alakzat egyikének sem. Ezt az egyetlen közös pontot *metszéspontnak* (döféspont) nevezzük.

A most bevezetett fogalmakra érvényesek a következő megállapítások:

IV. Egy pont a rajta áthaladó egyenest két félegyenesre bontja fel. Az egyenes *e* ponton áthaladó szakaszának a végpontjai más-más félegyeneshez tartoznak. Az egyenes minden más szakaszát az egyik félegyenes tartalmazza.

V. Egy egyenes a rajta átfektetett síkot két félsíkra bontja fel. Az egyenest metsző síkbeli szakasznak a végpontjai más-más félsíkhöz tartoznak. A sík minden más szakaszát legalább az egyik félsík tartalmazza.

VI. Egy sík a teret két féltérre bontja fel. A síkot metsző szakasz végpontjai más-más féltérhez tartoznak. Minden más szakaszt legalább az egyik féltér tartalmaz.

Megállapításaink pl. az utolsó esetben burkoltan azt is kimondják, hogy a két féltér egy-egy belső pontját összekötő szakasz metszi a közös határsíkot, hiszen különben a szakasz egy féltérben volna, és ezért ez a végpontjaira is állna. Mondhatjuk tehát, hogy a szóban forgó síkot egy szakasz akkor és csak akkor metszi, ha a két végpontja más-más féltér belső pontja. Hasonlót mondhatunk természetesen a IV. és V. megállapítás esetében is.

Az V. és VI. megállapítás megszövegezésénél arra az esetre is gondoltunk, amikor a szakasz a közös határegyenesen, illetőleg határsíkon van. Az ilyen szakaszt is tartalmazza a két félsík vagy féltér egyike, sőt ezt a kettő közül bármelyik megteszi.

2. § Mozgás és hosszúság

Azokat az alapvető fogalmakat és tényeket tárgyaljuk, amelyek a mozgással és a hosszúságméréssel kapcsolatosak.

2.1 Ha egy alakzat *mozog*, akkor pontjai új helyzetbe kerülnek, de lehetnek közöttük helyben maradó pontok is. Mozgás közben az alakzat *alakja* nem változik meg. Szó lehet az egész tér, azaz a tér valamennyi pontjának együttes mozgásáról is. Egy alakzat mozgását mindig kiegészíthetjük az egész tér mozgásával. Úgy gondolhatjuk tehát, hogy egy alakzat mozgásakor a mozgó tér viszi az alakzatot új helyzetébe.

Nem gondolunk arra, hogy a mozgás során a mozgó alakzat pontjai milyen helyzeteket foglalnak el, hanem csak arra, hogy a mozgás révén milyen kezdő helyzetből milyen véghelyzetbe jutottak.

Lehetséges, hogy a mozgás egy alakzat pontjainak helyzetét megváltoztatja, de az alakzat egésze a mozgás után is ugyanazt a helyet foglalja el. Ez a helyzet pl., ha a mozgatott alakzat a teljes tér.

Minden mozgáshoz tartozik egy ellentétes mozgás, amelyik az elmozgatott alakzatot eredeti helyzetébe viszi vissza. Ha az elmozgatott alakzatot tovább mozgatjuk, akkor az eredeti alakzathoz mozgással származó alakzathoz jutunk. Mondhatjuk tehát, hogy két mozgás egymásutánja egyetlen mozgást ad. Kivétel nélkül igaz ez, mert az el nem mozgatást, a helyben hagyást is a mozgások közé soroljuk.

A mozgásra vonatkozóan a szemléletre hivatkozva a következő megállapításokat tesszük:

VII. A mozgás két pont összekötő szakaszát a két elmozgatott pont összekötő szakaszába, az egyenest egyenesbe és a síkot síkba viszi.

VIII. Egy és csak egy olyan térmozgás van, amely egy adott félsíkot és ennek határán adott félegyeneset megadott helyzetbe, egy adott félsíkba és annak határán adott félegyenesbe visz át.

A második megállapítás azt is kimondja, hogy ha a térmozgás nem változtatja meg egy félsík és egy ennek határán elhelyezkedő félegyenes helyzetét, akkor nem változtatja meg a tér egyetlen pontját sem.

B Aki tudja, hogy a térgeometria felépíthető úgy, hogy előzetesen csak a sík (térben való) mozgásáról van szó, az kérdezheti, miért vezettük be mi itt, az alapfogalmak ismertetése során nyomban a térmozgást. Ennek az elhatározásnak az az oka, hogy a sík és a tér mozgásának szemléleti alátámasztása között nem igen tehetünk különbséget. Módszerünk előnye, hogy amikor az egyiket már szerepeltetjük, nem kell tettetnünk, hogy a másikat még nem ismerjük.

További előnyt jelent az, hogy módszerünk révén ebben az előkészítő fejezetben párhuzamot látunk a síkra és a térre vonatkozó alapismeretek között. Itt elsősorban a 6. §-ra és azon belül különösképpen a 6.5 szakaszra gondolunk.

2.2 Két szakasz akkor *egyenlő*, ha van olyan mozgás, amelyik az egyiket a másikba viszi. Ha két szakasz nem egyenlő, akkor az a nagyobb, amelyik tartalmaz a másikkal egyenlő szakaszt.

Ha egy szakaszt *hosszegységnek* választunk, akkor a szakaszokat pozitív valós számokkal mérhetjük. A hosszegység hossza 1. Egyenlő szakaszok *hossza* egyenlő, és nagyobb szakasz hossza nagyobb. A szakaszok hosszát általában kisbetűvel jelöljük.

Két pont összekötő szakaszának hossza a két pont *távolsága*. Az AB szakasz hosszát AB vagy \overline{AB} is jelölheti. Mondjuk, hogy egy pontnak önmagától való távolsága 0, és ennek megfelelően egyetlen pontot *nullszakasznak* is mondhatunk.

A hosszmérésről szólnak a következő megállapítások:

IX. Egy szakaszt bármely belső pontja két olyan szakaszra bont fel, amelyek hosszának összege az eredeti szakasz hossza.

X. Ha a hosszegység adott, akkor bármely A kezdőpontú félegyenesen egy és csak egy olyan B pont található, amelyre nézve az AB távolság egy adott pozitív valós szám.

Az első megállapítás akkor is helyes, ha benne nem két, hanem véges sok szakaszra való felbontás szerepel.

Ha a hosszegységet megváltoztatjuk, minden szakasz hossza ugyanannyiszorosra változik. Azt mondjuk, hogy egy szakasz egy másik szakasz n -szerese, másik két szakasz összege vagy különbsége, ha a szakaszok hosszai között ilyen kapcsolat áll fenn. Erre az ad jogot, hogy az ilyen kijelentés helyessége nem függ a hosszegység megválasztásától. Szó lehet hasonló indokolással arról, hogy pl. két szakasz szorzata vagy hányadosa másik két szakasz szorzatával vagy hányadosával egyenlő. Nem mondhatunk azonban hasonlót, ha pl. két szakasz hosszának szorzata egy harmadik szakasznak a hossza.

A1 A gyakorlati életben a hosszúság megadásakor a választott hosszegységet is jelezni kell (pl. 5 cm, 60 km). A hosszegység megváltoztatásakor a hosszúság mérőszáma is megváltozik. Ezt a tényt szögezzük le, amikor kimondjuk, hogy a hosszúság nem pusztán szám, hanem *hosszúság dimenziójú* mennyiség. Geometriai feladatoknál szokás viszont az, hogy a hosszegységet eleve adottnak gondoljuk, és a hosszúságok megadásánál nem is jelezzük.

A2 Szerepeltettük a valós számokat, és feltételezzük, hogy az olvasó ismeri a valós számok aritmetikáját. Támaszkodunk majd az első- és másodfokú egyenletek megoldásának ismeretére is.

B1 Eddig tíz, római számokkal jelölt axiómát mondtunk ki. Ezek az axiómák a tapasztalaton alapulnak, a valóságból absztrakcióval származnak. Absztrakció szükséges már ahhoz is, hogy pontról, egyenesről és síkról beszélhessünk. További absztrakciót jelent, hogy a geometria tárgyalásában abszolút igaznak tekintjük azt, amit a tapasztalat csak bizonyos korlátok között támaszt alá. Ilyen tény pl. az is, hogy a merev test elmozgatása után pontjainak távolságai nem változnak meg. Lehetséges, hogy bővebb tapasztalat ezt meg fogja cáfolni. Az axiómáinkra épülő geometria ezek szerint a tapasztalaton alapszik, de nem az egyedül lehetséges ilyen geometria.

B2 Megtehetnők, hogy a továbbiakban a tapasztalatra többet nem hivatkozunk, a szemléletre nem támaszkodunk, hanem római számokkal jelzett axiómáinkból kiindulva mindent logikai úton vezetünk le. Így a teljes geometriát fel lehetne építeni, ha a már kimondott axiómákhoz még egy további axiómát csatolunk, amelyet majd később mondunk ki (lásd 12.2).

Ha így járnánk el, tárgyalásunk *axiomatikus* volna. Nem választhatjuk ezt az utat, mert nagyon hosszadalmas és nehézkes. A legtöbb gondot talán az okozná, hogy még a szemléletes kifejezésmódokat is el kellene kerülnünk, illetőleg minden ilyen kifejezés jelentését definiálnunk kellene. A kezdő értetlenül állna az ilyen tárgyalás sok bonyodalma előtt. Mi ismételt hivatkozni fogunk a szemléletre, és nem fogjuk minden esetben külön hangsúlyozni ezt a körülményt. Ha mégis felsoroltunk tárgyalásunkban axiómákat, ezt csak azért tettük, hogy rámutathassunk az axiomatikus tárgyalás mibenlétére.

Felsorolt axiómáinkat több szempontból kifogásolni lehet. Meg lehetne követelni, hogy az egyes axiómák állításának még egy része se legyen a többiből levezethető. Kifogásolni lehet, hogy axiómáink szerepeltetik a valós számokat, pedig a geometria a valós számok szerepeltetése nélkül is felépíthető. Kifogásolni lehetne, hogy axiómáink a tartalmazás fogalmára, tehát a halmazelmélet elemeinek ismeretére épülnek, pedig ezek az alapfogalmak is axiomatikus részletezhetők volnának. E szempontok figyelembevételére az axiomatikus tárgyalást még nehezebbé tenné. Aki annak a ténynek a bizonyítását is elvárja, hogy a geometria axiómáiból nem lehet ellentmondásra következtetni, az olyan követelményt támaszt, amelyet — legalábbis ma — nem tud teljesíteni senki sem.

A geometria axiomatikus megalapozására elsőnek EUKLIDÉS törekedett. Mai értelemben vett első szabatos megvalósítója D. HILBERT (1862—1943, göttingai egyetemi tanár).

B3* Néhány megjegyzést teszünk az olyan olvasó számára, aki ismeri a geometria szokásos axiomatikus megalapozását, és a mi axiómáinkat egybe akarja vetni a szokásos axiómákkal.

a) Az egybevetés érdekében először is leszögezzük, hogy hogyan értendők axiómáink akkor, ha axiomatikus tisztaságra törekszünk.

Első három axiómánk egy pontoknak nevezett elemekből álló, térnek mondott halmazról kimondja, hogy vannak olyan nem üres, a pontoktól és egymástól különböző, egyeneseknek és síkoknak nevezett részhalmazai, amelyek az egymást tartalmazás tekintetében rendelkeznek az I—III. axiómákban kimondott tulajdonságokkal.

Az egyenes, a sík és a tér kettévágásáról szóló axiómáink kimondják, hogy van egy olyan elválasztásnak mondott reláció, amely egy egyenes egy pontja és más két pontja között állhat fenn, s amely rendelkezik a IV—VI. axiómákban kimondott tulajdonságokkal. Így pl. IV. szerint az e egyenes P pontja egyértelműen két nem üres osztályba sorolja e többi pontját; P csak olyan pontokat választ el az e egyenesen, amelyek más-más osztályhoz tartoznak; ha viszont P nem választja el e -nek két P -tól nem feltétlenül különböző pontját, akkor ez a két pont, valamint az ezeket elválasztó pontok mindannyian egy P -vel kibővített osztályhoz tartoznak. Hasonlót mondhatunk V. és VI. esetében is.

A mozgatról szóló két axiómánk kimondja, hogy van egy olyan transzformációcsoport, amelynek elemeit elmozgatásoknak nevezzük, s amelyek rendelkeznek a VII., VIII. axiómákban kimondott tulajdonságokkal. Eszerint a csoport elemei egyeneshez egyenest, síkhoz síkot rendelnek, az elválasztás relációját megtartják, és a csoportnak egyetlen olyan eleme van, amely a VIII.-ban említett alakzathoz egy megadott ugyanilyen alakzatot rendel.

A mérésről szóló axiómáink azokra az osztályokra vonatkoznak, amelyeket az elmozgatással egymásba átvihető pontpárok alkotnak. Két axiómánk kimondja, hogy ezeknek a pontpárosításoknak mindegyikéhez hozzárendelhető egy-egy pozitív valós szám, amelyet az osztályba tartozó pontpárok távolságának mondunk, s amely rendelkezik a IX., X. axiómákban kimondott tulajdonságokkal. Eszerint egy pontnak két általa elválasztott ponttól való távolságát összeadva az utóbbiak távolságát kapjuk meg, továbbá egy egyenesen az A , B pontokhoz egyetlen olyan pont található, amelyet A nem választ el a B ponttól, s amelynek A -tól való távolsága egy önkényesen megadott pozitív valós szám.

b) Az általunk megadott axiómák rendszere a szokásos axiómarendszerekkel ekvivalens. Ismeretes ugyanis, hogy axiómáink állítása levezethető a szokásos axiómarendszerekből, és ellenőrizhető, hogy a szokásos axiómák levezethetők a mi axiómáinkból. Ez utóbbi levezetést illetően megemlítjük, hogy az illeszkedési axiómák I—III. és VI. axiómáinkból adódnak, a rendezési axiómák a IV. és V., az egybevágósági axiómák a VII—X. axiómáinkból következnek, és X. axiómánk a folytonossági axióma teljesülését is biztosítja.

Az említett levezetés során csak az egybevágósági axiómák levezetése jelenthet problémát. Ezért erre a részletre vonatkozólag néhány megjegyzést teszünk. A szakasz és a szögtartomány bevezetése után ezek körében egybevágónak (vagy egyenlőnek) az elmozgatással egymásra fektethetőket mondjuk. Az így definiált egybevágóság reflexív, szimmetrikus és tranzitív, hiszen az elmozgatások csoportot alkotnak. Egy félegyenes két kezdőszakasza nem lehet egymással egybevágó; ezt X. axiómánk kimondja, de ez IX. axiómáinkból is levezethető. Több gondot okoz annak bizonyítása, hogy ha az OB_1 félegyenes kettévágja a konvex AOB tartományát, akkor az AOB , AOB_1 szögek nem lehetnek egybevágók. Ezt a bizonyítást vázlatosan közöljük.

Ha az említett szögek egybevágók, tehát $AOB \sim AOB_1$ elmozgatással AOB_1 -re helyezhető, akkor ez az elmozgatás az OA szarát csak az OB_1 szarra fektetheti, mert ha helybenhagyná, akkor ellentmondásba jutnánk a VIII. axiómával. Ugyanez az elmozgatás az OB_1 félegyeneset olyan OA_1 félegyenesbe viszi át, amely az AOB_1 belsejében halad. A félegyenesek helyzetét megadó A_1 , B_1 pontokat az AB szakaszon vesszük fel. E szakasz tetszőleges P pontja egy OP félegyeneset határoz meg. Ezt az imént említett elmozgatás kétszeri alkalmazása az OP_1 helyzetbe viszi át. Ilyen módon P -hez az AB szakasz egy P_1 pontját rendeltük hozzá. Ez a hozzárendelés A -hoz A_1 -et, B -hez B_1 -et rendeli és az elválasztás relációját megtartja. Tekintjük azoknak a P pontoknak a halmazát, amelyekre $AP < AP_1$ teljesül. Ez a halmaz tartalmazza az A pontot (sőt az AA_1 szakaszt is), a B pontot azonban nem. A X. axiómára támaszkodva megállapíthatjuk, hogy van egy olyan maximális AC szakasz, amelynek minden belső pontja az említett halmazhoz tartozik. A C -hez rendelt C_1 pont nem lehet az AC szakasz belső pontja, mert akkor a kétszeri elmozgatás az A , C_1 , C sorrendet nem tartaná meg. Nem lehet azonban C_1 az AC szakasz meghosszabbításán sem, mert akkor a CC_1 szakasz is az imént említett halmazhoz tartoznék, és AC nem volna maximális. Ezek szerint C és C_1 azonos pontok, és a kétszeri elmozgatás az AC félegyeneset, valamint az AC egyenes által határolt félsíkokat nem mozgatja el. Ez ellentmond VIII. axiómáinknak, hiszen a B pont nem marad helyben, s ez az ellentmondás eredeti állításunkat bizonyítja.

c) Az axiomatika jobbnak tartja az olyan axiómarendszert, amely kevesebbet mond ki és kevesebb előismeretre támaszkodik. Ebből a szempontból a mi axiómarendszerünk határozottan rossznak mondandó, hiszen axiómáink sok feleslegeset is kimondanak, és a valós számok ismeretét szükségtelenül feltételezik. Még csak az sem igaz, hogy axiómáink egyike sem hagyható el, mert bizonyítani lehet, hogy IV. axiómánk állítása levezethető a IX. és X. axiómáinkból.

Axiómáink megválasztásakor nem is törekedtünk azonban a most mondott szempontok érvényesítésére. Az a cél vezetett bennünket, hogy a kezdő axiómarendszert lásson, de az ennél könnyebben emészthető legyen.

B4* Axiómarendszerünknek egy kevesebbet kimondó módosítását említjük meg. Eredeti IX. és X. axiómáinkat a következőkkel pótolhatjuk:

Az elmozgatással egymásba átvihető rendezett pontpárok osztályairól, az ezekhez az osztályokhoz rendelt pozitív számokról szólnak. A rendezett P, Q pontpárhoz rendelt számot PQ -val jelöljük. A módosított IX. és X. axióma szerint ez a hozzárendelés megvalósítható úgy, hogy ha B elválasztja egy egyenesen az A, C pontokat, akkor $AB + BC = AC$, ha pedig egy p pozitív valós számot önkényesen megadunk, akkor az AB félegyenesen egyetlen olyan pont van, amelyre $AP = p$.

Megmutatjuk, hogy ezekből a módosított axiómákból valóban következnek eredeti axiómáink állításai. Ehhez $PQ = QP$ bizonyítására van szükség. Tegyük fel tehát, hogy pl. $PQ < QP$. Az új X. axióma szerint a QP félegyenes egy P_1 pontjára $PQ = QP_1$. Ez a P_1 pont a PQ szakasz belső pontja, mert P által Q -tól elválasztott P' pontra új X. axiómánk szerint $QP' = QP + PP' > QP > PQ$. Ezek szerint van olyan elmozgatás, amely a P pontot Q -ba, a Q pontot pedig a P, Q pontokat elválasztó P_1 -be viszi. Minthogy az elmozgatás az elválasztás relációját megtartja, az említett elmozgatás a P_1 pontot a Q, P_1 pontokat elválasztó Q_1 pontba viszi. Ennek az elmozgatásnak kétszeri alkalmazása a P, Q pontokat a P_1, Q_1 pontokba viszi át, így tehát $PQ = P_1Q_1$. Ennek ellentmond, hogy IX. axiómánk szerint

$$PQ = PP_1 + P_1Q > P_1Q = P_1Q_1 + Q_1Q > P_1Q_1.$$

Ez az ellentmondás az eredeti $PQ = QP$ állítást bizonyítja.

2.3 Irányított szakaszhoz jutunk, ha egy szakasz végpontjainak sorrendjét is megadjuk, azaz megmondjuk, melyik a *kezdőpontja* és melyik a *végpontja*. Ha az irányított szakaszt AB jelöli, akkor A a kezdőpontja. Ha egy pont ezen a szakaszon A -ból B -be jut, akkor ennek a szakasznak az irányában mozog.

Minden félegyenes *irányt* szab meg. Az irányított AB szakasz iránya megegyezik az AB félegyenesével. Egy egyenesen elhelyezkedő két félegyenes iránya akkor és csak akkor egyező, ha az egyik tartalmazza a másikat. Egy egyenesen kétféle irány adható meg, ezek egymással ellentétes irányok. *Irányított egyenest* adunk meg, ha az egyenest és ezen egy irányt is megadunk. A megadott irányt *pozitívnak*, az ellentétes irányt pedig *negatívnak* mondjuk.

Irányított egyenesen megadott irányított szakasznak *előjeles hosszúságot* tulajdoníthatunk. Így nevezzük a szakasz hosszúságát, ha pozitív vagy negatív előjellel látjuk el aszerint, hogy iránya pozitív-e vagy negatív.

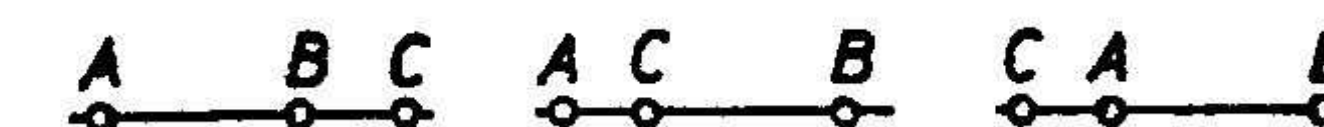
Egy egyenes két irányított szakaszát egyenlőnek mondjuk, ha előjeles hosszuk egyenlő. Egy egyenes irányított szakaszairól szólva azt mondjuk, hogy egy szakasz egy másiknak n -szerese, másik kettőnek összege vagy különbsége, hogy továbbá két szakasz szorzata vagy hányadosa az egyenes (vagy egy másik egyenes) két szakaszának szorzatával vagy hányadosával egyenlő, ha előjeles hosszuk között ilyen kapcsolat áll fenn. Az ilyen kijelentések helyessége nem függ a hosszegység megválasztásától, de nem függ az egyenesek irányításának mikéntjétől sem. A szorzatot és hányadost illetően hozzátesszük ehhez, hogy nem függ az egyenes irányításától az eredmény előjele sem.

Akárhogy helyezkednek el egy egyenesen az (egymástól nem feltét-

lenül különböző) A, B, C pontok, mindig fennáll az irányított szakaszokra kimondott

$$AB + BC = AC$$

összefüggés. Az 1. ábra eseteinek vizsgálatával ellenőrizhetjük e kijelentés helyességét.



1. ábra

Az egyenest elmozgathatjuk úgy, hogy újból ugyanezt a helyet

foglalja el, a mozgás az irányokat ne változtassa meg, és megadott A pontja előírt B pontjába kerüljön. Ezt a mozgást az egyenes (önmagában való) *eltolásnak* (tranzláció) nevezzük.

Ha az egyenes A_1, A_2 pontjai az egyenes eltolásakor a B_1, B_2 pontokba jutnak, akkor az A_1B_1 és A_2B_2 irányított szakaszok egyenlők. Irányított egyenes eltolásakor ezeknek a szakaszoknak a közös előjeles hossza az eltolás mértéke. Eltolások egymás utáni alkalmazása az egyenes egyetlen eltolását adja, s ennek előjeles mértéke az alkalmazott eltolások mértékeinek összege. Az eredmény nem függ attól, hogy az eltolásokat milyen sorrendben hajtottuk végre.

A Vigyázzunk arra, hogy ha irányított szakaszokról van szó, akkor AB és BA más jelent, hiszen $AB = -BA$.

2.4 Egyes speciális mozgásfajtákat említünk.

A tér *eltolása* (tranzláció) nem változtatja meg egy félsík helyzetét, és ennek határegyenesét önmagában tolja el. Nem változik meg ilyenkor azoknak a féltereknek a helyzete, amelyeket az elcsúsztatott félsík síkja határol, és az elcsúsztatott félsíkot síkká kiegészítő félsík helyzete sem. A tér eltolását egyértelműen jellemezzük, ha megadjuk az elcsúsztatott félsíkot és azt, hogy határegyenesé hogyan tolódik el.

A tér *elforgatásakor* (tengely körüli elforgatás, rotáció) egy egyenes pontjai helyben maradnak. Ez az egyenes a *forgástengely*. Egy ilyen forgást egyértelműen jellemezzük, ha megadjuk tengelyét és azt, hogy egy a tengely által határolt félsík milyen helyzetbe jut.

Ha a térnek egy pont körüli elforgatásairól beszélünk, mindazokra a térmozgásokra gondolunk, amelyek ennek a pontnak, a *forgáscentrumnak* a helyzetét nem változtatják meg. Ilyen mozgáshoz jutunk, ha a teret olyan tengely körül forgatjuk el, amely a forgáscentrumon áthalad.

Ha a teret úgy mozgatjuk el, hogy egy féltér ne változtassa meg a helyzetét, akkor ez a féltér határsíkja is áll. A határsíknak ezt a mozgását *síkmozgásnak* nevezzük. Ilyen mozgáshoz jutunk, ha a síkot folyamatosan úgy mozgatjuk, hogy a mozgás során mindig ugyanazt a helyet foglalja el, hogy tehát a sík önmagában mozogjon. Egy síkmozgás jellemzéséhez elég megadni, hogy a sík egy félegyenesé milyen helyzetbe jut. Hangsúlyoznunk kell, hogy a síkot a térben mozgatva úgy is önmagára fektethetjük, hogy a sík önmagában mozogva, tehát síkmozgással ezt a helyzetet nem érheti el.

A sík *eltolása* (tranzláció) olyan síkmozgás, amelynél egy egyenes nem változtatja meg helyzetét. A sík eltolása ezt az egyenest önmagában tolja el. Az elcsúsztatott egyenes által határolt félsíkok a sík eltolása során helyben maradnak. A sík eltolását azzal jellemezhetjük, hogy megadjuk az elcsúsztatott egyenest és azt, hogy ez az egyenes hogyan tolódik el.

A sík *elforgatása* (pont körüli elforgatás, rotáció) olyan síkmozgás, amely-nél egy pont helyben marad. Ez a pont a *forgás középpontja* (forgáscentrum). Ezt a mozgást a középpontnak és egy ebből kiinduló félegyenes kezdő és vég-helyezetének megadásával jellemezhetjük.

Az ebben a szakaszban említett mozgásfajták mindegyikéről megállapít-hatjuk, hogy az ellentétes mozgás, valamint két mozgás egymás utáni alkal-mazásával keletkező mozgás is ugyanolyan fajtájú. Ezt a kijelentést úgy ért-jük, hogy pl. egy megadott tengely körüli két elforgatás egymásutánja ugyan-azon tengely körüli elforgatást szolgáltat. Felhívjuk a figyelmet arra, hogy definícióink az el nem mozgást is hozzásorolták az eddig említett mozgás-fajták mindegyikéhez. Egymásutánjukról szóló iménti kijelentésünk külön-ben nem is volna helyes.

Megemlítjük még, hogy a tér eltolásainak és tengely körüli elforgatásai-nak egymásutánja minden térmozgáshoz elvezet, s hogy a sík eltolásainak és elforgatásainak egymásutánja minden síkmozgást megad.

B1 Már leszögeztük álláspontunkat, hogy ebben az első fejezetben a szemlélet által alátámasztott tényeket ismertetünk, és nem törekszünk arra, hogy helyességükre axiómáink-ból kiindulva logikai úton következtessünk. Nem foglalkozunk az ebben a szakaszban előadot-taknak bizonyításával sem. Megemlítjük viszont, hogy csak olyan tényeket soroltunk fel, amelyeknek bizonyítása a későbbi fejezetek anyagának felhasználása nélkül is lehetséges (vö. 6.5 B4).

B2 A tárgyalt mozgásfajtákkal kapcsolatban nem említettünk néhány olyan tényt, amelyeknek a bizonyításánál a könyv későbbi fejezeteinek ismeretére volna szükség. Nem szólhattunk ezért arról, hogy a sík és tér eltolásánál csak egyetlen egyenes tolódik-e el önma-gában, hogy a tér eltolásánál csak egyetlen félsíkpár marad-e helyben, hogy eltolások egymás-utánja akkor is eltolást ad-e, ha nem ugyanannak a félsíknak az elcsúsztatásával származtat-hatók. Különbséget kell tennünk hasonló okokból a tér tengely körüli elforgatása és a sík forgásakor az ehhez a síkhoz tapasztott tér mozgása között.

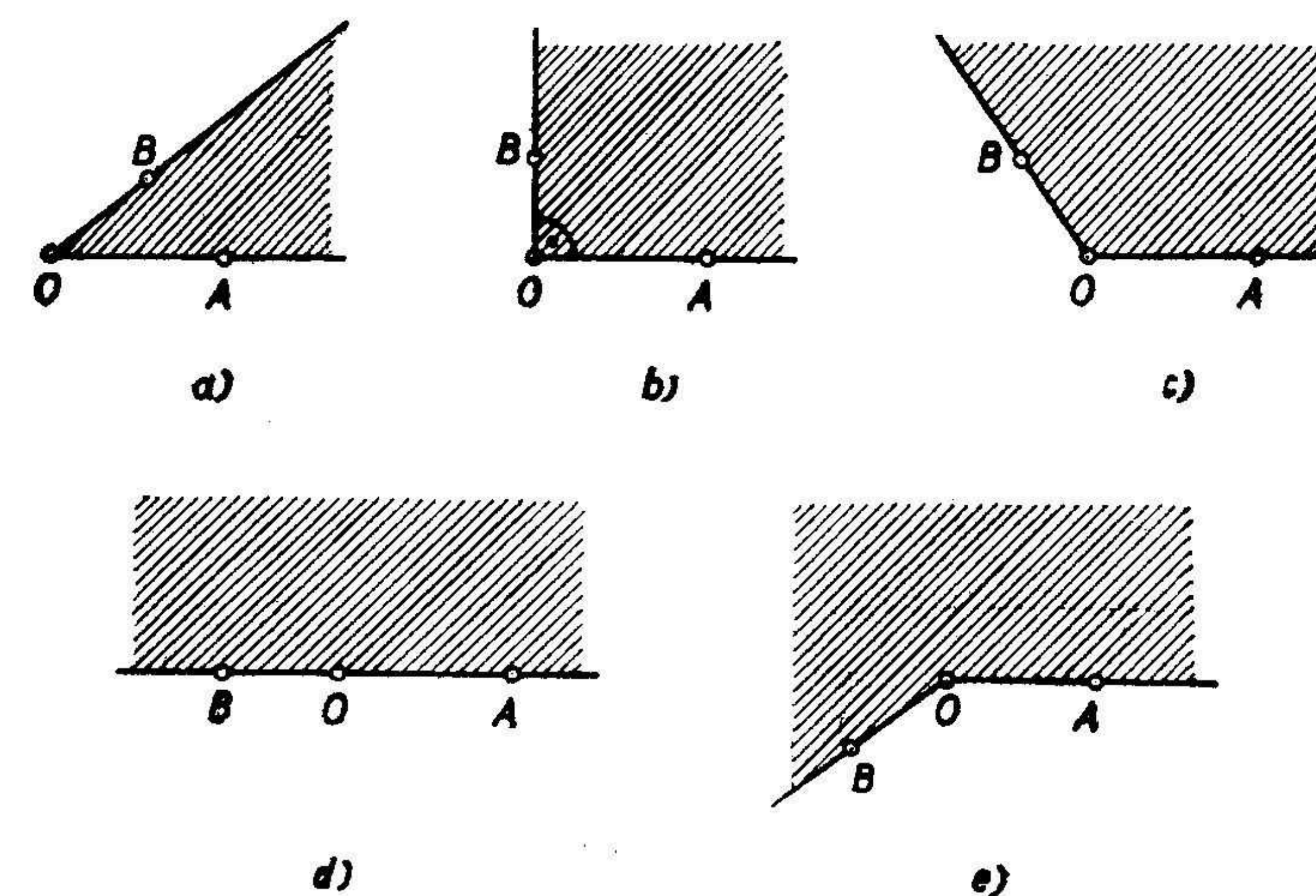
3. § Szög

A szögekkel, mérésükkel és a szögek közötti legegyszerűbb kapcsolatok-kal foglalkozunk.

3.1 Egy pontból kiinduló két félegyenes a síkot két részre bontja. Egy-egy ilyen részt *szögnek* vagy *szögtartománynak* nevezünk (2. ábra). A félegyenesek a szög *szárjai*, közös kezdőpontjuk a szög *csúcsa* (szögpont). A szárak helyett sokszor csak kezdőszakaszaikat szerepeltetjük. A szögtartományt a szá-
rak együttese, a *szögvonál* (szög) határolja. A szögvonál az általa határolt két szögtartomány közös része.

Ha egy szögnek csak a szárait adjuk meg (és ezek nem alkotnak egyetlen egyenest), akkor az általuk határolt két szög kisebbikére gondolunk (tehát arra, amelyik nem tartalmazza a szárak meghosszabbítását). Ha a nagyobbik szögről van szó, akkor ezt a körülményt valamilyen módon jelezni kell.

A szögeket görög kisbetűkkel jelöljük. A szög jele \angle . Az OA , OB szá-rakkal megadott szöget $AOB \angle$ jelöli, de $BOA \angle$ is jelölheti. Ha csak egy O csúcsú szögre gondolhatunk, akkor az $O \angle$ jelöléssel is megelégedhetünk. Ábrában a szögbe rajzolt, a szárakat összekötő ívvel (kettős ívvel stb.) jelöl-hetjük a szöveget, és betűjelüket a szög szárjai közé írjuk.



2. ábra

B A szögtartomány definíciójával kapcsolatban megemlítjük, hogy egy szögvonalból kiindulva hogyan juthatunk el az általa határolt két szögtartományhoz. Ha a két szár egyetlen egyenest alkot, akkor a két szögtartomány az egyenes által határolt két félsíkkal azonos. Ha a két szár nincs egy egyenesen, akkor a száregyenesek mindegyike egyetlen olyan félsíkot határol, amely tartalmazza a másik szárát. Az így kapott két félsík közös része a keresett két szögtartomány egyike. Ha ezt a szögtartományt a teljes síkból elhagyjuk, akkor a szögvona-lunk által határolt másik szögtartományhoz jutunk.

3.2 Két szög akkor egyenlő, ha mozgással fedésbe hozhatók. Két nem egyenlő szög közül az a nagyobb, amelyik tartalmaz azonos csúcsú s a má-sikkal egyenlő szöget.

Ha egy szöget egységül választunk, akkor a szögeket mérhetjük. A *szög-mérték* pozitív valós szám. Egyenlő szögek mértéke egyenlő, és nagyobb szög mértéke nagyobb. Ha egy szöget csúcsából induló félegyenessel két szögre bontunk, akkor e két szög mértékének összege az eredeti szög mértékét adja. Ez akkor is igaz, ha egy szöget nem két, hanem véges sok szögre bontunk fel. Ha két közös csúcsú szög egyike tartalmazza a másikat, akkor az elsőnek a mértéke a nagyobb. A szögek mértékei között mindazok a számok előfordul-nak, amelyek valamely szög mértékénél kisebbek.

A szög jele a szög mértékét is jelöli. Egyenlő szögeket sokszor jelölünk ugyanazzal a betűvel és rajzban is ugyanolyan módon (ívvel, kettős ívvel stb.).

Egy szöget egy másik szög n -szerésének, másik két szög összegének vagy különbségének mondunk, ha mértékeik között ilyen kapcsolat van. Az ilyen kijelentések helyessége nem függ attól, hogy a szögmérés egységét hogyan választjuk meg.

Az *egyenesszög* szárjai egy egyenest alkotnak. Az egyenesszög felét *derék-szögnek* nevezzük. Az egyenesszög tartománya tehát félsík (a derékszögre pe-dig síknegyed). A derékszögnél kisebb szögeket *hegyesszögnek*, a derékszög-nél nagyobb, de az egyenesszögnél kisebb szögeket *tompaszögnek* mondjuk. A hegyesszög, derékszög, tompaszög és egyenesszög közös néven *konvex*

(domború) szögek. Az egyenesszögnél nagyobb szögeket *konkáv* (homorú) szögeknek nevezzük (vö. A1). Mint határesetet bevezetjük a *nullszöget*, melynél a két szár egybeesik, és a szögtartomány szerepét ez az egyetlen szár játssza, valamint a *teljesszöget*, melynél a két szár egybeesik, és a szögtartomány a teljes sík.

A derékszög szárait az mondjuk, hogy egyik a másikra *merőleges* (ortogonális, normális). A merőlegesség jele \perp . Ábrán a derékszöget azzal is jelezhetjük, hogy a szöget jelölő íven belül egy pontot helyezünk el. A derékszög (rectus) jelölésére az R betűt is használják.

A szögmérés egységül közönségesen az egyenesszög 180-ad részét, a *fokot* (1°) választjuk. A fok hatvanad része egy *perc* ($1'$), és ennek hatvanad része egy *másodperc* ($1''$). Eszerint a teljesszög 360° , az egyenesszög 180° és a derékszög 90° .

A1 Helyteleníteni kell, ha valaki a konkáv szöget „domború szög”-nek mondja. Ez a szokás szerencsére már kiveszőben van. Aki elfogadja ezt a helytelen megnevezést, ilyeneket kénytelen mondani: „a szögtartomány akkor domború, ha a szög nem domború” (vö. 4.6) és „egy sokszögtartomány akkor domború, ha nincs domború szöge” (vö. 4.7).

A2 A fokmérték a babiloni hatvanas számrendszer emlékét őrzi. Újabb ismételt kísérlet történt arra, hogy a szögmérésnél 100-as váltószámra térjenek át. A derékszög századrésze egy *újfok* (1_\circ), ennek századrésze egy *újperc* ($1_$), és ez utóbbinak századrésze egy *újmásodperc* ($1_{,,}$). E mértékek általánosabban nem terjedtek el.

3.3 Nemcsak közvetlenül lehet a szögmérés egységét megadni, hanem azáltal is, hogy megadjuk valamelyik szögnek a mértékét. Így vezetjük be az *ívmértéket* azáltal, hogy az egyenesszög mértékéül egy π -vel jelölt valós számot választunk. E szám közelítő értéke 3,14159. Pontos értékét csak később szabjuk majd meg (lásd 19.4).

A szögek mérésére egyaránt használjuk a fokmértéket és az ívmértéket. Ez a két mérték is arányos egymással. A leggyakrabban előforduló szögek ívmértéke:

$$360^\circ = 2\pi, \quad 180^\circ = \pi, \quad 90^\circ = \frac{\pi}{2}, \quad 60^\circ = \frac{\pi}{3}, \quad 45^\circ = \frac{\pi}{4}, \quad 30^\circ = \frac{\pi}{6}.$$

Ha fokmértékről ívmértékre térünk át, akkor az

$$n^\circ = n \frac{\pi}{180}, \quad n' = n \frac{\pi}{10\,800}, \quad n'' = n \frac{\pi}{648\,000}$$

összefüggéseket használhatjuk. Az itt szereplő törtek közelítő értéke

$$1^\circ = 0,0174533, \quad 1' = 0,0002909, \quad 1'' = 0,0000048.$$

Radiánnak nevezik azt a szöget, amelynek ívmértéke 1. Ennek fokmértéke közelítőleg

$$1 = 57^\circ 17' 44,6'' = 57,29578^\circ.$$

A Az ívmérték bevezetése alapján megállapíthatjuk, hogy az ívmérték dimenzió nélküli puszta szám. Az ívmérték számadata után a mértékegység, a radián jelzését elhagyjuk. Semmi zavar nem származik abból, hogy egy szög fokmértékét és ívmértékét egyenlőnek mondjuk és írjuk.

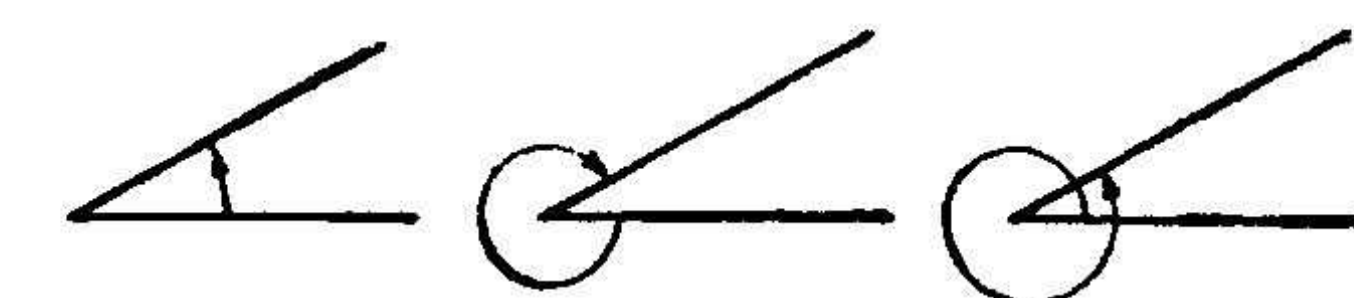
B1 Az ívmérték használatának sok előnye van. Legnagyobb hasznát az analízis látja, de tapasztaljuk majd, hogy a geometrián belül is vannak előnyei (lásd 19.8 és 29.8).

B2 Kifogásolhatja valaki, hogy az ívmértéket bevezettük és a π számot szerepeltettük, mielőtt a körről és a körív méréséről szó lett volna (vö. 19.8). Azt válaszolhatjuk erre, hogy a π szám bevezetéséhez nincsen geometriára szükség, hiszen az analízis számos lehetőséget nyújt erre. Példaként megemlítjük, hogy π a legkisebb olyan pozitív szám, amelyre a $\pi - \frac{\pi^3}{3!} + \frac{\pi^5}{5!} - \dots$ sor összege 0. Ez a válasz azt is mutatja, hogy az ívmértéket akkor is bevezethetnők, ha a 12.2-ben kimondandó axiómát nem mondanók ki, és ezért a π szám szokott geometriai definíciójához el sem juthatnánk. Ebben az esetben az ívmérték elnevezést mindenestre kritika tárgyává tehetnők.

3.4 A síkban kétféle irányban forgathatunk el egy félegyenest kezdőpontja körül. Ez a két *forgásirány* egymással ellentétes.

Ha a síkban egy forgásirányt adunk meg, ezt *pozitívnak* és az ellentétes forgásirányt *negatívnak* mondva, akkor a síkot *irányítottnak* nevezzük. Ha a síkra egyik oldaláról nézünk, akkor azt a forgásirányt szokás pozitívnak választani, amelyik arról az oldalról nézve az óramutató forgásával ellentétes. A sík irányítását úgy is felfoghatjuk tehát, mint annak megadását, hogy a síkot melyik oldalról nézzük.

Ha a síkban egy félegyenes kezdőpontja körül forogva egy kezdő helyzettől egy véghelyzetbe jut, *forgásszöget* ír le. A forgó szár kezdő és véghelyzetét a forgásszög *kezdőszárának* és *végaszárának* mondjuk. A forgásszög megadásánál annak megadására van szükség, hogy a forgó félegyenes milyen szögtartományokat, milyen irányú forgással és hányszorosan súrol. Ábrán a forgásszöget úgy jelezük, hogy a szárak közé nyíllal irányított ívet rajzolunk, amely a forgó szár mozgását mutatja (3. ábra).



3. ábra

Ha egy forgásszög úgy keletkezik, hogy a forgó szár egyetlen szögtartományt súrol, és közben forgásirányát nem változtatja meg, akkor ezt a forgásszöget megadhatjuk azáltal, hogy megadjuk a szögtartományt, és a szögtartomány szárainak a sorrendjét is megszabjuk. Ilyenkor *irányított szögtartományról* beszélünk. Ha irányított szögtartományról van szó, akkor az $AOB \curvearrowright$ jelölés azt is mutatja, hogy OA a kezdőszár és OB a végaszár.

Irányított síkban a forgásszöghöz *előjeles mértéket* rendelünk. Ezt a mértéket megkapjuk, ha a forgó szár által súrolt szögtartományok előjeles mértékeit összeadjuk. Itt az előjeles mérték azt jelenti, hogy a szögtartomány mértékét pozitív vagy negatív előjellel látjuk el aszerint, hogy a forgó szár a szögtartományt pozitív vagy negatív irányban forogva súrolja-e. Ha a szögegység adva van, minden valós számhoz tartozik olyan forgásszög, amelynek ez a szám az előjeles mértéke.

Két forgásszög akkor egyenlő, ha előjeles mértékeik egyenlők. A forgásszög egy másiknak az n -szerese, másik kettőnek az összege vagy különbsége, ha előjeles mértékeik között ilyen kapcsolat van. E kijelentések helyessége sem a szögegység megválasztásától, sem a sík irányításának mikéntjétől nem függ.

Ha a síkot egy pont körül elforgatjuk, akkor a pontból kiinduló minden félegyenes ugyanakkora forgásszöget ír le. Ez a forgásszög méri a sík elforgatását, ha nemcsak azt tekintjük, hogy az elforgatás milyen kezdhelyzetből

milyen véghelyzetbe visz, hanem arra is tekintettel vagyunk, hogy a sík milyen irányban forgott és pontjai az elforgatás során milyen helyzeteket foglaltak el.

A síknak egy pont körüli, egymást követő elforgatásai egyetlen elforgatást adnak. Itt az esetleg bekövetkező ellentétes elforgatásokat úgy tekintjük, hogy megsemmisítik egymást. Az eredő elforgatást mérő forgásszög az egymás után alkalmazott elforgatásokat mérő forgásszögeknek az összege. Nem függ az eredmény attól, hogy az elforgatásokat milyen sorrendben hajtjuk végre. Mondhatjuk, hogy egymáshoz csatlakozó forgásszögek egyetlen forgásszöget adnak, és ez a csatlakozó forgásszögeknek az összege.

A forgásirány, sőt általában az irány szó helyett az „értelem” szót is használták, de ma már egyre kevésbé használják. Ez a magyartalan szóhasználat helytelen fordítás eredménye volt.

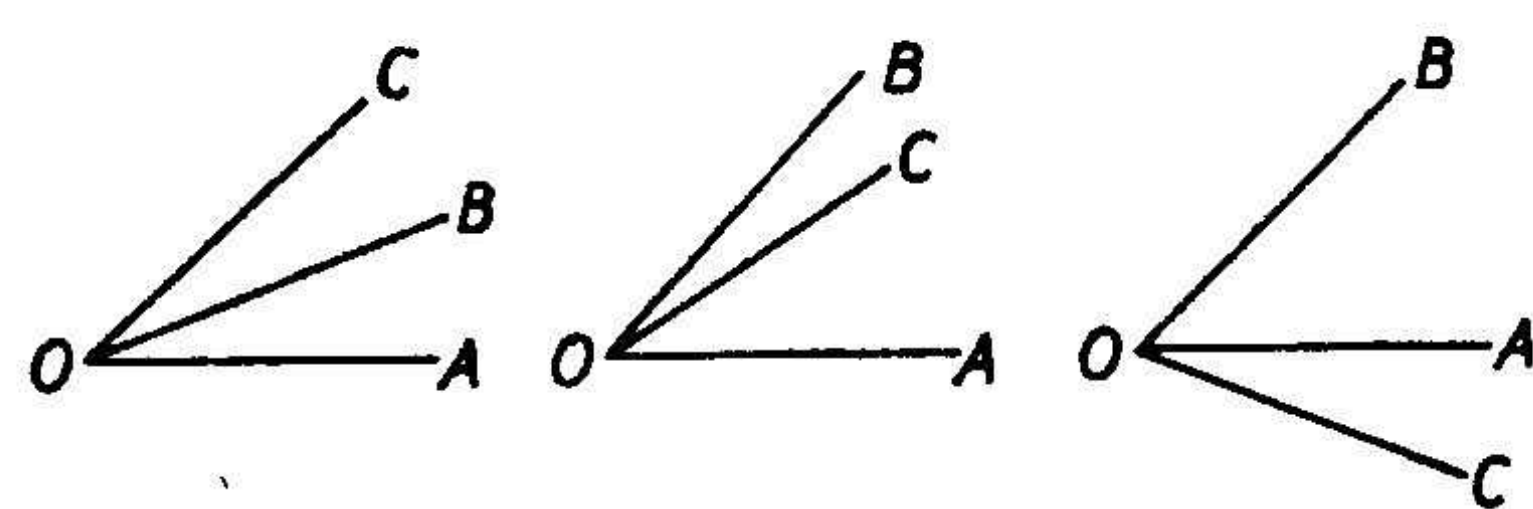
Nem kell a forgásszög értelmezésénél olyan forgatásra szorítkoznunk, amelyik mindig ugyanolyan irányú. Megengedhetjük azt is, hogy a forgatás során véges sok irányváltás következzen be. Ha ezt az álláspontot fogadjuk el, akkor az ebben a szakaszban előadottak változatlanul helyesek maradnak, sőt feleslegessé válik az, amit az utolsó bekezdésben az ellentétes elforgatások megsemmisítéséről mondtunk. Egyedül azt jegyezzük meg, hogy rajzban mindig csak irányt nem váltó forgást jelölünk.

3.5 Ha két közös kezdőpontú (egymástól nem feltétlenül különböző) félegyenest adunk meg, és ezek sorrendjét is megszabjuk, *irányított szöget* adtunk meg. Egy irányított szöghöz hozzárendeljük mindazokat a forgásszögeket, amelyeknek kezdőszára és végszára rendre az irányított szög első és második szárával azonos. Mind e szögek mértékei egymástól a teljesszög egész számú többszöröseiben különböznek. Ezek a forgásszögek mindannyian mértékei az irányított szögnek. Irányított síkban az irányított szög előjeles mértékei közül rendszeren a 180° -nál nem nagyobb abszolút értékűt szoktuk szerepeltetni.

Az irányított szögeket ugyanúgy jelöljük, mint a szögtartományokat, de szükség esetén hozzátesszük a szövegben, hogy irányított szögekről van szó. Irányított szögekről szólva $\angle AOB \curvearrowright$ azt az irányított szöget jelenti, amelyiknek OA az első szára és OB a második. Rajzban szokásos az, hogy nyílazott ívvel jelezsük az irányított szöghöz tartozó forgásszögek egyikét.

Akárhogyan helyezkednek el a síkban az (egymástól nem feltétlenül különböző) OA , OB , OC félegyenese, az irányított szögekre mindig fennáll az

$$\angle AOB \curvearrowright + \angle BOC \curvearrowright = \angle AOC \curvearrowright$$



4. ábra

összefüggés. Ennek a kijelentésnek pontosabb értelme az, hogy a bal oldali szögek egy-egy mértékét összeadva mindig a jobb oldali szögnek valamelyik mértékét kapjuk. Kijelentésünk helyességét a 4. ábrán bemutatott elhelyezkedéseknél ellenőrizhetjük.

Ha a sík elforgatásánál csak a kezdő és véghelyzetre vagyunk tekintettel, és a forgás során elfoglalt helyzetekről nincs szó, akkor az elforgatást irányított szöggel mérjük. Ezt a szöget a forgáscentrumból induló félegyenes elfordulása szolgáltatja.

Ha két egymást metsző irányított egyenes sorrendje is adva van, akkor beszélhetünk irányított szögekről, hiszen a metszéspontból pozitív irányban induló félegyenesek irányított szöget adnak meg.

Ha két egymást metsző, de nem irányított egyenes sorrendjét is megadjuk, akkor beszélhetünk *irányított hajlásszögekről*. A két egyenes irányítása irányított szögeket ad, amelyeknek a mértékei egymástól az egyenesszög egész számú többszöröseiben különböznek. Azoknak a metszéspont körüli elforgatásoknak a szögeihez jutottunk, amelyek az első egyenest a másodikra fektetik. Ezek a forgásszögek mindannyian mértékei az irányított hajlásszögnek. Az irányított hajlásszögek egyenlőségéből természetesen a hajlásszögek egyenlősége is következik, fordítva azonban nem. Irányított síkban az irányított hajlásszög előjeles mértékei közül rendszeren azt használjuk, amelyiknek az abszolút értéke 90° -nál nem nagyobb.

B1 Annak, aki ismeri az algebrai kongruencia fogalmát, megjegyezhetjük, hogy az irányított szög és az irányított hajlásszög mértéke nem egyetlen érték, hanem 360° , illetve 180° modulusra vonatkozó maradékosztály, s hogy a rájuk vonatkozó egyenletek ilyen modulusú kongruenciák.

B2 Ha az itt tárgyalt szögek mértékeire felírt egyenlőségekkel dolgozunk, ügyelni kell arra, hogy ezeket az egyenlőségeket szabad egész számmal szorozni, de osztani nem szabad. Ennek okára az előző megjegyzés világít rá. Ha irányított szögekre felírt egyenlőséget osztunk 2-vel, akkor az eredmény már csak 180° modulusra vonatkozó kongruenciának fogható fel.

3.6 Pótszögeknek (complementum) mondunk két szöget, ha összegük 90° . **Kiegészítő szögek** (supplementum) azok, amelyeknek összege 180° . Ezeket a megnevezéseket többnyire szögtartományokra használjuk, de alkalmazhatjuk forgásszögekre is.

Mellékszögeknek mondunk két szögtartományt, ha együttesen egy fél-síkot alkotnak. Így tehát a mellékszögek kiegészítő szögek. Egy-egy száruk egybeesik, és a másik kettő egy egyenest alkot.

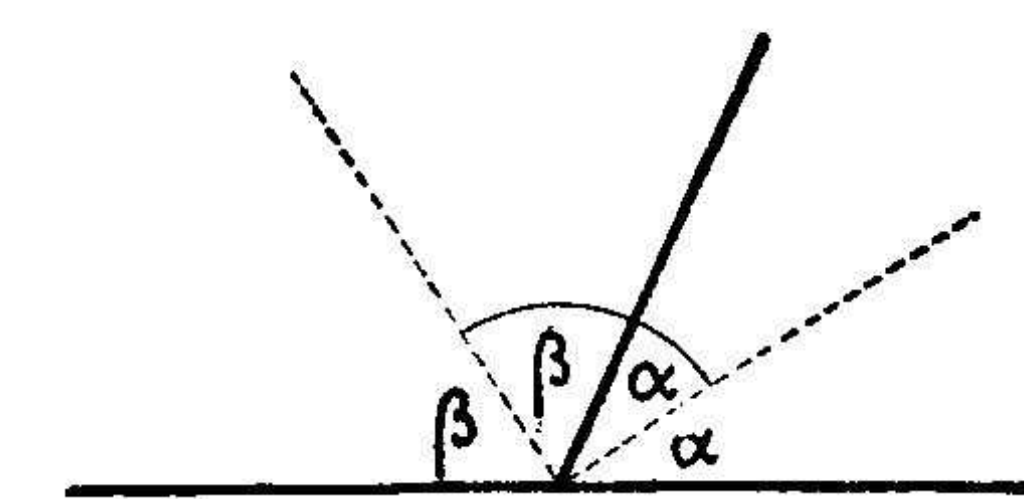
Két közös kezdőpontú félegyenes által határolt két szögtartomány összege teljesszög. E kettő kisebbike a két félegyenes *hajlásszöge* (szög). Egymást egyenessé kiegészítő félegyenesek hajlásszöge egyenesszög. Ugyanígy beszélhetünk közös ponton áthaladó irányított egyenesek hajlásszögéről is. Ez a közös pontból kiinduló, az egyeneseken pozitív irányban haladó félegyenesek hajlásszögét jelenti.

Csúcsszögeknek mondunk két konvex szögtartományt, ha száraik páronként egymás meghosszabbításai, ha tehát páronként egy-egy egyenest alkotnak. A csúcsszögek egyenlők, mert ugyanannak a szögnek mellékszögei.

Egy szögtartomány *szögfelezője* az a csúcából induló félegyenes, amelyik a szöget két egyenlő szögre vágja. A szögfelezőt tartalmazó egyenest *szögfelező egyenesnek* (szögfelező) mondjuk. Mellékszögek szögfelezői derékszöget alkotnak, hiszen szögüket két olyan szög összege adja, amelyek kétszeresének összege 180° (lásd 5. ábra).

Két metsző egyenes a síkot négy szögtartományra bontja. Ezek páronként egymás mellékszögei vagy csúcsszögei. A négy szög közül a kisebbeket a két egyenes *hajlásszögének* (szög) mondjuk. Ha a négy szög egyike derékszög, akkor mindegyik derékszög. Ilyenkor a hajlásszög derékszög, és a két egyenes *merőleges* egymásra.

A szóban forgó négy szög közül két-két csúcsszög szögfelezője egy-egy



5. ábra

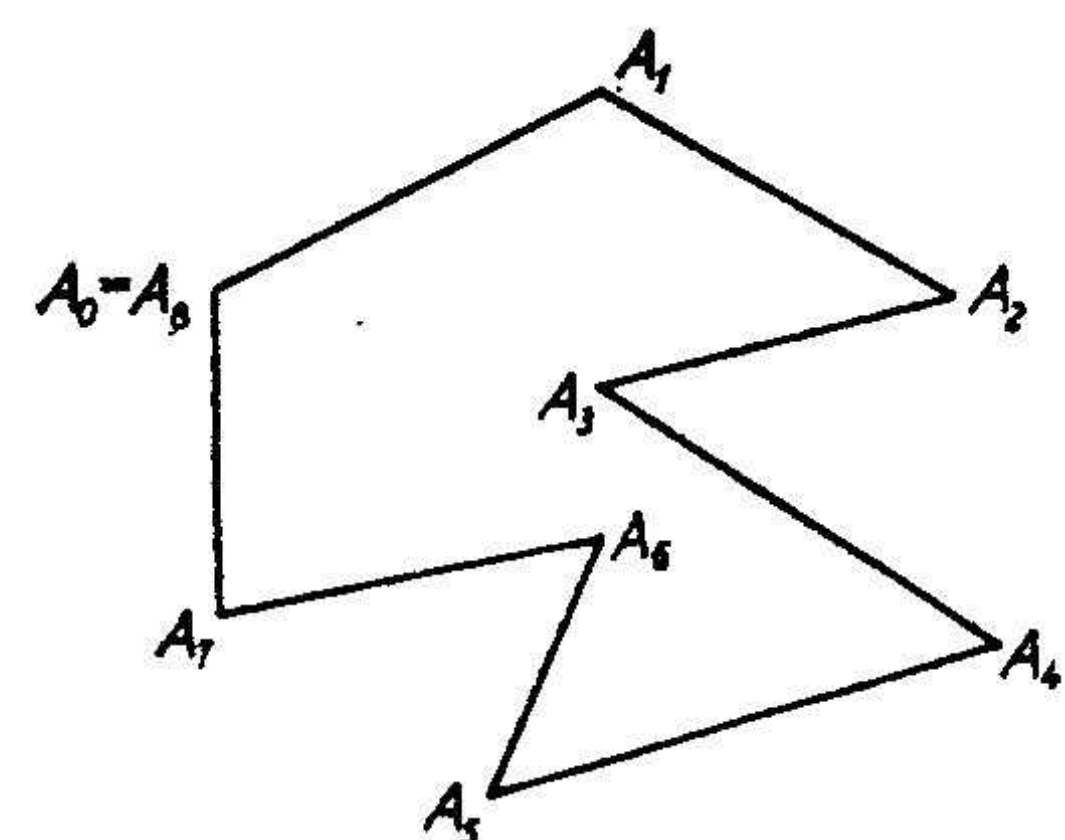
egyenest alkot, mind a négynek szögfelezője pedig két merőleges egyenest. Ezt a két egyenest a metsző egyenesek *szögfelező egyeneseinek* (szögfelező) mondjuk.

Itt említjük meg, hogy ha két olyan alakzatról beszélünk, amelyeknek a hajlásszögéről szó lehet, akkor a *ferde* szó azt jelöli, hogy a hajlásszög nem 0 és nem 90°, a *merőleges* szó pedig mindig azt, hogy a hajlásszög 90°.

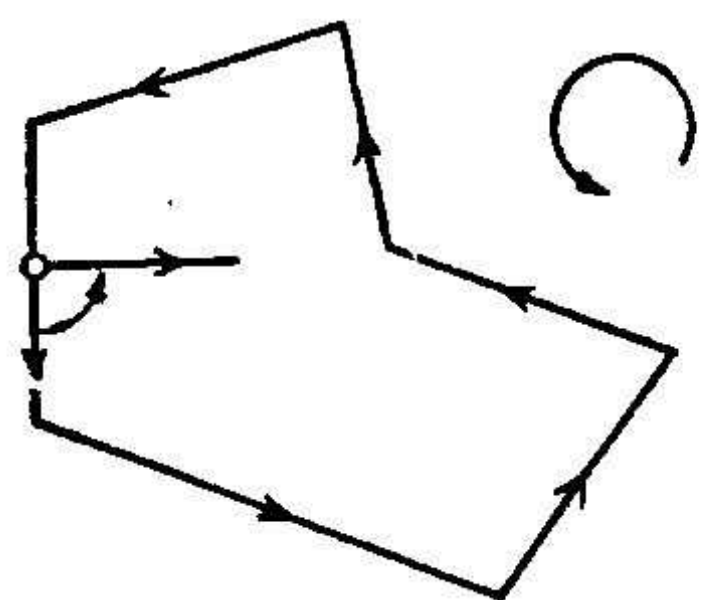
4. § Sokszög és poliéder

Egyenesszakaszokból összerakott vonalakkal, ilyen vonalak által határolt síkidomokkal és ilyen síkidomok által határolt testekkel ismerkedünk meg.

4.1 Egymáshoz csatlakozó $A_0A_1, A_1A_2, \dots, A_{n-1}A_n$ szakaszok egy $A_0A_1A_2 \dots A_n$ *töröttvonalat* (poligon) alkotnak. Ha az A_0, A_n pontok azonosak, a töröttvonal *zárt* (6. ábra), az ellenkező esetben pedig *nyílt*. A nyílt töröttvonalak



oldal irányával $+90^\circ$ szöget alkotó félegyenest veszünk fel (7. ábra). A sokszögtartomány vagy tartalmazza mindezeknek a félegyeneseinek kezdőszakaszát, vagy pedig nem tartalmazza egyiket sem. E két esetnek megfelelően a sokszögtartomány irányítását *pozitívnak* vagy *negatívnak* mondjuk, illetőleg *pozitív* vagy *negatív körüljárású* sokszögről beszélünk.



7. ábra

A sokszögtartományt és az irányított sokszögtartományt ugyanúgy adjuk meg, mint határukat. Elterjedt szokás, hogy a sokszögtartomány csúcsait pozitív körüljárás sorrendjében adják meg akkor is, ha nincs irányított sokszögről szó.

A1 Igen ritkán származik zavar abból, ha beszédünkben nem teszünk különbséget a sokszög vonal és az általa határolt sokszögtartomány között. Ezért mindkettőre a sokszög szót szokás használni. Mi is ehhez a szokáshoz igazodunk ebben a könyvben, hacsak nem kell félreértés lehetőségével számolnunk.

A2 Ha a síkot a szokott módon irányítjuk, a sokszög irányítása aszerint pozitív vagy negatív, amint a határon az irányításnak megfelelően járva körül a sokszögtartomány a bal oldalon vagy a jobb oldalon helyezkedik el.

B1 Kijelentettük, hogy a sokszög vonal a síkot két részre bontja fel. Kifejtjük, hogy ez szabatosabban mit jelent.

A sokszög vonal a síknak a sokszög vonalhoz nem tartozó pontjait két osztályba sorolja, amelyek rendelkeznek a következő három tulajdonsággal: 1. ha egy szakasz két különböző osztályba tartozó pontot köt össze, akkor van a sokszög vonallal közös pontja, 2. a sokszög vonal minden pontján áthalad olyan szakasz, amely a sokszög vonal más pontját nem tartalmazza, és két különböző osztályba tartozó pontot köt össze, 3. ugyanannak az osztálynak két pontja összeköthető olyan töröttvonalal, amelynek nincs közös pontja a sokszög vonallal.

Ha mind a két pontosztályt kiegészítjük a sokszög vonal pontjaival, a sokszög vonal által meghatározott két síkrészhez jutunk. Egyikük nem tartalmaz teljes egyenest, sőt félegyenest sem. Erről azt mondjuk, hogy a sokszög vonalon belül van.

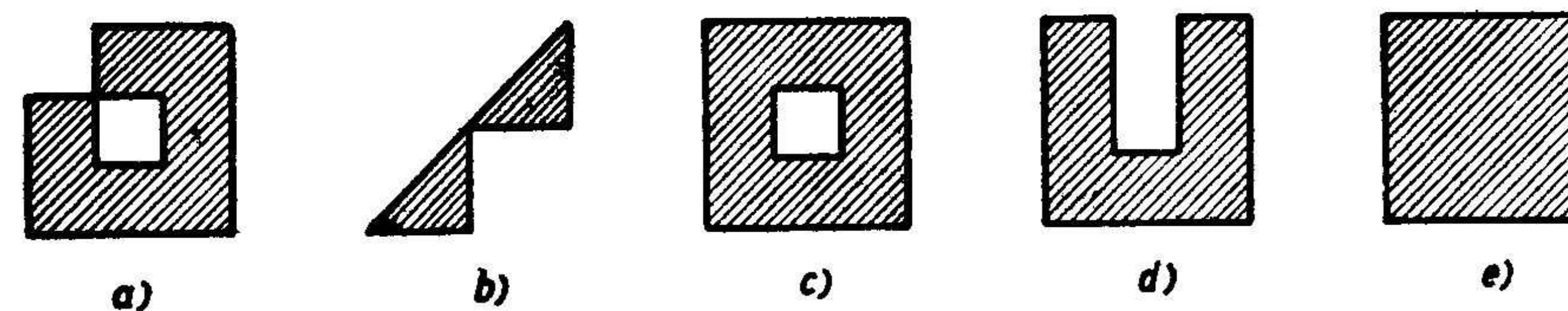
Megemlítjük, hogy a síknak egyenes és szög vonal által, valamint a térnek sík által való felbontásakor is olyan részek keletkeznek, amelyek rendelkeznek az itt felsorolt három tulajdonsággal.

B2 A sokszög szögének definícióját a következőképpen egészítjük ki és tesszük szabotossá: Két csatlakozó oldal egy szög vonalát szolgáltat, amely a síkot két szögtartományra bontja, sokszögtartományunkat pedig sokszögtartományokra vágja, de az is lehet, hogy épségben hagyja. Ilyen módon egyetlen olyan sokszögtartományhoz jutunk, amelynek csúcsai között szög vonalunk csúcsa is szerepel. Ezt a sokszögtartományt az említett két szögtartományoknak az egyike tartalmazza, s ez a szögtartomány adja sokszögünk szögét.

Szigorú tárgyalás során azt is bizonyítani kellene, hogy a sokszög egy oldalán nyugvó két szög ugyanarról az oldalról támaszkodik a sokszögoldalra, pontosabban azt, hogy azok a konvex szögtartományok, amelyeket a mondott két szög tartalmaz, s amelyeknek egyik szára a szóban forgó sokszögoldalt tartalmazza, az oldalegyenes által határolt ugyanabban a fél-síkban vannak.

4.4 Ha a sokszög vonallal határolt sokszögtartományok közül véges sokat egyesítünk, általánosabb értelemben vett *sokszöghöz* (sokszögtartomány, poligon) jutunk (8. ábra). Azt is mondhatjuk, hogy a sokszögtartomány a síknak véges sok szakasz által határolt, egyenest nem tartalmazó része, megengedve, hogy ez a síkrész egymással össze nem függő darabokból is állhasson.

Véges sok sokszög egyesítése révén mindig sokszöghöz jutunk. Közös belső ponttal rendelkező véges sok sokszög közös része általában sokszög. Ugyanezt a sokszög és félsík, valamint a sokszög és szögtartomány közös



8. ábra

részéről is elmondhatjuk. A sokszöget határoló szakaszok bármelyik pontjából kiindul a sokszög belsejében haladó szakasz, és kiindul a sokszögon kívül haladó szakasz is.

A sokszöget határoló szakaszok közül azokat, amelyek esetleg egymáshoz csatlakozva egy egyenesen helyezkednek el, egyetlen szakasszá egyesítjük. A sokszögtartomány *csúcsai* azok a pontok, amelyeket legalább két ilyen határoló szakasz tartalmaz. A határoló szakaszok mindegyikén két vagy több csúcs helyezkedik el, és ezek egy vagy több egymáshoz csatlakozó szakaszt határolnak. Ezek a szakaszok a sokszögtartomány *oldalai*. Minden csúcsban páros sok oldal találkozik.

A sokszögtartomány *összefüggő*, ha bármely két pontja összeköthető a sokszögtartományhoz tartozó töröttvonalal. Minden össze nem függő sokszögtartomány véges sok olyan összefüggő sokszögtartományból áll, amelyeknek páronként nincsen közös pontjuk. A sokszögtartomány *közönséges*, ha összefüggő és minden csúcsban két-két oldal találkozik. Közönséges sokszögtartomány szögeiről ugyanúgy beszélhetünk, ahogyan ezt az előző szakaszban tettük (lásd 4.3 B2).

Egy sokszögtartomány *egyszeresen összefüggő*, ha a sokszögtartományhoz tartozó minden olyan töröttvonal felbontja, amely határpontokat köt össze, és más határponton nem halad át. Az összefüggő, de nem egyszeresen összefüggő sokszögtartományt *többszörösen összefüggőnek* mondjuk.

Egy sokszögtartomány *egyszerű*, ha közönséges és egyszeresen összefüggő. Az előző szakasz ezekről szolt. Minden sokszögtartomány előállítható véges sok olyan egyszerű sokszögtartomány egyesítéseként, amelyeknek páronként csak határpontjaik lehetnek közösek.

Minden sokszög határa egy vagy több olyan sokszög vonalból áll, amelyeknek nincsenek közös szakaszaik. Közönséges sokszög esetében közös pontjaik sincsenek. Egyszerű sokszög határa egyetlen sokszög vonal.

A Nagyon ritkán fordul elő, hogy az egyszerű sokszögeken kívül más sokszögek is szerepeljenek. Ezért az egyszerű jelzőt többnyire elhagyjuk. Ha másfajta sokszögekre is gondolunk, akkor ezt külön hangsúlyozzuk.

B Ha a sokszögtartományt mint a sík véges sok szakasz által határolt, egyenest nem tartalmazó részét akarjuk definiálni, akkor előbb tisztázni kell, hogy egy síkbeli alakzatról és általa tartalmazott véges sok szakaszcól mikor mondjuk, hogy ezek a szakaszok az alakzatot határolják. Ez azt jelenti, hogy ha a síknak a szakaszokhoz nem tartozó pontjait két osztályba soroljuk, mégpedig az egyik osztályba az alakzathoz tartozó, a másikba az ahhoz nem tartozó pontokat soroljuk, akkor ez a két osztály rendelkezik a 4.3 B1-ben említett első két tulajdonsággal, ha bennük szakasz helyett töröttvonalat mondunk. Megemlítjük, hogy a sokszögtartomány egy egyenesből csak véges sok pontot és szakaszt tartalmazhat. Az ilyen pontok és az ilyen szakaszok végpontjai a tartományt határoló szakaszokon vannak.

4.5 Az olyan térrészt, amelyet véges sok sokszögtartomány határol, s amely teljes egyenest nem tartalmaz, *poliédernek* (poliédertest) nevezzük (lásd B1). A határoló sokszögtartományok együttesen *poliéderfelületet* (zárt poliéderfelület, poliéder) alkotnak.

Véges sok poliéder egyesítése mindig poliédert ad. Közös belső ponttal rendelkező véges sok poliéder közös része általában poliéder. Ugyanezt a poliéder és egy féltér közös részéről is elmondhatjuk. A poliédert határoló sokszögek bármely pontjából kiindul a poliéder belsejében haladó szakasz, és kiindul a poliéderen kívül haladó szakasz is.

A határoló sokszögtartományok síkjai a poliéder *lapsíkjai*. Ha a határoló sokszögtartományok között vannak egy lapsíkban elhelyezkedők és szakasz mentén csatlakozók, akkor ezeket egyetlen sokszögtartománnyá egyesítjük. Feltessük azt is, hogy ezek a sokszögtartományok mindannyian összefüggők. A poliéder *csúcsai* azok a pontok, amelyeket legalább három olyan határoló sokszögtartomány tartalmaz, amelyeknek síkjai nem haladnak át ugyanazon az egyenesen.

Azok a pontok, amelyeket legalább két határoló sokszögtartomány tartalmaz, a poliéder *égyenesein* elhelyezkedő szakaszokat alkotnak. Minden ilyen szakaszon két vagy több csúcs helyezkedik el, és ezek egy vagy több egymáshoz csatlakozó szakaszt határolnak. Ez utóbbi szakaszok a poliéder *élei*.

A poliédert határoló sokszögtartományok határa élekből áll, tartalmazhatnak azonban ezek a sokszögtartományok további éleket is. Lehetséges, hogy ezek az élek a sokszögtartományt több sokszögtartományra bontják fel (lásd B2). Az élek által tovább fel nem bontható határoló sokszögtartományok a poliéder *lapjai*.

Megállapíthatjuk, hogy a poliédert lapjai, lapjait élei és éleit csúcsai határolják. Minden él legalább két lap határán van rajta, és minden csúcsban legalább három él találkozik. Minden poliédernek legalább négy lapja és legalább négy csúcsa van.

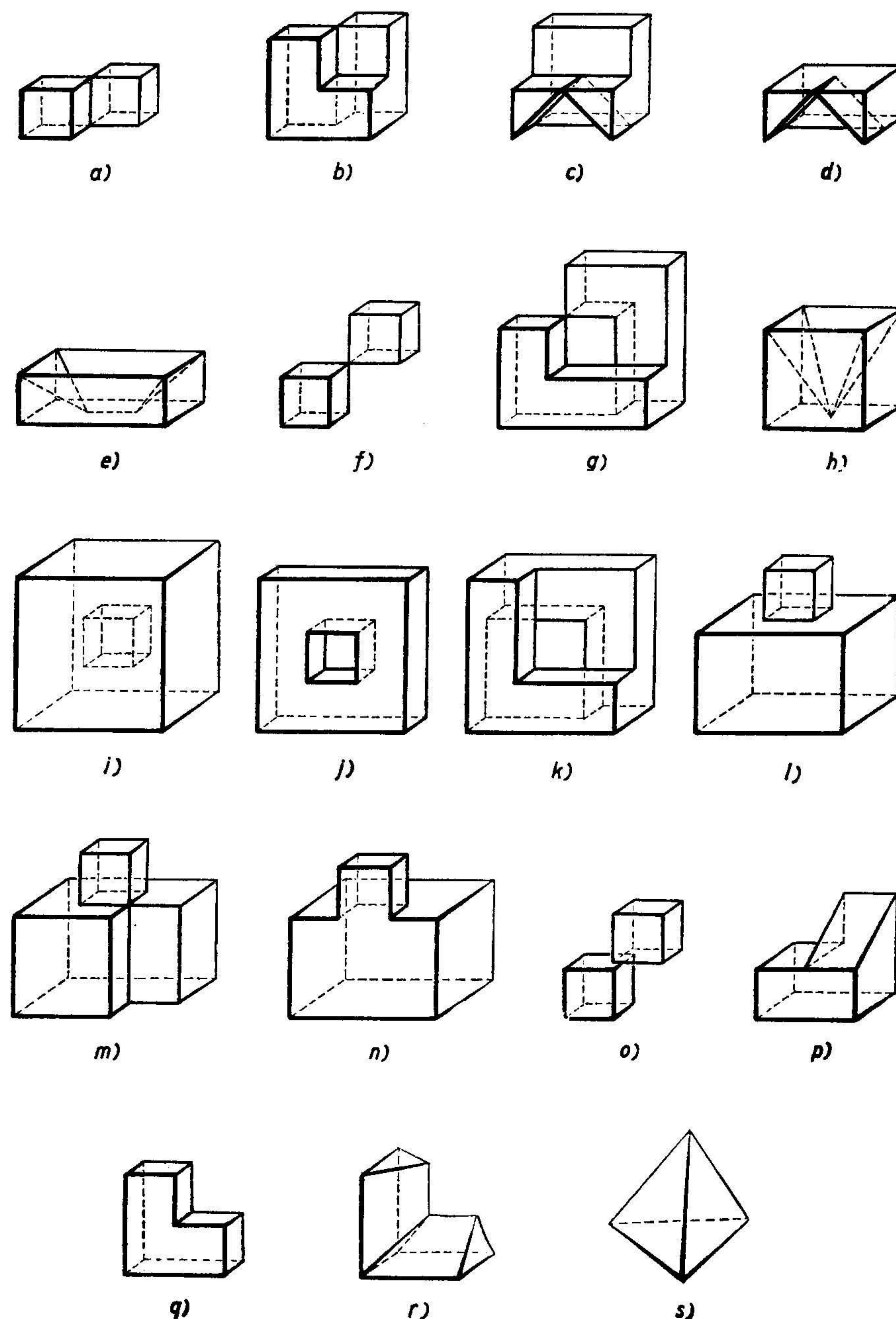
A poliéder csúcsait összekötő szakaszok vagy élek, vagy pedig *átlók* (diagonális). Ez utóbbiak között szerepelnek a lapok átlói, a *lapátlók*, s a többit *testátlónak* mondjuk. Egy testátló *belső átló*, ha a poliédertest tartalmazza, és csak a végpontjai vannak a poliéder felületén.

A poliéder *összefüggő*, ha a poliédertest bármely pontjától bármely pontjához eljuthatunk általa tartalmazott töröttvonalon. Minden össze nem függő poliéder véges sok olyan összefüggő poliéderből áll, amelyeknek páronként nincsen közös pontjuk.

A poliéder *közönséges*, ha összefüggő, és minden csúcsánál az azt tartalmazó lapok egyetlen ciklust alkotnak. Ez azt jelenti, hogy az ebből a csúcsból kiinduló éleknek van egy ciklikus sorrendje, ebben a sorrendben bármely két egymásra következő él egy lap határvonalán egymással szomszédos (lásd B3), és az így adódó lapok között minden olyan lap előfordul, amely tartalmazza a szóban forgó csúcsot. Ez a tulajdonság azt is magában foglalja, hogy minden élt két lap tartalmaz.

A poliéderfelület *összefüggő*, ha a poliéderfelület bármely két pontját összeköthetjük a poliéderfelülethez tartozó töröttvonalal. A poliéderfelület *egyszeresen összefüggő*, ha összefüggő és minden a poliéderfelületen elhelyezkedő sokszög vonal részekre bontja fel. A poliéderfelület *többszörösen összefüggő*, ha összefüggő, de nem egyszeresen összefüggő.

A poliéder *egyszerű*, ha közönséges, felülete egyszeresen összefüggő, és minden lapja egyszerű sokszög, tehát lapjai is egyszeresen összefüggők. Egy-



9. ábra

szerű poliéder bármely lapjától bármely lapjához eljuthatunk páronként élben csatlakozó lapokon át haladva. Az egyszerű poliéder élhálózata is összefüggő, azaz bármely két csúcsa összeköthető élekből álló töröttvonallal. Minden poliéder előállítható véges sok olyan egyszerű poliéder egyesítéseként, amelyeknek páronként csak felületükhöz tartozó pontjaik lehetnek közösek.

Ha egy közönséges poliéder felületét véges sok sokszögvonallal részekre bontjuk, a keletkező részeket *nyílt* (határolt) *poliéderfelületnek* nevezzük. Ha egyszerű poliéder felületét bontjuk fel egyetlen sokszögvonallal, akkor *egyszerű nyílt poliéderfelületek* keletkeznek.

A 9. ábra poliéderei mindannyian összefüggők. Az a) — e) poliédereknek van olyan élük, amelyet kettőnél több lap tartalmaz. Az a) — h) poliédereknek van olyan csúcsuk, hogy az azt tartalmazó lapok nem alkotnak egyetlen ciklust. Az i) — s) poliéderek közönségesek.

Az i) poliéder felülete nem összefüggő. A j), k) poliéderek felülete többszörösen összefüggő, de közülük csak a j) poliédernek van többszörösen összefüggő lapja. Az l), m) poliéderek felülete egyszeresen összefüggő, de nem minden lapjuk egyszerű sokszög. Az n) — s) poliéderek egyszerűek.

Az n), o) poliédereken van két olyan lap, amelyek két élben, illetőleg két csúcsban találkoznak. A p) poliéderen van két olyan él, amelyek egy egyenesen egymáshoz csatlakoznak. A q) — s) poliédereken az eddig említett rendellenességek egyike sem következik be.

Megemlítjük, hogy a q) és r) poliéderek nem konvexek, de közülük csak a q) poliédernek van konkáv lapja, s hogy az s) poliéder konvex (lásd 4.6).

B1 A poliéderek definiálásakor véges sok sokszögtartomány által határolt térrészről beszéltünk. Ez szabatosan a következőt jelenti (vö. 4.4 B):

Egy térbeli alakzatról és általa tartalmazott véges sok sokszögtartományról akkor mondjuk, hogy az alakzatot ezek a sokszögtartományok határolják, ha az a két osztály, amelyeknek egyikét az alakzatnak a sokszögtartományokhoz nem tartozó pontjai, másikat az alakzathoz nem tartozó pontok alkotják, rendelkezik a következő két tulajdonsággal: 1. ha egy szakasz két különböző osztályba tartozó pontot köt össze, akkor van a sokszögtartományokkal közös pontja, 2. a sokszögtartományok minden pontján áthalad olyan töröttvonal, amely a sokszögtartományok más pontját nem tartalmazza, és két különböző osztályhoz tartozó pontot köt össze.

Az így definiált térbeli alakzat akkor poliéder, ha nem tartalmaz egyenest. Megemlítjük, hogy a poliéder egy egyenesből csak véges sok pontot és szakaszt tartalmazhat. Az ilyen pontok és az ilyen szakaszok végpontjai a poliédert határoló sokszögtartományokon, a poliéder felületén vannak. Megemlíthetjük azt is, hogy a poliéder egy síkból csak véges sok pontot, (esetleg egymáshoz csatlakozó) szakaszt és sokszögtartományt tartalmazhat. Az ilyen pontok, szakaszok, valamint az ilyen sokszögtartományokat határoló sokszögvonalak a poliéder felületén vannak.

B2 A poliéder élei által határolt, a poliédert határoló sokszögtartományok úgy is tartalmazhatnak éleket, hogy a sokszögtartomány nem bontható fel ilyen élek által. Ezt a 9d és 9e ábra mutatja. Az is lehetséges, hogy a poliéder lapja tartalmaz a lap határvonalához nem tartozó csúcsot, amelyből a laphoz tartozó él nem indul ki, amint ezt a 9h ábrán láthatjuk.

B3 A közönséges poliéderek definíciójánál beszéltünk arról, hogy egy lap határvonalán két él szomszédos-e. Ezt pontosabban a következőképpen értjük: egy sokszög két oldala akkor szomszédos, ha egy csúcsban találkoznak, s ha a síkot az általuk meghatározott szög-vonal mentén felvágva a sokszögből olyan részsokszög is keletkezik, amely tartalmazza a szóban forgó oldalakat, de nem tartalmaz más olyan oldalt, amely a mondott két oldal közös pontjába fut.

A 9m ábra poliédere példa arra, hogy a most adott kiegészítésre szükség van. Ha minden poliéderlap közönséges sokszög, akkor viszont felesleges ez a kiegészítés, mert egy csúcsban találkozó két oldal mindig szomszédos a most mondott szigorúbb értelemben is.

4.6 Egy alakzat *konvex*, ha bármely két pontjának összekötő szakaszát is tartalmazza. Ha ez az alakzat nem minden pontpárjára áll, akkor az alakzat nem konvex. Nem konvex alakzatokra néha a *konkáv* jelzőt használjuk.

Konvex alakzatokra az eddig tárgyaltak közül a következő példákat említhetjük: pont, egyenes, félegyenes, szakasz, sík, félsík, egyenesszögnél nem nagyobb (konvex!) szögtartomány, háromszög, tér, féltér.

Konvex alakzatok közös része is konvex alakzat, hiszen a közös rész két pontjának az összekötő szakaszát a konvex alakzatok mindegyike tartalmazza. Ha egy konvex alakzatnak és egy egyenesnek több közös pontja van, akkor közös részük vagy egy szakasz (esetleg egyik vagy mindkét végpontja nélkül), vagy félegyenes (esetleg kezdőpontja nélkül), vagy pedig a teljes egyenes. Az így kapott szakaszok és félegyenesek határpontjai a konvex alakzat *határát* alkotják. Két határpont összekötő szakaszának vagy csak ez a két pontja tartozik a határhoz, vagy pedig minden pontja a határon van.

Megállapításaink egyaránt vonatkoznak a lineáris, a síkbeli és a térbeli konvex alakzatokra. A konvex lineáris alakzat csak pont, szakasz, félegyenes vagy maga az egyenes lehet.

A *konvex síkidom* olyan síkbeli konvex alakzat, amely nincs egy egyenesen. Minden konvex síkidom tartalmaz sokszögtartományt. Ha a konvex síkidom nem tartalmaz félegyenest, akkor határát *konvex zárt görbének* mondjuk.

A *konvex test* olyan térbeli konvex alakzat, amely nincs egy síkban. Minden konvex test tartalmaz poliédert. Ha a konvex test nem tartalmaz félegyenest, akkor határát *konvex zárt felületnek* mondjuk.

Bármelyik csoportba tartozik is a konvex alakzat, elmondhatjuk, hogy ha egy a határához nem tartozó pontját az egyenesnek, síknak, illetőleg térnek egy hozzá nem tartozó pontjával összekötjük, akkor olyan szakaszhhoz jutunk, amelynek egyetlen egy pontja van a konvex alakzat határán.

Egy adott alakzat *konvex burka* az a konvex alakzat, amely tartalmazza az adott alakzatot, és amelyet az adott alakzatot tartalmazó minden konvex alakzat tartalmaz. Minden alakzatnak egyetlenegy konvex burka van. Minden konvex alakzat saját magának a konvex burka. Ha több alakzat konvex burkáról beszélünk, az alakzatok egyesítésének a konvex burkára gondolunk. Ez az alakzatok konvex burkainak a konvex burkával azonos.

4.7 A sokszögek és a poliéderek közül a konvex sokszögek és a konvex poliéderek játsszák a legfontosabb szerepet.

Minden *konvex sokszög* egyszerű. Egy közönséges sokszög akkor és csak akkor konvex, ha minden szöge konvex. Konvex sokszög szögeinek mellékszögeit a sokszög *külső szögeinek* nevezzük, és ezekkel szembeállítva a szögeit *belső szögeknek* is mondjuk.

Egy közönséges sokszög akkor és csak akkor konvex, ha minden oldala az azt tartalmazó oldalegyenesnek és a sokszögnek a közös része, ha tehát egyetlen oldal meghosszabbításán sincs a sokszöghöz tartozó pont. A konvex sokszög azoknak az oldalegyenesek határolta félsíkoknak a közös része, amelyek tartalmazzák a konvex sokszöget.

A konvex sokszög átlói mindannyian belső átlók. Ha egy pont a konvex sokszögon kívül helyezkedik el, akkor található hozzá olyan egyenes, amely ezt a pontot a konvex sokszögtől elválasztja, és olyan is, amely rajta áthalad, és a konvex sokszöget nem éri. A konvex sokszög csúcsán át fektethető olyan egyenes, amelynek a konvex sokszöggel további közös pontja nincs.

Egy síkban, de nem egy egyenesen elhelyezkedő véges sok pont konvex burka konvex sokszög. Ennek a csúcsai mind szerepelnek a véges sok pont között. Minden konvex sokszög a saját csúcsainak a konvex burka.

Konkáv sokszög konvex burka olyan konvex sokszög, amelynek minden csúcsa csúcsa a konkáv sokszögnek is. Konkáv sokszög konvex burka egyben a konkáv sokszög csúcsainak is konvex burka.

A A sík véges sok pontjának a konvex burkához szemléletesen eljutunk, ha egy fonalat feszítünk köréjük. Ugyanígy juthatunk el egy konkáv sokszög konvex burkához is.

4.8 Minden konvex poliéder egyszerű. A konvex poliéder lapjai is konvex sokszögek.

Egy összefüggő poliéder akkor és csak akkor konvex, ha minden lapja az azt tartalmazó lapsíknak és a poliédernek a közös része, ha tehát egyetlen lapnak a síkjában sincs a poliéderhez tartozó s a laphoz nem tartozó pont. A konvex poliéder azoknak a lapsíkok határolta féltereknek a közös része, amelyek tartalmazzák a konvex poliédert.

A konvex poliéder testétől mindannyian belső átlók. A konvex poliéderen kívül elhelyezkedő ponthoz vagy egyeneshez található olyan sík, amely ezt a konvex poliédertől elválasztja, és olyan is, amely áthalad rajta és a konvex poliédert nem éri. A konvex poliéder csúcsán és élén át lehet olyan síkot fektetni, amelynek a konvex poliéderrel további közös pontja nincs.

Véges sok, nem egy síkban elhelyezkedő pont konvex burka konvex poliéder. Ennek minden csúcsa szerepel a véges sok pont között. Minden konvex poliéder a saját csúcsainak a konvex burka.

Konkáv poliéder konvex burka olyan konvex poliéder, amelynek minden csúcsa a konkáv poliédernek is csúcsa. Konkáv poliéder konvex burka egyben a konkáv poliéder csúcsainak a konvex burka is.

A A tér véges sok pontjának a konvex burkához szemléletesen eljutunk, ha rugalmas hátyát feszítünk köréjük. Ugyanígy szemléltethetjük egy konkáv poliéder konvex burkát is.

5. § Kör és gömb

A geometriában a kör és a gömb különlegesen fontos szerepet játszik. Itt csak az a célunk, hogy megismerkedjünk ezekkel az alakzatokkal, részletes tárgyalásukra majd később kerül sor. Az alapfogalmakat tárgyaló első fejezetben belül itt ismerkedünk meg utoljára újabb alakzatokkal. Ezt az alkalmat használjuk fel arra, hogy néhány olyan fogalmat és kifejezőmódot tisztázzunk, amelyek az alakzatokkal kapcsolatosak.

5.1 Ha olyan tulajdonságot adunk meg, amellyel pontok rendelkezhetnek, akkor beszélhetünk az ilyen tulajdonságú pontok összességéről, halmazáról vagy *mértani helyéről*. Ennek az alakzatnak minden pontja rendelkezik a megadott tulajdonsággal, más pont azonban nem. Mondjuk, hogy a mértani helyet ezek a pontok alkotják.

A kör (körvonal) a sík olyan pontjainak mértani helye, amelyek a sík egy megadott pontjától megadott (0-tól különböző) távolságra vannak. A kör

középpontja (centrum) az a pont, amelyiktől a kör pontjai ugyanakkora távolságra vannak. A kör *sugara* (rádiusz) ez a közös távolság, de ugyanígy nevezzük azokat a szakaszokat is, amelyek a középpontot a körvonal pontjaival összekötik.

A gömb (gömbfelület, szféra) a tér olyan pontjainak mértani helye, amelyek egy megadott ponttól megadott (0-tól különböző) távolságra vannak. A gömb *középpontja* (centrum) az a pont, amelyiktől a gömb pontjai egyenlő távolságra vannak. A gömb *sugara* (rádiusz) ez a közös távolság, de ugyanígy nevezzük azokat a szakaszokat is, amelyek a középpontot a gömbfelület pontjaival összekötik.

A kört is, meg a gömböt is egyértelműen meghatározza a középpontjuk és a sugaruk vagy pedig a középpontjuk és egy pontjuk. Ha a sugár hosszegységnyi, akkor *egységkörhöz* és *egységgömbhöz* jutunk.

A sík egy pontja a körvonalon *belül* vagy *kívül* van aszerint, amint a kör középpontjától mért távolsága a sugárnál kisebb vagy annál nagyobb. A körvonalon belül elhelyezkedő pontok a körvonal pontjaival együtt a körvonal által határolt *körlemez* (körlap, körtartomány, kör) alkotják.

Egy pont a gömbfelületen *belül* vagy *kívül* van aszerint, amint a gömb középponttól a sugárnál kisebb vagy annál nagyobb távolságra van. A gömbfelületen belül elhelyezkedő pontok a gömbfelület pontjaival együtt a gömbfelület által határolt *gömbtestet* (tömör gömb, gömb) alkotják.

A1 A mértani hely megnevezés általánosan elfogadott. Minden esetben megtehetjük azonban, hogy helyette pontok összességéről vagy ponthalmazról beszélünk.

Semmitmondó az olyan kijelentés, hogy pl. a kör mértani hely. Minden alakzat felfogható mértani helyként, hiszen mondani lehet: az alakzat azoknak a pontoknak mértani helye, amelyek az alakzathoz tartoznak.

A2 Csak nagyon ritkán származhatik zavar abból, hogy a körlemez is körnek, valamint a gömbtestet is gömbnek mondjuk. Ezt természetesen csak olyankor tesszük, amikor félreértés veszélyével nem kell számolnunk. Ha hangsúlyozni akarjuk, hogy nem a körlemezről vagy a gömbtestről van szó, akkor körvonalat vagy gömbfelületet mondhatunk.

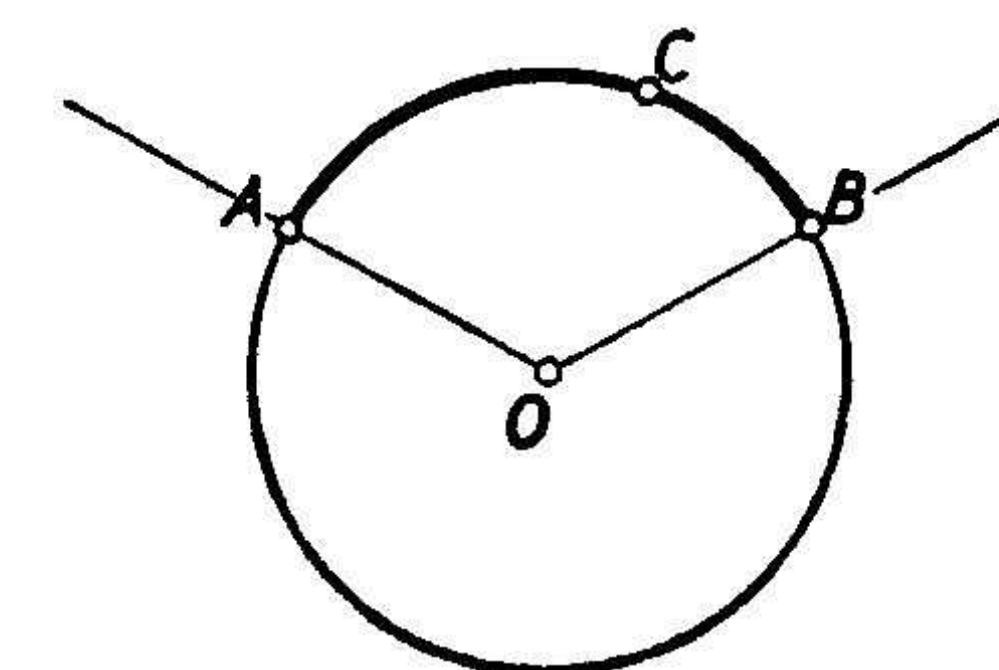
A3 A kör és a gömb definíálásakor megköveteltük, hogy a megadott sugár 0-tól különböző legyen. Ha sugárként nulltávolságot is megadhatnánk, akkor a kör és a gömb definíciója egyaránt pontot is szolgáltatna.

5.2 Ha egy szakasz két végpontjának egyike a körön belül, másika a körön kívül helyezkedik el, akkor ez a szakasz metszi a kört, a szakasznak van a körvonalhoz tartozó pontja.

A körvonalat két pontja két *körívre* (ív) bontja fel. E két körív közös része a körívet határoló két pont, a körívek két közös *végpontja*.

Az A, B végpontú körívet \widehat{AB} vagy AB jelöli, ha nyilvánvaló, hogy az ilyen végpontú körívek melyikéről van szó. Ha félreértés lehetséges, akkor megadjuk a körív egy közbenső pontját is, és pl. ACB körívről beszélünk (10. ábra).

Ha a kör síkjában elhelyezkedő körív végpontjainak egyike a körön belül, másika a körön kívül helyezkedik el, akkor ez a körív metszi a kört, a körívnek és a körvonalnak van közös pontja.



10. ábra

B1 Azt mondtuk, hogy a körvonalat két pontja két körívre bontja fel. Ezekhez úgy jutunk, hogy a két ponthoz vezető sugarak által meghatározott két szögtartományt és a körvonalnak ezekkel a szögtartományokkal közös részeit tekintjük.

B2 A körön belül és kívül elhelyezkedő pontokat összekötő szakasszal és körívvel kapcsolatban csak közös pont létezéséről szoltunk. Azért nem mondtuk ki azt is, hogy csak egy közös pont van, mert ezt a tényt a kör részletes tárgyalása során majd bebizonyítjuk.

Szólhattunk volna a gömbön belül és kívül elhelyezkedő pontokat összekötő szakaszoknak és köríveknek a gömbbel alkotott metszéspontjáról is. Ezt sem tettük, mert ezzel majd a gömb részletes tárgyalása során foglalkozunk.

Kör és szakasz, valamint kör és körív metszésére vonatkozó kijelentésünk bizonyítása viszont nem illelnek bele a következő fejezetek keretébe. Ha mi ezt a római számokkal jelzett axiómáinkra támaszkodva bizonyítani akarnók, akkor az egyenes folytonosságára kellene építenünk, és ezért X. axiómánk közvetítésével azt kellene kihasználnunk, hogy a valós számok között nincsen hézag.

A szóban forgó kijelentést *köraxiómának* mondják. A geometria java része felépíthető úgy, hogy X. axiómánk helyett csak a köraxiómát, valamint azt mondjuk ki, hogy ha h egy szakasz hossza, akkor bármely A kezdőpontú félegyenesen egyetlenegy olyan B pont található, amelynek A -tól mért távolsága h -val egyenlő.

Ennek a könyvnek a tárgyalása is javarészt ilyen módon a köraxiómára épül. Ezzel kapcsolatban megemlíti, hogy ha X. axiómánk szövegében „egy és csak egy” helyett „legfeljebb egy” áll, akkor olyan kijelentéshez jutunk, amely könnyen bizonyítható IX. axiómáinkra, valamint arra hivatkozva, hogy minden szakasznak van hossza. Ugyanígy azt is bizonyíthatnók, amit *Archimedes-féle axiómának* szokás nevezni, hogy ti. két adott szakasz egyikének mindig van olyan egész számú többszöröse, amely a másiknál nagyobb.

Felhívjuk a figyelmet minden olyan részletre, amelynek az alátámasztásához X. axiómáinkra is szükség van, amely tehát a folytonosságból a köraxiómánál többet használ fel. Ilyen volt eddig az, hogy minden valós szögmértékhez található szög, és mindaz, amit a konvex alakzatok határával kapcsolatban 4.6-ban mondtunk. Ennek következménye, hogy a köraxióma hatáskörén túlnyúlunk, valahányszor általában konvex síkidomokról vagy konvex testekről szoltunk, és határuk tulajdonságaira is építünk. Az ilyen részleteknél ezt a körülményt újból nem is hangsúlyozzuk.

Az elmondottak bőven indokolják, hogy a köraxióma szakaszokról szóló kijelentése miért szerepelt itt, jóllehet 4.6-nak a konvex síkidomok határáról szóló részlete azt magában foglalja.

5.3 Ebben és a következő szakaszban az alakzatokkal kapcsolatos néhány fogalmat és kifejezést tisztázunk. Ez a szakasz az alakzatok bizonyos fajtájáról, a tartományokról szolt.

a) Legyen adva valamilyen F alakzat, amelyet a következőkben *fundamentális alakzatnak* nevezünk. F szerepét ebben a könyvben a tér, sík, egyenes, poliéderfelület, sokszögvonallal, konvex zárt felület vagy konvex zárt görbe játssza. Bebizonyítjuk majd, hogy a gömbfelület és a körvonal az utóbb említett két alakzatformához tartozik. A felsorolásban ezért nem említettük ezeket.

Ha egy konvex poliéder az F alakzat A pontját a belsejében tartalmazza, akkor azt mondjuk, hogy F -nek a konvex poliéder belsejében elhelyezkedő pontjai az A pont *környezetét* alkotják (az F fundamentális alakzatban).

Tekintsük az F fundamentális alakzatban elhelyezkedő T alakzatot és a T által tartalmazott (esetleg üres) H alakzatot. Azt mondjuk, hogy T *tartomány* és H a *határa* (az F fundamentális alakzatban), ha a következő feltételek teljesülnek:

1. T minden H -hoz nem tartozó pontjának van olyan környezete, amely csak T -hez tartozó, de H -hoz nem tartozó pontokból áll.
2. H bármely pontjának bármely környezete tartalmaz T -hez nem tartozó pontot, valamint T -hez tartozó, de H -hoz nem tartozó pontot is.
3. F minden T -hez nem tartozó pontjának van olyan környezete, amely T egyetlen pontját sem tartalmazza.

Minthogy a H határ üres alakzat is lehet, maga az F fundamentális alakzat is tartomány. Minden más esetben a T tartományból újabb tartományhoz jutunk, ha F -ből T -nek H -hoz nem tartozó pontjait elhagyjuk. Ezt *kiegészítő* (komplementer) tartománynak nevezzük, s ennek határa változatlanul ugyanaz a H alakzat. Ezt az az észrevétel támasztja alá, hogy a fenti három követelményben T -nek H -hoz nem tartozó pontjai, valamint F -nek T -hez nem tartozó pontjai szimmetrikus szerepet játszanak.

Térbeli, síkbeli, lineáris és gömbi (szférikus) tartomány az olyan, amelynél a fundamentális alakzat rendre a tér, sík, egyenes vagy gömbfelület. A térbeli tartomány határát *felületének* (határfelület, peremfelület), síkbeli tartományét pedig *peremének* (határvonal, határgörbe) mondjuk. Ezeknek a határalakzatoknak a megnevezésére a felszín és kerület szavakat nem használjuk, mert velük majd más fogalmakat jelölünk.

Az eddig megismert alakzatok mindannyian tartományok, mégpedig a már említett fundamentális alakzatok valamelyikében. Térbeli tartomány a tér, feltér, poliéder, gömbtest és általában a konvex test. Egy sík által határolt két feltér egymás kiegészítő tartománya. Síkbeli tartomány a sík, félsík, szögtartomány, sokszögtartomány, körlemez és általában a konvex síkidom. A síknak egy egyenes által határolt két félsíkja, valamint ugyanaz által a szögvonallal határolt két szögtartománya egymás kiegészítője. Lineáris tartomány az egyenes, a félegyenes és az egyenesszakasz. A gömbi tartományok közül eddig csak maga a teljes gömbfelület szerepelt. A körvonalon mint fundamentális alakzat elhelyezkedő tartományok közül a teljes körvonalat, valamint a körívet említhetjük. Egy körnek két közös végpontú köríve egymás kiegészítő tartománya.

Az említett tartományok mindegyikénél megmondtuk, hogy mi a határa. Ellenőrizhetjük, hogy ez a most adott általános definícióval összhangban van. Ezt az ellenőrzést megkönnyíti, hogy a környezet, ha a fundamentális alakzat sík, a pontot tartalmazó nyílt konvex sokszöget, ha pedig egyenes, akkor a pontot tartalmazó nyílt szakaszt jelent.

b) Egy tartomány pontjai kétfélék: a határhoz tartozó *határpontok* és a határhoz nem tartozó *belső pontok*. A fundamentális alakzatnak a tartományhoz nem tartozó pontjait a tartomány *külső pontjainak* is mondjuk, bár ezek a tartománynak nem pontjai.

A belső pontok egyesítése a tartomány *belsejét*, külső pontjainak egyesítése a tartomány *külsejét* adja. Eszerint maga a tartomány a tartomány belsejéből és határából, a kiegészítő tartomány pedig a tartomány külsejéből és határából áll. A tartomány definíciója alapján kimondhatjuk, hogy a térbeli tartomány belseje a tartomány által tartalmazott poliéderek belsejének az egyesítése, külseje pedig a kiegészítő tartomány által tartalmazott poliéderek belsejének az egyesítése. Síkbeli és lineáris tartományról hasonlóan mondhatunk, csak poliéder helyett sokszögtartományt, illetve szakaszt kell mondanunk.

Definíciónk szerint a határ is a tartományhoz tartozik. Ezt úgy mondjuk, hogy mi a *zárt* tartományokat definiáltuk. Ha egy tartományból a határát elhagyjuk, *nyílt* tartományhoz jutunk. Ha nem mondjuk, hogy zárt vagy nyílt tartományról van-e szó, mindig a zárt tartományra gondolunk. Egy tartomány belseje és külseje egyaránt nyílt tartomány. Maga a fundamentális alakzat mint tartomány egyszerre nyílt is és zárt is.

Ha azt mondjuk, hogy egy alakzat a *tartományban van*, vagy hogy a tartományhoz tartozik, ez azt jelenti, hogy ezt az alakzatot a zárt tartomány tartalmazza. Ezzel szemben akkor mondjuk, hogy egy alakzat a *tartomány belsejében van*, vagy hogy a tartomány belsejéhez tartozik, ha ezt az alakzatot a tartomány belseje tartalmazza. Eszerint pl. a konvex sokszög átlói a sokszögben vannak, de nincsenek a sokszög belsejében, hiszen végpontjaik határpontok. Egy tartományról akkor mondjuk, hogy egy másik *tartomány belsejében halad*, vagy hogy egy másik tartomány belsejében terül el, ha a szóban forgó tartomány belsejét a másik tartomány belseje tartalmazza. Ez csak akkor következhetik be, ha a szóban forgó tartomány egésze is a másik tartományban van. Eszerint pl. egy sokszög csúcsait összekötő szakaszok közül azok a belső átlók, amelyek a sokszög belsejében haladnak.

c) A következőkben arról szoltunk, hogy tartományokból hogyan juthatunk újabb tartományokhoz.

Ha ismeretes a fundamentális alakzat, és tudjuk, hogy egy zárt tartomány mely pontokból áll, akkor ezek mindegyikéről már eldönthető, hogy belső pont-e vagy határpont. Ez attól függ, hogy van-e a pontnak a tartományban elhelyezkedő környezete, vagy nincs. Eszerint a zárt tartomány egyértelműen meghatározza a határát. Ugyanezt a nyílt tartományról is elmondhatjuk, hiszen határa a kiegészítő zárt tartomány határával azonos.

Ha ugyanabban a fundamentális alakzatban két tartomány van adva, akkor ezek *egyesítése* is tartomány. Ennek határát az imént mondottak alapján már meghatározhatjuk. Ez a határ a két egyesített tartomány határának egyesítésével nyert alakzatban van, de azzal nem feltétlenül azonos. Így pl. egy közös oldalon nyugvó két háromszög egyesítése olyan négyszög lehet, amelynek a volt közös oldal már nem oldala.

Többnyire olyan tartományok egyesítése szerepel, amelyek ugyanahhoz a fundamentális alakzathoz tartoznak, és közös pontjuk van ugyan, de közös belső pontjuk nincs. Közös pontjaikat tehát a két egyesített tartomány határának mindegyike tartalmazza. Ilyenkor

tartományok egymáshoz illesztéséről, összerakásáról beszélünk. Az előbb pl. arról volt szó, hogy két háromszög egymáshoz illesztésével négyszöget kaphatunk.

Ha ugyanabban a fundamentális alakzatban közös belső ponttal rendelkező két tartomány van adva, akkor belsejüknek a közös része nyílt tartomány. Tudjuk, hogy ez a határát már meghatározza. Az így kapott zárt tartományt az eredetileg megadott két tartomány közös tartományának nevezzük. Ennek a közös résznek a határa a két tartomány határának egyesítésével nyert alakzatnak része, de azzal nem feltétlenül azonos. Lehet azonos is, mint pl. egymást nem metsző egyenesek által határolt két félsík esetében. Két tartomány közös részéhez úgy is eljuthatunk, hogy kiegészítő tartományaik egyesítésének a kiegészítő tartományát képezzük.

Szó lehet két tartomány közös részeként adódó tartományról néha olyankor is, ha fundamentális alakzataik különböznek. Ilyen közös részről akkor beszélhetünk, ha a két tartományban van közös belső pontja, és új fundamentális alakzatul a két eredeti fundamentális alakzat közös részét választjuk. A szóban forgó tartományhoz úgy jutunk, hogy a közös belső pontokhoz csatoljuk az új fundamentális alakzatnak azokat a pontjait — ha vannak ilyenek —, amelyek maguk nem közös belső pontok, de minden környezetük tartalmaz közös belső pontot. Így juthatunk pl. a gömbtest síkmetszeteként körlemezhez és a gömbfelület síkmetszeteként körvonalhoz. Ide illik a körív 5.2 B1-ben adott definíciója is.

Ha ugyanabban a fundamentális alakzatban két olyan tartomány van megadva, amelyek egyike a másikat tartalmazza, de a két tartomány nem azonos, akkor szó lehet a nagyobbik tartományban és a kisebbik kiegészítő tartományának a közös részéről. Azt mondjuk, hogy ehhez jutunk, ha a nagyobbik tartományból a kisebbiket elvesszük, elhagyjuk vagy kivágjuk. Ha ezt a maradéktartományt az elvett tartományhoz illesztjük, az eredeti, nagyobbik tartományhoz jutunk.

A most ismertetett eljárásokat ismételtelen is alkalmazhatjuk. Beszélhetünk ezért véges sok tartomány egyesítéséről, összeillesztéséről, közös részéről és elvételéről. Hangsúlyozzuk, hogy mindig zárt tartományokkal dolgozunk, és zárt tartományokhoz jutunk.

d) Már szó volt arról, hogy a tartomány egyértelműen meghatározza a határát. A határ viszont nem határozza meg egyértelműen a tartományt. Nemcsak a kiegészítő tartományban ugyanaz a határa, hanem az is lehetséges, hogy három ugyanabban a fundamentális alakzatban elhelyezkedő tartományban közös a határa. Ez a körülmény óvatosságra int akkor, amikor tartományokat határuk megadásával akarunk jellemezni, vagy amikor kettévágásról akarunk beszélni.

Ha az F fundamentális alakzatban a H alakzat csak az egymást kiegészítő T_1 , T_2 tartományoknak a határa, akkor azt mondjuk, hogy H az F alakzatot kettévágja, erre a két tartományra bontja fel. Így bontja fel pl. az egyenes a síkot és a sík a teret.

Ha H az F fundamentális alakzatot a T_1 , T_2 tartományokra bontja fel, és F valamely T tartományának vannak ezekkel közös belső pontjai, akkor szó lehet T és T_1 , valamint T és T_2 közös tartományáról. Ezek egyesítése a teljes T tartományt adja. Ilyenkor azt mondjuk, hogy (F kettévágásakor) H a T tartományt erre a két tartományra bontja fel. Így vágja ketté pl. a sokszögtartományt a belsején áthaladó egyenes.

Hasonlót mondhatunk, ha nem F , hanem az általa tartalmazott F_1 fundamentális alakzat T tartományáról van szó. Ilyenkor azonban T és T_1 , valamint T és T_2 közös tartományának az egyesítése nem mindig adja a teljes T tartományt. Csak ha ez bekövetkezik, akkor mondjuk, hogy (F kettévágásakor) H a T tartományt az adódó két tartományra bontja fel. Így vágja ketté a konvex sokszöget kettévágó egyenes a határoló sokszögvonalat is. Nem mondhatunk azonban hasonlóan a konkáv sokszöget kettévágó oldalegyenesről.

Nincs szükség ilyen óvatosságra, ha nem szólnak arról, hogy H az F fundamentális alakzatot mely tartományokra vagy hány tartományra bontja fel, hanem csak arról, hogy felbontja-e, hogy tehát H határa-e F valamely tartományának. Így pl. a poliéderfelület egyszerű összefüggőségének 4.5-ben adott definíciója nem kívánja meg, hogy meggyőződjünk, kettévágásról van-e szó.

B* Rámutatunk arra, hogy ennek a szakasznak a kijelentései hogyan bizonyíthatók. Ezt azért tesszük, mert a szokásostól eltérő okoskodásokra is szükség van.

a) Először azt bizonyítjuk, hogy ha az A pont a P poliéder belsejében van, akkor P tartalmaz olyan konvex P_1 poliédert, amely az A pontot a belsejében tartalmazza.

Ilyen P_1 poliéderhez a következőképpen juthatunk: tekintsük P csúcsait, valamint az A pontot nem tartalmazó élegyeneseit és lapsíkjaikat. A csúcsokon és a tekintetbe vett élegyenesek

ken át fektessünk egy-egy olyan síkot, amely az A pontot nem tartalmazza. Mindezek a síkok, valamint a tekintetbe vett lapsíkok egy-egy olyan féltérrel határolnak, amely tartalmazza az A pontot. Állítjuk, hogy mindezeknek a féltereknek, valamint P konvex burkának a közös része egy kívánt tulajdonságú P_1 poliéder.

P_1 származtatásából nyomban következik ugyanis, hogy P_1 valóban poliéder, hogy konvex, s hogy A a belsejében van. Az is következik, hogy P_1 nem tartalmazza a belsejében P egyetlen csúcsát sem. P éleinek sincs pontjuk P_1 belsejében; vagy azért, mert az él a közös részt szolgáltató félterek valamelyikének a határán van, vagy pedig azért, mert az él P_1 belsejéhez nem tartozó csúcsokat köt össze, és egyenesének egy P_1 belsejéhez tartozó pontját, ti. az A pontot nem tartalmazza. Nincs P_1 belsejéhez tartozó pontjuk P lapjainak sem; vagy azért, mert a lap a közös részt szolgáltató félterek valamelyikének a határán van, vagy pedig azért, mert a lap élekből álló határvonalának nincs P_1 belsejéhez tartozó pontja, és a lap a síkjának egy P_1 belsejéhez tartozó pontját, ti. az A pontot nem tartalmazza. Minthogy P felületének ezek szerint nincs P_1 belsejéhez tartozó pontja, viszont P tartalmazza a P_1 belsejéhez tartozó A pontot, azért kell, hogy P tartalmazza a teljes P_1 poliédert. P_1 valóban rendelkezik tehát a megkívánt tulajdonságokkal.

Megemlítjük, hogy P_1 származtatásakor elég lett volna csak félterekről szólnunk. P konvex burkát a közös rész képzésekor csak azért szerepeltettük, hogy okoskodásunk logikai szerkezete egyszerűbb legyen.

b) Térbeli eredményünkhöz hasonlóan most azt bizonyítjuk, hogy ha az A pont a P sokszög belsejében van, akkor P tartalmaz olyan konvex P_1 sokszöget, amelynek A ugyancsak belső pontja.

Ilyen P_1 sokszöghöz a következőképpen jutunk: P csúcsain át az A ponton át nem haladó egyeneseket fektetünk. Ezek az egyenesek, valamint P -nek az A pontot nem tartalmazó oldal-egyenesei egy-egy az A pontot tartalmazó félsíkot határolnak. Mindezeknek a félsíkoknak, valamint P konvex burkának a közös része egy kívánt tulajdonságú P_1 sokszög.

P_1 származtatásából következik, hogy valóban sokszög, hogy konvex, s hogy A a belsejében van. P csúcsai nincsenek P_1 belsejében, hiszen mindegyik egy-egy P_1 -et tartalmazó félsík határán van. P oldalainak sincs pontjuk P_1 belsejében; vagy azért, mert az oldal a közös részt adó félsíkok valamelyikének a határán van, vagy pedig azért, mert az oldal P_1 belsejéhez nem tartozó csúcsokat köt össze, és egyenesének egy P_1 belsejéhez tartozó pontját, ti. az A pontot nem tartalmazza. Minthogy P határának nincs P_1 belsejéhez tartozó pontja, viszont P tartalmazza a P_1 belsejéhez tartozó A pontot, azért kell, hogy P tartalmazza a teljes P_1 sokszöget. P_1 valóban rendelkezik tehát az előírt tulajdonságokkal.

c) Rátérünk most annak bizonyítására, hogy az eddig megismert alakzatok valóban tartományok, s hogy amit határuknak mondtunk, az valóban a határuk. Azt kell ellenőriznünk, hogy a tartomány és a határ definíciójának három követelménye teljesül.

Poliéder: Belső pontjaira a) szerint 1. teljesül. Minthogy minden határponton áthalad olyan töröttvonal, amelyet a határpont a poliéder belsejében haladó és a poliédertől kívül haladó szakaszra bont, a határpontokra 2. teljesül. A külső pontokra 3. teljesül, mert a külső pontot belsejében tartalmazó konvex poliédertől a vizsgált poliéder külseje poliédertől vág ki, és ez a) szerint tartalmaz olyan konvex poliédert, amely a szóban forgó külső pontot a belsejében tartalmazza.

Mielőtt a poligon tárgyalására térnénk, rá kell mutatnunk arra, hogy ha a fundamentális alakzat sík, akkor a környezet valóban, mint már említettük, a pontot belsejében tartalmazó konvex sokszög belsejét jelenti. Ez azért igaz, mert egyrészt a konvex poliéder belső pontján áthaladó síknak a poliéderhez tartozó pontjai sokszöget alkotnak, másrészt bármely síkbeli konvex sokszög így származtatható, hiszen a sokszögnek és ezt belső pontban döfő szakasznak a konvex burka megfelelő poliédert ad.

Sokszög: A poliéderről mondottakat elismételhetjük azzal a különbséggel, hogy a) helyett b)-re hivatkozunk.

Konvex síkidom: Egy belső ponton át két olyan szakaszt fektethetünk, amelyek a síkidomban vannak. Ezek konvex burka olyan sokszög, amely biztosítja, hogy 1. teljesül. Minden határponton áthalad olyan szakasz, amelyet a határpont a síkidomon belül és rajta kívül haladó szakaszra bont fel. Ebből következik, hogy 2. is teljesül. Ha P a síkidom kívül van, akkor egy Q belső ponttal összekötve a határvonalat A -ban metsző szakaszt kapunk. A Q ponton áthaladó és a PQ egyenestől különböző egyenesen olyan Q_1Q_2 szakaszt vehetünk fel, amelyet a síkidom tartalmaz, s amely áthalad a Q ponton. A Q_1A , Q_2A szakaszok meghosszabbításai olyan A csúcsú konvex szögtartományt határolnak, amely a P pontot a belsejében tartalmazza,

s amelynek nincs a síkidom belsejéhez tartozó pontja. Ez abból következik, hogy a szögtartomány minden pontja egy olyan szakasz meghosszabbításán van, amely a Q_1Q_2 szakasz egy pontjából az A ponthoz vezet. Minthogy a szóban forgó szögtartomány is konvex síkidom, az 1. teljesüléséről mondtak értelmében a P pontot belsejében a tartalmazó konvex sokszöget tartalmaz. Ebből következik, hogy konvex síkidomunkra 3. is teljesül.

Konvex test: A konvex síkidomról mondtakhoz hasonlóan okoskodhatunk. Eltérés ott mutatkozik, hogy 1. igazolásakor két szakasz helyett három nem egysíkú szakaszból kell szólni, s hogy 3. igazolásakor a Q ponton áthaladó Q_1Q_2 szakasz helyett a Q pontot belsejében tartalmazó $Q_1Q_2Q_3\Delta$ -et kell bevezetni. Ennek a háromszögnek az oldalain és az A ponton át fektetett síkok egy-egy a P pontot belsejében tartalmazó féltérrel határolnak. Ennek a három féltérnek a közös része játssza most azt a szerepet, amit a konvex síkidom esetében egy szögtartomány játszott. Ennek a közös résznek minden pontja ugyanis egy olyan szakasz meghosszabbításán van, amely a $Q_1Q_2Q_3\Delta$ egy pontjából az A ponthoz vezet, s ezért az említett közös rész egyetlen pontja sincs konvex testünknek a belsejében.

Nem kell külön szólnunk a féltérrel, mert az is konvex test, valamint a félsíkról és konvex szögtartományról, mert ezek konvex síkidomok. Még kevésbé kell szólnunk a térről és a síkról, valamint a gömbfelületről, a körvonalról és az egyenesről, mert maga a fundamentális alakzat mindig olyan tartomány, amelynek nincs határpontja. A gömbtestről és a körlemeztől azért nem szoltunk, mert majd látjuk, hogy ezek is konvex alakzatok. A konkáv szögtartománynál elég arra hivatkoznunk, hogy az egy konvex szögtartomány kiegészítő tartománya.

Lineáris alakzatok vizsgálatáról jogosan mondhatjuk, hogy egy pontnak a környezete a pontot tartalmazó nyílt szakaszt jelent, mert konvex poliéder belsején áthaladó egyenesnek a poliéder belsejéhez tartozó pontjai nyílt szakaszt alkotnak, és így minden nyílt szakasz származtatható. Ilyen módon a félegyenes és a szakasz tartományjellege közvetlenül belátható.

Egyedül a körív maradt ki a már bevezetett alakzatok közül. Ezt a hiányt rövidesen pótoljuk (lásd f).

d) Egy rögzített fundamentális alakzatban elhelyezkedő tartományokból újabb tartományokhoz vezető eljárások közül itt csak az egyesítéssel kapott tartományról szoltunk, mert a többi eljárás (az egymáshoz illesztés, a közös rész képzése és az elvétel) az egyesítésre vezethető vissza.

Jelölje tehát T az F fundamentális alakzatban elhelyezkedő zárt T_1, T_2 tartományok egyesítését. T -nek azok a pontjai, amelyeknek nincs T által tartalmazott környezetük az esetleg üres H alakzatot alkotják. Azt kell belátnunk, hogy T és H rendelkezik a tartomány és a határ definíciójában szereplő három követelménnyel. Az 1. követelmény H megválasztása miatt teljesül. A 2. követelmény egyik része azért teljesül, mert H pontjának környezete H megválasztása miatt tartalmaz T -hez nem tartozó pontot. H minden pontja a T_1, T_2 tartományok valamelyikének a határán van, hiszen a tartományok belső pontjai szükségképpen belső pontjai T -nek is. Ebből következik, hogy H pontjának környezete tartalmaz T_1 vagy T_2 belsejéhez tartozó pontot, tehát T belsejéhez tartozó pontot is. Eszerint a 2. követelmény másik része is teljesül. Minden T -hez nem tartozó pont a T_1, T_2 tartományok mindegyikének külső pontja, van tehát T_1 pontjait nem tartalmazó, valamint T_2 pontjait nem tartalmazó környezet. E két környezetet szolgáltató konvex poliéder közös része ugyancsak konvex poliéder, s az általa szolgáltatott környezet 3. teljesülését biztosítja.

e) Különböző fundamentális alakzatokban elhelyezkedő tartományok közös részének képzéséről szoltunk most. Tárgyalásunk felőleli azt a már elintézett esetet is, amikor a két fundamentális alakzat azonos.

Tekintsük az F_1, F_2 fundamentális alakzatokban elhelyezkedő T_1, T_2 tartományokat. Jelölje B_1 és B_2 ezek belsejét. Az F_1, F_2 alakzatok közös pontjai az F alakzatot, a B_1, B_2 alakzatoké pedig a B^* alakzatot szolgáltatják. Feltesszük, hogy B^* nem üres, tehát F sem üres, ugyanis csak ebben az esetben beszélünk a T_1, T_2 tartományok közös részéről. T -vel jelöljük F pontjai közül azoknak az összességét, amelyeknek az F fundamentális alakzathoz tartozó minden környezete tartalmaz B^* -hoz tartozó pontot is. B -vel jelöljük T pontjai közül azoknak az összességét, amelyeknek az F fundamentális tartományban van T által tartalmazott környezetük. Állítjuk, hogy T zárt tartomány, melynek B a belseje. Ezt a tartományt mondjuk a T_1, T_2 tartományok közös részének.

A bizonyítást két megjegyzéssel készítjük elő. Először azt bizonyítjuk, hogy B^* minden pontja B -hez tartozik. Evégett meggondoljuk, hogy B^* bármely pontja egy-egy olyan konvex poliéder belsejében van, amelynek belsejében F_1 -nek csak B_1 -hez tartozó pontjai, illetőleg

F_2 -nek csak B_2 -hez tartozó pontjai vannak. A két poliéder közös részében ezért F -nek csak olyan pontjai lehetnek, amelyeket B_1 és B_2 mindegyike tartalmaz, amelyek tehát B^* -hoz és egyben a B^* -ot tartalmazó T -hez tartoznak. Ez B megválasztása miatt azt jelenti, hogy B^* kiszemelt pontja valóban B -ben van.

Második előkészítő megjegyzésünk, hogy ha F valamely pontjának egy környezete nem tartalmaz B^* -hoz tartozó pontot, akkor nem tartalmaz T -hez tartozót sem. Ez T megválasztására való tekintettel azt jelenti, hogy ha egy poliéder belseje nem tartalmaz B^* -hoz tartozó pontot, akkor e poliéder minden belső pontjának van B^* pontjait nem tartalmazó környezete. Nyilvánvaló, hogy ez igaz, hiszen maga a szóban forgó poliéder ilyen környezetet szab meg.

Rátérünk most állításunk bizonyítására. Azt kell igazolnunk, hogy T és B eleget tesz annak a három követelménynek, amelyet egy tartománynak és belsejének teljesítenie kell. Az 1. követelmény B megválasztása miatt teljesül. Tekintsük T valamely B -hez nem tartozó pontjának egy környezetét. Ez a környezet T megválasztása miatt tartalmaz B^* -hoz tartozó pontot, első előkészítő megjegyzésünk szerint tartalmaz tehát B -hez tartozót is. A szóban forgó környezetnek B megválasztása miatt kell azonban T -hez nem tartozó pontot is tartalmaznia, mert különben B -hez tartozó pont környezetéről volna szó. Ezek szerint 2. is teljesül. A T -hez nem tartozó pontoknak T megválasztása miatt van B^* pontjait nem tartalmazó környezetük, második előkészítő megjegyzésünk szerint van tehát T pontjait nem tartalmazó környezetük, s ez azt jelenti, hogy 3. is teljesül.

f) Hangsúlyozzuk hogy különbséget kell tenni a T_1, T_2 tartományok közös pontjaiból álló T^* alakzat (közös rész, metszet), valamint a közös részükként definiált T tartomány (közös tartomány, metszettartomány) között. A kettő különbözik pl. akkor, ha egy háromszög-vonalnak és egyik szögének mint szögtartománynak a közös részéről van szó. T^* mindig tartalmazza a T tartományt, hiszen T valamely pontjának minden környezete tartalmazza T_1 és T_2 közös belső pontját, és ezért T pontja nem lehet sem T_1 -nek, sem T_2 -nek külső pontja, tehát T^* -hoz tartozik. e)-ből kiolvasható, hogy T^* csak akkor azonos T -vel, ha T^* minden pontjának minden környezetében van T_1 -nek és T_2 -nek közös belső pontja. Ez a helyzet pl. akkor, ha egy körvonalnak és két sugara által meghatározott szögtartománynak a közös részét képezzük, tehát a körív származtatásakor.

Felhívjuk a figyelmet arra, hogy B^* és B nem mindig azonos. Példát kapunk erre, ha egy félsíknak és egy olyan háromszög-vonalnak a közös részét képezzük, amelynek egyik csúcsa a félsík határán, másik két csúcsa a félsík belsejében helyezkedik el. B^* és B csak akkor azonos, ha T^* minden B^* -hoz nem tartozó pontjának minden környezetében van F -nek olyan pontja, amely nem tartozik T -hez. Ezt B definíciójára való tekintettel, valamint azért mondhattuk, mert B pontjai T -hez, tehát egyben T^* -hoz is tartoznak. Azt is megállapíthatjuk, hogy ha a mondott feltétel teljesül, akkor T határát azok a pontjai alkotják, amelyek a T_1, T_2 tartományok határának egyesítéséhez tartoznak. A szóban forgó feltétel teljesül pl. akkor, ha ugyanabban a fundamentális alakzatban elhelyezkedő tartományokról van szó, valamint a körív származtatásakor. Miután már az imént beláttuk, hogy a körív is tartomány, most igazoltuk, hogy határát valóban az a két pont alkotja, amelyeket végpontjainak mondtunk.

Megjegyezzük, hogy metszettartománynak mást is mondhattunk volna. Ha pl. T^* -nak olyan pontjait tekintjük, amelyeknek F -ben van T^* -hoz tartozó környezetük, akkor egy nyílt tartományhoz jutunk, amely T -vel nem feltétlenül azonos zárt tartományhoz vezet.

A fundamentális alakzatra vonatkozólag semmiféle megszorítást nem tettünk. Felőleli tárgyalásunk ezért még azt az esetet is, amikor a fundamentális alakzat egyetlen pont. Ezen a fundamentális alakzaton magát a pontot is tartománynak kell mondanunk. Ilyen metszettartomány pl. két szakasz metszéspontja is.

g) A tartomány belsejére vonatkozó néhány észrevétellel foglalkozunk.

Először is azt említjük, hogy ugyanazon a fundamentális alakzaton belül egy T_1 tartomány akkor és csak akkor tartalmaz egy T_2 tartományt, ha T_1 belseje tartalmazza T_2 belsejét. Ha ugyanis T_2 a T_1 -ben van, akkor T_2 belső pontja nem lehet T_1 határán, hiszen ez esetben nem volna T_1 által tartalmazott környezete, tehát T_2 által tartalmazott sem. Ha viszont T_2 belseje T_1 belsejében van, akkor T_2 határpontja nem lehet T_1 külső pontja, hiszen ez esetben volna olyan környezete, amely nem tartalmazza T_1 pontjait, tehát T_2 egyetlen belső pontját sem.

Egy térbeli tartomány belseje által tartalmazott nyílt poliéderek egyesítése a térbeli tartomány belsejével azonos, hiszen a belső pontokra vonatkozó 1. követelményünkéből adódik, hogy ez még konvex poliéderekre is igaz. Az előző bekezdés alapján kimondhatjuk tehát,

hogy a térbeli tartomány által tartalmazott poliéderek belsejének az egyesítése ugyancsak a térbeli tartomány belsejét adja.

Egy P konvex poliéder belső pontját tartalmazza olyan konvex poliéder, amely P belsejében van. Ilyen konvex poliéderhez jutunk, ha a pontot P csúcsaival összekötő szakaszokon egy-egy belső pontot választunk, és ezek konvex burkát képezzük. Ebből következik, hogy egy térbeli tartomány belsejéhez jutunk akkor is, ha a térbeli tartomány belsejében elhelyezkedő zárt poliédereket egyesítjük.

A térbeli tartományról most mondottakat természetesen síkbeli tartományokra is elismételhetjük, ha poliéder helyett mindenütt sokszöget mondunk.

h) A kettévágásról mondottakhoz fűzünk néhány kiegészítést.

Ha fundamentális alakzatul három közös kezdőpontú félegyenesből álló alakzatot választunk, akkor megállapíthatjuk, hogy a közös kezdőpont a fundamentális alakzat kettőnél több tartományának a határa. Csak megemlíthetjük, hogy akkor is megadható — bár jóval bonyolultabban — ilyen példa, ha fundamentális alakzatul a síkot választjuk.

Nem lép fel ilyen bonyodalom akkor, ha az F fundamentális alakzat olyan T tartományának H határából indulunk ki, amelynek a belseje és a külseje is rendelkezik azzal a tulajdonsággal, hogy bármely két pontja összeköthető általa tartalmazott töröttvonalal. Elég ehhez belátnunk, hogy ha az AB szakasznak nincs H -val közös pontja, akkor H nem lehet olyan tartomány határa, amelyhez A hozzátartozik, de B nem. Ebből a töröttvonalal való összeköthetőség alapján következik ugyanis, hogy T belső pontjai és külső pontjai egyaránt csak egy-egy H határu tartományban lehetnek, hogy tehát a T tartományon és kiegészítő tartományán kívül más H határu tartomány nincs.

Az AB szakaszra vonatkozó állításunk bizonyítása végett tegyük fel, hogy a H határu T_1 tartomány csak az A pontot tartalmazza, a B pontot pedig nem. A X axiómákra támaszkodva megállapíthatjuk, hogy AB tartalmaz egy olyan maximális AC szakaszt, amelynek minden belső pontja T_1 belsejében van. A C pont nem lehet T_1 belsejében, hiszen akkor egy környezete is T_1 -hez tartoznék, és AC nem volna maximális. C nem tartozhatik azonban T_1 külsejéhez sem, mert akkor C egy környezete is T_1 külsejéhez tartoznék, tehát AC belseje tartalmazna T_1 belsejéhez nem tartozó pontot. Ezek szerint C csak T_1 határához tartozhatik, s ez ellentmond annak a feltevésünknek, hogy az AB szakasznak nincs T_1 határához tartozó pontja. Ez az ellentmondás bizonyítja, hogy H valóban kettévágja a fundamentális alakzatot. Jogosan mondhattuk tehát, hogy pl. az egyenes kettévágja a síkot és a sík a teret.

Bebizonyítjuk még azt az állításunkat, hogy ha H az F fundamentális alakzatot a T_1 , T_2 tartományokra vágja ketté, akkor F valamely T tartományának T_1 -gyel és T_2 -vel alkotott közös tartományát egyesítve a T tartományt kapjuk meg. Tegyük fel, hogy T egy P pontja nem tartozik a két tartomány egyikéhez sem. Van akkor P -nek olyan környezete, amelynek nincs közös pontja az egyik közös tartománnyal, és olyan is, amelynek nincs közös pontja a másikkal. E két környezet K_P közös része P -nek olyan környezete, amelynek T belsejéhez tartozó pontjai nem tartoznak sem T_1 , sem T_2 belsejéhez. Minthogy P a T tartománynak pontja, K_P tartalmaz T belsejéhez tartozó A pontot és ennek T belsejéhez tartozó K_A környezetét. Az imént mondottak miatt A sem T_1 , sem T_2 belsejéhez nem tartozhatik, tehát közös H határukon van. A határpontok tulajdonsága folytán a K_A környezet tartalmaz tehát T_1 belsejéhez tartozó pontot, és így K_P mégiscsak tartalmaz T és T_1 belsejéhez egyaránt hozzátartozó pontot. Ez az ellentmondás eredeti állításunkat bizonyítja.

5.4 Mi csak olyan alakzatokkal foglalkozunk ebben a könyvben, amelyet pontosan meghatározunk. Ezek az alakzatok mindannyian valamely megadott fundamentális alakzatban elhelyezkedő tartományok lesznek. Néha célszerűnek bizonyul mégis, hogy mondanivalónkat ne korlátozzuk az alakzatoknak valamilyen szűkebb körére, hanem tetszőleges alakzatokról szólunk. Tetszőleges alakzatokból indultunk ki 4.6-ban is. Az alábbiakban tetszőleges alakzatokkal kapcsolatos néhány elnevezésről szólunk.

Egy alakzat akkor *korlátos*, ha van azt tartalmazó konvex poliéder. Síkbeli alakzatok esetében konvex poliéder helyett konvex sokszöget, lineáris alakzatok esetében pedig szakaszt mondhatunk. Nem korlátos alakzatra azt is mondjuk, hogy végtelenbe nyúlik.

Egy alakzat akkor *poligonálisan összefüggő*, ha bármely két pontja összeköthető az alakzathoz tartozó töröttvonalal. Minden konvex alakzat poligonálisan összefüggő.

A *síkidom* és a *test* (téridom) szavakat rendszeren korlátos síkbeli, illetőleg térbeli tartományok megjelölésére, sőt többnyire poligonálisan összefüggő tartományokra használjuk. Előfordul azonban, hogy ezeket a megnevezéseket használjuk, és nem mondjuk meg,

milyen alakzatokra vonatkozik a tárgyalás. Ilyenkor a síkidom tetszőleges síkbeli alakzatot, a test pedig tetszőleges térbeli alakzatot jelent. Ha azonban konvex síkidomról vagy konvex testről van szó, akkor 4.6 definíciójához igazodunk.

Bármely síkidom vagy test *belső pontjainak* azokat a pontokat nevezzük, amelyeknek van a síkidomhoz tartozó síkbeli környezetük, illetőleg a testhez tartozó térbeli környezetük. A belső pontok egyesítése a síkidom, illetőleg test *belseje*. Különbséget teszünk tehát a síkidom vagy a test által tartalmazott, valamint a belsejükben elhelyezkedő alakzatok között (vö. 5.3b).

B1 A korlátosság definíciójával kapcsolatban megemlíthetjük, hogy a definícióban zárt konvex poliéder helyett egyaránt mondhatunk nyílt konvex poliédert, zárt poliédert vagy nyílt poliédert. Ennek alátámasztására elég megemlítenünk, hogy minden poliéder a konvex burkában van, amely konvex poliéder, s hogy minden konvex poliéderhez található egy ezt belsejében tartalmazó konvex poliéder. Ez utóbbihoz pl. úgy juthatunk, hogy az adott konvex poliéder minden élének mindegyik meghosszabbításán egy-egy pontot veszünk fel, és ezeknek a pontoknak a konvex burkát képezzük.

Beláthatjuk ilyen módon, hogy egy síkidom akkor és csak akkor korlátos, ha van azt tartalmazó zárt konvex sokszög, nyílt konvex sokszög, zárt sokszög vagy nyílt sokszög. Elég ehhez arra hivatkoznunk, hogy nyílt konvex poliéder síkmetszete nyílt konvex sokszög, s hogy bármely sokszöghöz található azt tartalmazó konvex poliéder, hiszen a sokszögnek és ezt belső pontban dőfő szakasznak a konvex burka ilyen.

B2 Ezen a helyen még nem bizonyíthatjuk be, hogy minden poliéderhez található általa tartalmazott és azt tartalmazó gömb, s hogy e gömbök középpontjait a poliéder bármely belső pontja kijelölhető. Erre majd csak a téreometria tárgyalásakor kerülhet sor (lásd 29.2 B2).

Ebből következik majd, hogy egy alakzat akkor és csak akkor korlátos, ha van azt tartalmazó gömbtest, s hogy egy síkbeli alakzat akkor és csak akkor korlátos, ha van azt tartalmazó körlemez.

Az is következik majd a most említettekből, hogy az előző szakasz tárgyalása mit sem változik, ha a környezetet mint a pontot tartalmazó nyílt (vagy zárt) gömbnek a fundamentális alakzattal alkotott közös részét definiáljuk, tehát r sugarú környezetről beszélünk.

Ha a most mondottakat választottuk volna a környezet és a korlátosság definíciójául, akkor poliéderekre alapozott tárgyalásunkban máris igazolt több egyszerű tényt nem tudnánk itt bizonyítani. Arra kényszerültünk volna ezért, hogy a rendszeres tárgyalást az általunk itt elintéztettekkel később duzzasszuk meg.

B3 Könnyű belátni, hogy a korlátos konvex síkidomok és testek külseje poligonálisan összefüggő. Ha ugyanis B egy belső pont, K_1 és K_2 pedig külső pontok, akkor a BK_1 , BK_2 szakaszok meghosszabbításai metszik a konvex síkidomot a belsejében tartalmazó sokszöget, illetőleg a konvex testet a belsejében tartalmazó poliédert. A meghosszabbítások mentén, valamint a tartalmazó sokszög, illetőleg poliéder határán haladva a K_1 , K_2 pontokat összekötő, csak külső pontokat tartalmazó töröttvonalat kapunk.

Minthogy a konvex alakzatok is poligonálisan összefüggők, 5.3 Bh) alapján kimondhatjuk, hogy minden konvex zárt görbe kettévágja a síkot, és minden konvex zárt felület kettévágja a teret.

6. § Egybevágóság és szimmetria

Az alapfogalmakat tárgyaló első fejezetnek ebben az utolsó paragrafusában geometriai transzformációkkal, az egybevágósággal, annak egyes fajtáival és az alakzatoknak ezekkel kapcsolatos tulajdonságaival foglalkozunk.

6.1 Ha minden ponthoz vagy valamely ponthalmaz minden pontjához hozzárendelünk egy-egy pontot, *transzformációt* (ponttranszformáció, leképezés) definiáltunk. Ilyen transzformáció pl. a tér elmozgatása is. Ha egy ponthoz (tárgypont) a transzformáció egy pontot (képpont) rendel, azt mondjuk, hogy ezek megfelelő (homológ) pontok. Egy alakzathoz (tárgy) az alakzat pontjaihoz tartozó képpontokból álló alakzatot (kép) rendeljük hozzá. Az alakzat transzformálása erre a képalakzatra való áttérést jelenti.

Szó lehet arról, hogy egy transzformáció végrehajtása után egy újabb transzformációt alkalmazunk. Ilyen módon két transzformáció egymásutánja egyetlen transzformációt eredményez. Ha egy transzformáció más-más tárgyponthoz más-más képpontot rendel, akkor *közönségesnek* mondjuk. Az ilyen transzformációnál beszélhetünk az ellentétes (inverz) transzformációról, arról, amelyik a képpontokhoz rendeli a tárgypontokat. Ellentétes transzformációk egymásutánja azonosságot ad, amely minden ponthoz ugyanazt a pontot rendeli.

A sík vagy a tér transzformációja *elfajuló*, ha a teljes sík képe lineáris alakzat, illetőleg a teljes tér képe síkbeli alakzat.

Azt mondjuk, hogy egy transzformáció megtart egy tulajdonságot, ha az ilyen tulajdonságú alakzatokhoz ugyanilyen tulajdonságú alakzatokat rendel. Így pl. minden mozgás távolságtartó, egyenestartó és síktartó.

B1 Mi itt csak ponttranszformációkról, azaz olyan transzformációkról szoltunk, amelyek pontokhoz pontokat rendelnek. Szerepelnek másfajta transzformációk is (vö. 46.5 B1).

B2 Egy transzformáció jellemzéséhez lényegesen hozzátartozik annak a közlése, hogy a tárgypontok összessége milyen alakzat, vagyis hogy a transzformációt milyen ponthalmazon definiáljuk. Ez a ponthalmaz a legtöbbször a sík vagy a tér, de a sík és a tér transzformációin kívül szó lehet tetszőleges ponthalmazon definiált transzformációról is. Nem szükséges az, hogy a képpontok összessége a tárgypontok összességével azonos legyen. Ha két transzformáció egymásutánjáról beszélünk, akkor ehhez szükséges, hogy az első transzformáció minden képpontja szerepeljen a második transzformáció tárgypontjai között.

Egy alakzat transzformációjáról beszélhetünk akkor is, ha magán ezen az alakzaton definiálunk egy transzformációt, valamint akkor is, ha egy az alakzatot tartalmazó ponthalmazon definiált transzformációt adunk meg, hiszen ez utóbbi is hozzárendel a szóban forgó alakzathoz egy képet. Többször az utóbb említett esettel van dolgunk, mégpedig a teljes sík vagy a teljes tér transzformációjából indulunk ki. A mozgásnál is ez volt a helyzet. Ha csak egy alakzaton definiáljuk a transzformációt, akkor sokszor gondot okoz az, hogy hogyan terjesszük ezt ki a sík vagy a tér transzformációjává.

B3 A transzformációknak egy halmaza akkor alkot *csoportot*, ha a halmaz minden transzformációjához tartozik ellentétes transzformáció, és ez is a halmazhoz tartozik, ha továbbá beszélhetünk a halmaz bármely két transzformációjának az egymásutánja által szolgáltatott transzformációról, és mindezek ugyancsak a halmazhoz tartoznak.

A tér mozgásai csoportot alkotnak. A 2.4-ben említett mozgásfajták mindegyike ugyan csak transzformációcsoportot szolgáltat.

A csoport algebrai fogalom. Az algebraiban azt is külön megkövetelik, hogy a csoportművelet asszociatív legyen. Mi erről a követelésről nem szoltunk, mert transzformációk körében ez eleve teljesül: egy első és egy második transzformáció egymásutánját, majd egy harmadik transzformációt alkalmazva nyilvánvalóan ugyanahhoz az eredményhez jutunk, mintha az első transzformáció után alkalmazzuk a második és harmadik transzformáció egymásutánját.

Egy csoport elemeiből alakuló csoportot a csoport *alcsoportjának* mondjuk. Nyomban belátható, hogy egy transzformációcsoportnak olyan elemei, amelyek egy bizonyos tulajdonságot megtartanak, alcsoportot alkotnak. Így adódik pl., hogy a 2.4-ben említett mozgásfajták mindegyike a mozgáscsoport egy-egy alcsoportját szolgáltatja, hiszen ezeket a mozgásfajtákat az a tulajdonság jellemzi, hogy bizonyos alakzatok helyzete nem változik meg.

Egy transzformációcsoport *kommutatív*, ha bármely két elemére áll, hogy egymásutánjuk változatlanul ugyanazt a transzformációt szolgáltatja akkor is, ha sorrendjüket felcseréljük. Az egyenes eltolásai, valamint a sík egy pont körüli elforgatásai kommutatív csoportot alkotnak.

B4 A sík és a tér el nem fajuló transzformációi közül nevezetes szerepet játszanak a *félegyenestartó* transzformációk. Ilyen transzformáció az elmozgatás is. Az itt következőkben a félegyenestartó transzformációk tulajdonságaival foglalkozunk. Hangsúlyozzuk, hogy csak olyan el nem fajuló transzformációkról beszélünk, amelyek a teljes síkon vagy a teljes térben vannak értelmezve, és minden félegyenest egy-egy teljes félegyenest rendelnek.

Bebizonyítjuk, hogy transzformációink *közönségesek*. Abból indulunk ki, hogy bármely félegyenestartó transzformáció kollineáris pontokhoz kollineáris pontokat rendel, hiszen három kollineáris ponthoz található egy ezeket tartalmazó félegyenest. Ebből következik, hogy ha a nem kollineáris A, B, C pontok képe három egymástól különböző kollineáris pont, akkor egyenesük tartalmazza az AB, AC, BC egyenesek pontjainak, valamint minden két ilyen ponttal kollineáris pontnak, tehát az ABC sík valamennyi pontjának a képét. Ehhez hasonlóan megállapíthatjuk, hogy ha a nem komplanáris A, B, C, D pontok képe négy egymástól különböző komplanáris pont, akkor ezeknek a síkja tartalmazza az A, B, C, D pontok által meghatározott egyenesek pontjainak, az általuk meghatározott síkok pontjainak, sőt a tér összes pontjainak a képét. Ezek szerint el nem fajuló félegyenestartó transzformáció esetében nincs ilyen ponthármas, illetőleg pontnégyes.

Bizonyításunk során felhasználjuk azt is, hogy a félegyenestartás miatt bármely félegyenest van olyan pont, amelynek a képe megadott véges sok pont képének egyikével sem azonos. Feltesszük, hogy egy el nem fajuló félegyenestartó transzformáció az A, A_1 pontokhoz ugyanazt a pontot rendeli, s ebből ellentmondást vezetünk le. A síkbeli esetben úgy vesszük fel a B pontot, hogy A, A_1, B ne legyenek egy egyenesen, s hogy A és B képe ne legyen azonos, továbbá úgy vesszük fel a C pontot a BA_1 félegyenest, hogy A, B és C képe más-más pont legyen. A térbeli esetben úgy vesszük fel a B, C pontokat, hogy A, A_1, B, C ne legyenek egy síkban, s hogy A, B, C képe három különböző pont legyen, továbbá úgy vesszük fel a CA_1 félegyenest a D pontot, hogy A, B, C és D képe más-más pont legyen. Könnyen belátható, hogy az így kapott A, B, C ponthármas, illetőleg A, B, C, D pontnégyes rendelkezik a fentebb említett tulajdonságokkal, tehát ellentmond annak, hogy el nem fajuló leképezésről van szó.

Transzformációink *egyenestartók*. Az egyenest ugyanis egyetlen közös ponttal rendelkező két félegyenest bonthatjuk fel, a félegyenestartás és a közönségesség miatt tehát az egyenes képe is két ilyen félegyenestől áll. Ezek a félegyenestek azonban csak egyetlen egyenest alkothatnak, mert az egyenes képének nem lehet három nem kollineáris pontja.

Okoskodásunk azt is mutatja, hogy a félegyenest kezdőpontjának a képe a képfélegyenest kezdőpontja. Ebből viszont nyomban adódik, hogy transzformációink inverzei is ilyen félegyenestartó transzformációk. Ha ugyanis az A_1, B_1 pontok az A, B pontok inverzei, akkor az A_1, B_1 félegyenest az AB félegyenest képe.

Transzformációink *szakasztartók*, azaz szakaszhoz szakaszt rendelnek, hiszen a szakasz az egyetlen olyan több pontból álló alakzat, amely két félegyenest közös részeként állítható elő. A kezdőponttartás miatt a képszakasz végpontjai a tárgyszakasz végpontjainak a képei. Ez utóbbi tényt is kifejezésre juttatjuk, azt mondjuk, hogy transzformációink az összekötő szakaszokat megtartják.

Transzformációink *síktartók* is. Az összekötő szakaszok megtartásából következik ugyanis, hogy háromszög vonal képe háromszög vonal. A sík viszont azoknak a pontoknak a mértani helye, amelyeken át egy adott háromszög vonalat két pontban érő egyenes húzható.

Az eddig megállapított tulajdonságokból következik, hogy az el nem fajuló félegyenestartó transzformációk mindazokat az alakzatokat megtartják, amelyek a félegyenest, az összekötő szakasz, az egyenes és a sík segítségével definiálhatók. Eszerint transzformációink megtartják a félsíkot, szög vonalat, szögtartományt, a törött vonalat, sokszög vonalat, sokszögtartományt, és ha a tér transzformációjáról van szó, akkor a féltér, poliéderfelületet és poliédertestet is. Ebből következik, hogy egy tartomány képe a fundamentális alakzat képén elhelyezkedő tartomány, s hogy a határ képe a képtartomány határa.

Az elmondottak alkalmazhatók az elmozgatásra is. Elég lett volna ezért, ha 2.1-ben a VII. axióma csak a félegyenestartókról szól. Megemlítjük, hogy a későbbi tárgyalás során ezeknek a félegyenestartó leképezéseknek még további tulajdonságaival is megismerkedünk majd (lásd 12.1 B, 12.5 B2, 14.2 B2, 17.2 B4, 23.1 B2, 30.7 B, 46.9 B3), s hogy több olyan transzformációfajta lesz majd szó, amelyre eredményeink alkalmazhatók lesznek (lásd 6.3 B2, 11.1 B2, 17.4 B, 43.1 B1, 46.9 B3).

6.2 A távolságtartó leképezést *egybevágóságnak* (kongruencia) nevezzük. Az egybevágóság különböző pontokhoz különböző pontokat rendel, hiszen különben a leképezés nem volna távolságtartó. Ebből következik, hogy az egybevágóságnak van inverze, és ez is egybevágóság.

Két (nem feltétlenül különböző) alakzat *egybevágó* (kongruens), ha van

olyan egybevágóság, amely az egyiket a másikba viszi át. Két alakzat tehát akkor egybevágó, ha pontjaik úgy feleltethetők meg egymásnak, hogy az egyik alakzat tetszőleges két pontjának távolsága megegyezik a másik alakzat megfelelő két pontjának a távolságával. Ha egy alakzat egy másikkal egybevágó, akkor ez utóbbi is egybevágó az elsővel, hiszen az egybevágóság inverze is egybevágóság. Két alakzat többféleképpen is egybevágó lehet egymással, hiszen lehetséges, hogy több olyan egybevágóság van, amely egy alakzathoz ugyanazt az alakzatot rendeli.

Minden mozgás egybevágóság, hiszen távolságtartó. A mozgatóssal fedésbe hozható alakzatok tehát egybevágók. Egybevágóság természetesen az azonosság is.

Az egybevágóság jele \cong . Ha egybevágó alakzatokat pontokkal adunk meg, akkor az egymásnak megfelelő pontokat ugyanannyiadik helyen szokás szerepeltetni. Így pl. $A_1 B_1 C_1 \triangle \cong A_2 B_2 C_2 \triangle$ azt is kimondja, hogy ennél az egybevágóságnál az A_1, B_1, C_1 csúcsoknak rendre az A_2, B_2, C_2 csúcsok felelnek meg.

A Az egybevágóság definíciójában csak a távolságok egyenlőségéről szoltunk, és a szögekről nem. Ez felesleges lett volna, hiszen a távolságtartásból a szögtartásra már következtetni lehet (lásd 11.1).

Mindenképpen helytelen azt mondani, hogy két alakzat akkor egybevágó, ha megfelelő oldalaik és szögeik egyenlők, hiszen ez a definíció pl. a kör esetében értelmét veszti.

B1 A geometria axiomatikus megalapozásakor, ellentétben az imént mondottakkal, szokásos az a definíció, hogy két háromszög akkor egybevágó ha megfelelő oldalaik és szögeik egyenlők. Ez ott átmenetileg indokolt.

B2 Egy alakzat akkor egybevágó egy másikkal, ha van olyan, az első alakzaton definiált, távolságtartó leképezés, amely az első alakzathoz képként a másikat rendeli. Két síkbeli vagy térbeli alakzat mindenesetre egybevágó akkor, ha van olyan, a síkon vagy a térben definiált, távolságtartó leképezés, amely az egyik alakzathoz képként a másikat rendeli. Korántsem nyilvánvaló azonban az, hogy egybevágó síkbeli vagy térbeli alakzatokhoz található-e a síknak, illetőleg a térnek olyan egybevágósága, amely az egyik alakzathoz képként a másikat rendeli (vö. 6.1 B2). A későbbi fejezetekben bebizonyítjuk majd, hogy ez igaz (lásd 11.1 B3 és 26.4 B2).

Ha két alakzatot adunk meg, és egybevágóságukat akarjuk bizonyítani, akkor mindig a síknak vagy a térnek olyan egybevágóságát keressük, amely az alakzatokat egymáshoz rendeli. Nagyon körülményes volna, ha nem így járnánk el, hanem az egyik alakzaton definiált transzformációt keressünk. Ez az út is járható azonban akkor, ha véges sok pontból álló alakzatokról van szó.

B3 Könnyen belátható, hogy a tér egybevágóságai csoportot alkotnak, s hogy a mozgáscsoport alcsoportja ennek a csoportnak. Nyilvánvaló az is, hogy a sík egybevágóságai csoportot alkotnak, és ez alcsoportként tartalmazza a síkmozgások csoportját.

6.3 Ebben a szakaszban speciális egybevágóságfajtákról lesz szó. Ezeket közös néven *tükrözésnek* (szimmetria) nevezzük. A tükrözés által hozzárendelt képet *tükröképnek* (szimmetrikus társ) mondjuk. A tükrözések mindegyik említendő fajtájára áll az, hogy minden pont saját tükröképének a tükröképe. Egy alakzatról és tükröképéről szolva mondhatjuk tehát, hogy azok egymás tükröképei (szimmetrikusak).

A *P* pontra vonatkozó tükrözés (centrális szimmetria) csak a *P* ponthoz, a *szimmetriacentrumhoz* rendeli önmagát, más *A* ponthoz a *PA* egyenesnek azt az *A*-tól különböző A_1 pontját rendeli, amelyre $PA = PA_1$. A *P* pontot tartalmazó síkon belül ez a tükrözés a *P* pont körüli 180° -os elforgatást jelent. Következik ebből a tényből, hogy szimmetrikus szakaszok egyenlők, s hogy

egyenes tükröképe egyenes. Szó lehet természetesen egy egyenesen belül is az egyenes egy pontjára vonatkozó tükrözésről.

Az *e* egyenesre vonatkozó tükrözés (tengelyszimmetria, axiális szimmetria) csak az *e* egyenes, a *szimmetriatengely* (tükrötengely) pontjait rendeli önmagukhoz. Sokszor szimmetriatengelyként az *e* egyenesnek csak egy szakaszát vagy egy félegyenesét adjuk meg, és azt mondjuk, hogy arra tükrözünk. A szimmetriatengelyt tartalmazó síkok önmaguk tükröképei. Egy ilyen sík pontjai tükröképeikbe jutnak, ha a síkot a szimmetriatengely körül átforgatjuk úgy, hogy a tengely által határolt félsíkok helyet cseréljenek. Elforgathatjuk a szimmetriatengely körül az egész teret is úgy, hogy a tér minden pontja tükröképébe jusson (vö. 6.5 B4). Belátható így, hogy szimmetrikus szakaszok egyenlők, s hogy egyenes tükröképe egyenes.

Az *S* síkra vonatkozó tükrözés (síkszimmetria, planáris szimmetria) olyan távolságtartó leképezés, amely az *S* szimmetriasík (tükrösík) pontjait helyben hagyja, és az *S* sík által határolt féltételeket felcseréli.

A síkon belül végrehajtott, pontra vagy egyenesre vonatkozó tükrözések, valamint a tér egyenesre vonatkozó tükrözése elmozgatással valósítható meg. Ezért már itt megállapíthatjuk, hogy ezek a tükrözések szögtartók.

A A síkra vonatkozó tükrözésről szemléletes képet ad a siktükrő fényvisszaverése. Innen ered az, hogy a szimmetriát tükrözésnek is mondjuk. Ha tükrözésről beszélünk anélkül, hogy a tükrözésfaját megadnók, akkor térben síkra vonatkozó, síkban pedig egyenesre vonatkozó tükrözésre gondolunk.

B1 A síkra vonatkozó tükrözést illetően csak definíciót mondtunk ki, de nem láttuk be, hogy valóban van ilyen leképezés. Ezt a következőképpen láthatjuk be: Tükrözzük a teret az *S* sík egy *P* pontjára vonatkozólag, majd forgassuk el az *S* síkot a *P* pont körül 180° -kal, és a forgó síkhoz tapasztva mozgassuk el az egész teret is. E két transzformáció egymásutánja valóban azt eredményezi, hogy az *S* sík pontjai helyben maradnak, hiszen ezeket kétszer tükröztük a *P* pontra vonatkozólag, s hogy az *S* sík által határolt féltételeket helyet cserélnek, hiszen az első tükrözés ezt eredményezte, s az ezt követő elmozgatás ezen a helyzeten nem változtatott. A kapott transzformáció távolságtartó és egyenestartó is, hiszen az egymás után alkalmazott transzformációk ilyenek voltak. Beláttuk tehát, hogy van olyan transzformáció, amelyet kerestünk.

Ha felhasználjuk azt, hogy egy félsík két különböző pontja nem lehet a félsík határegyenesének minden pontjától ugyanakkora távolságra (lásd 7.3), akkor azt is beláthatjuk, hogy csak egyetlenegy olyan transzformáció van, amelyet az *S* síkra vonatkozó tükrözésnek mondhatunk. Az ellenkező esetben volna ugyan két olyan pont az *S* által határolt egyik féltéren belül, amelyek *S* minden egyes pontjától ugyanakkora távolságra vannak. Ha ezen a két ponton és a másik féltér egy belső pontján át síkot fektetünk, akkor a két pontot tartalmazó olyan félsíkhöz jutunk, amelynek határegyenesét *S* tartalmazza. A két pont feltételezett tulajdonsága valóban ellentmond tehát annak a ténynek, amelyre hivatkoztunk.

Okoskodásunk azt is mutatja, hogy a síknak a sík egy egyenesére vonatkozó tükrözése az egyetlen olyan távolságtartó leképezés, amely az egyenes pontjait helyben hagyja, és az egyenes által határolt félsíkokat egymásba viszi át.

B2 Egyes tükrözésekről már megállapítottuk, hogy szögtartók. Minden tükrözésre kimondhatjuk ezt majd, ha már tudjuk, hogy minden távolságtartó leképezés egyben szögtartó is (lásd 11.1).

Minden tükrözésfajtaról megállapíthatjuk, hogy távolságtartó és egyenestartó. Ebből már könnyen következik, hogy szakasztartó, mégpedig két pont összekötő szakaszához a két képpont összekötő szakaszát rendeli, s hogy félegyenesstartó is. A tükrözések rendelkeznek ezért mindazokkal a tulajdonságokkal, amelyekről 6.1 B4 szolt.

6.4 Lehetséges, hogy valamilyen tükrözés egy alakzathoz önmagát rendeli. Ekkor ezt az alakzatot *szimmetrikusnak* (tükrös) mondjuk, és az alak-

zatnak ezt a tulajdonságát *szimmetriának* (tükrösség) nevezzük. Egy alakzat lehet tehát centrálisan szimmetrikus (centrális), tengelyszimmetrikus vagy síkszimmetrikus.

Forgásszimmetrikusnak akkor mondunk egy alakzatot, ha van olyan elforgatás, amely az alakzatot önmagába viszi át. Ez az elforgatás történhetik egy egyenes (szimmetriatengely, forgástengely) körül, síkbeli alakzatoknál pedig egy pont (szimmetriacentrum, forgáscentrum) körül. Természetesen csak olyan elforgatásokra gondolunk itt, amelyek valóban megváltoztatják a pontok helyzetét.

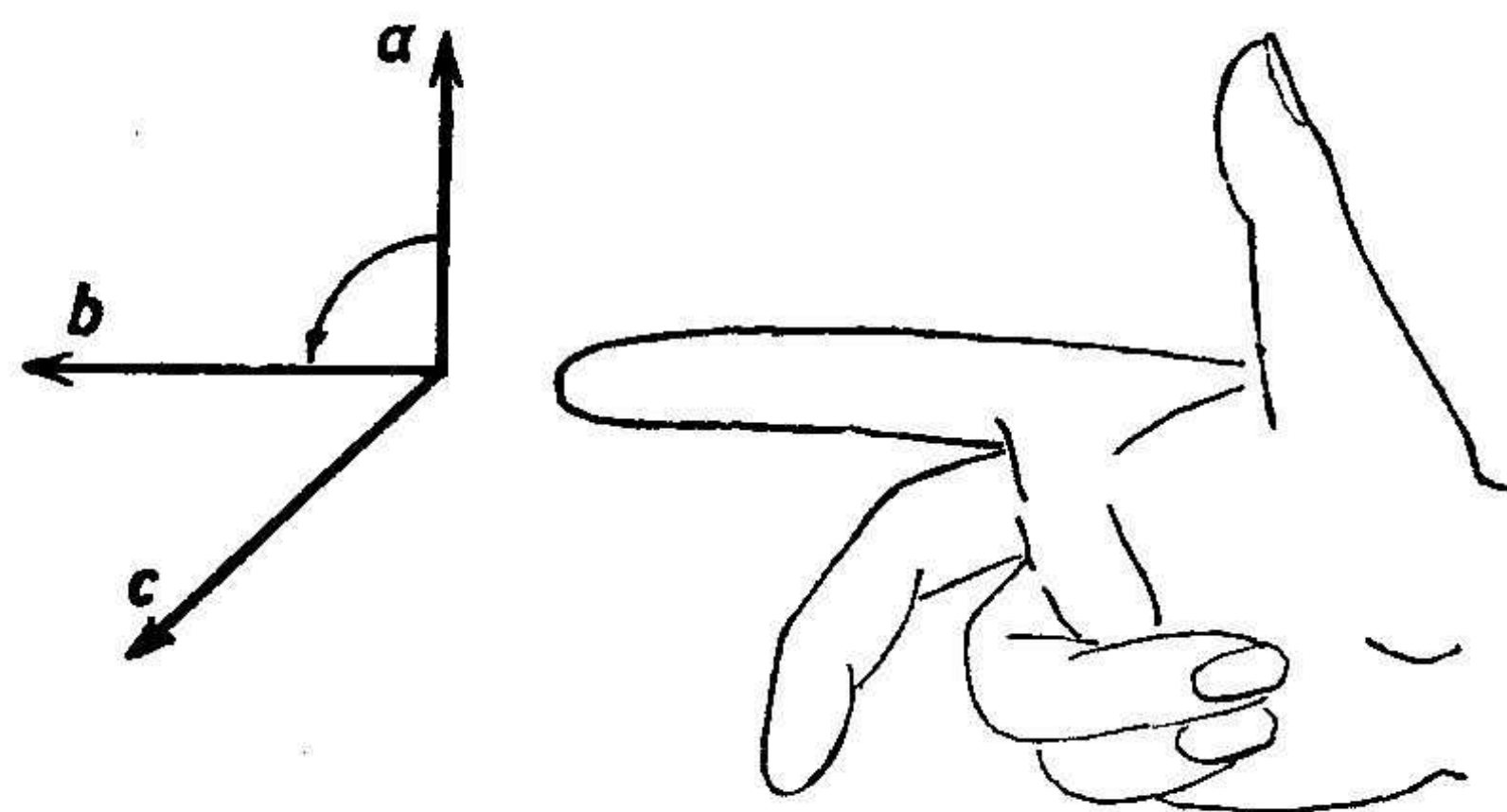
Egy tengelyre vagy centrumra vonatkozó forgásszimmetria *n-edrendű*, ha az alakzat elforgatással *n*-féleképpen hozható önmagával azonos helyzetbe. Az elforgatások összeszámlálásánál csak azt tekintjük, hogy az elforgatás milyen kezdőhelyzetből milyen véghelyzetbe visz, és itt az el nem forgatást is számításba vesszük. Nyilvánvaló, hogy *n*-edrendű forgásszimmetria esetén az azonos helyzetbe hozó elforgatások szögei a teljes szög *n*-edrészének egész számú többszörösei. A másodrendű forgásszimmetria centrális szimmetriát, illetőleg axiális szimmetriát jelent. Ezért csak $n \geq 3$ esetben szokás *n*-edrendű forgásszimmetriáról beszélni. Ilyenkor mindig megadjuk a forgásszimmetria rendszámát, vagy hangsúlyozzuk, hogy véges rendű forgásszimmetriáról van szó. Ha a forgásszimmetria rendszáma páros, akkor az alakzat egyben centrális-szimmetrikus is, mégpedig a forgásszimmetria és a centrális szimmetria centruma azonos.

A forgásszimmetria akkor *teljes*, ha az alakzat helyzetét semmilyen, a forgástengely, illetőleg a forgáscentrum körüli elforgatás sem változtatja meg. Ha forgásszimmetriáról van szó, és nem említjük, hogy az véges rendű, akkor mindig teljes forgásszimmetriára gondolunk. Ilyenkor a síkbeli alakzatot *körszimmetrikusnak*, a térbeli alakzatot *hengerszimmetrikusnak* is mondjuk. A *forgástest* megnevezést a hengerszimmetrikus testekre használjuk.

Egy térbeli alakzat *gömbszimmetrikus*, ha nem változtatja meg a helyzetét, akárhogy forgatjuk is el a teret egy pont (szimmetriacentrum) körül.

A Zavart okozhat, ha valaki a térbeli alakzatok teljes forgásszimmetriájára, tehát a hengerszimmetriára a tengelyszimmetria megnevezést használja. Ezt a megnevezést ugyanis már másra foglaltuk le.

6.5 Síkbeli transzformációnál megvizsgálhatjuk, hogy ha a transzformáció az $ABC\Delta$ csúcsaihoz rendre az $A'B'C'\Delta$ csúcsait rendeli, akkor e két háromszög megegyező vagy ellentétes körüljárású-e. Azt mondjuk, hogy a transz-



11. ábra

formáció az *orientációt* megtartja, illetőleg megváltoztatja, ha minden esetben megegyező, illetőleg minden esetben ellentétes körüljárású háromszögek szerepelnek.

A síkmozgás és így a pontra vonatkozó tükrözés is megtartja az orientációt, viszont a sík egyenesre vonatkozó tükrözése megváltoztatja.

Ha az *a, b, c* félegyenesek egy pontból indulnak ki, és nincsenek egy síkban, megvizsgálhatjuk, hogy az a 180° -nál kisebb elforgatás, amelyik az *a* félegyeneset a *b* helyzetbe viszi, *c* irányából nézve pozitív-e, azaz az óramutató járásával ellentétes-e. Ha igen, akkor az *a, b, c* félegyenesek ebben a sorrendben *jobbrendszert* (jobbsodrású rendszer) alkotnak (11. ábra), ha pedig nem, akkor *balrendszert* (balsodrású rendszer). Ez az elnevezés onnan ered, hogy jobb kezünk első három ujjja jobbrendszert alkot, amikor ezzel a három ujjal fogunk meg egy tárgyat, viszont bal kezünk első három ujjja balrendszert alkot ilyenkor.

Minden térbeli transzformációnál megvizsgálhatjuk, hogy ha a transzformáció az *O, A, B, C* pontokhoz rendre az *O', A', B', C'* pontokat rendeli, és e pontnégyeseknek egyike sincs egy síkban, akkor az *OA, OB, OC* félegyenesek rendszerének jellege megegyezik-e az *O'A', O'B', O'C'* félegyenesek rendszerének jellegével. Azt mondjuk, hogy a transzformáció az *orientációt* megtartja, illetőleg megváltoztatja, ha minden esetben megegyező jellegű, illetőleg minden esetben ellentétes jellegű rendszerek szerepelnek.

A tér elmozgatásai és köztük az egyenesre vonatkozó tükrözés is megtartja az orientációt, a pontra és a síkra vonatkozó tükrözés viszont megváltoztatja.

A jobbrendszer definícióját így is szövegezzük: Az *OA, OB, OC* félegyenesek jobbrendszert alkotnak, ha az $ABC\Delta$ körüljárása a félegyenesek irányából nézve pozitív (12. ábra). Ebből az is könnyen belátható, hogy ha *a, b, c* jobbrendszert alkotó félegyenesek, akkor ez a ciklikus cserével adódó *b, c, a* és *c, a, b* rendszerekre is áll, viszont ciklikus sorrendjük megváltoztatásakor a jobbrendszer balrendszerbe megy át.

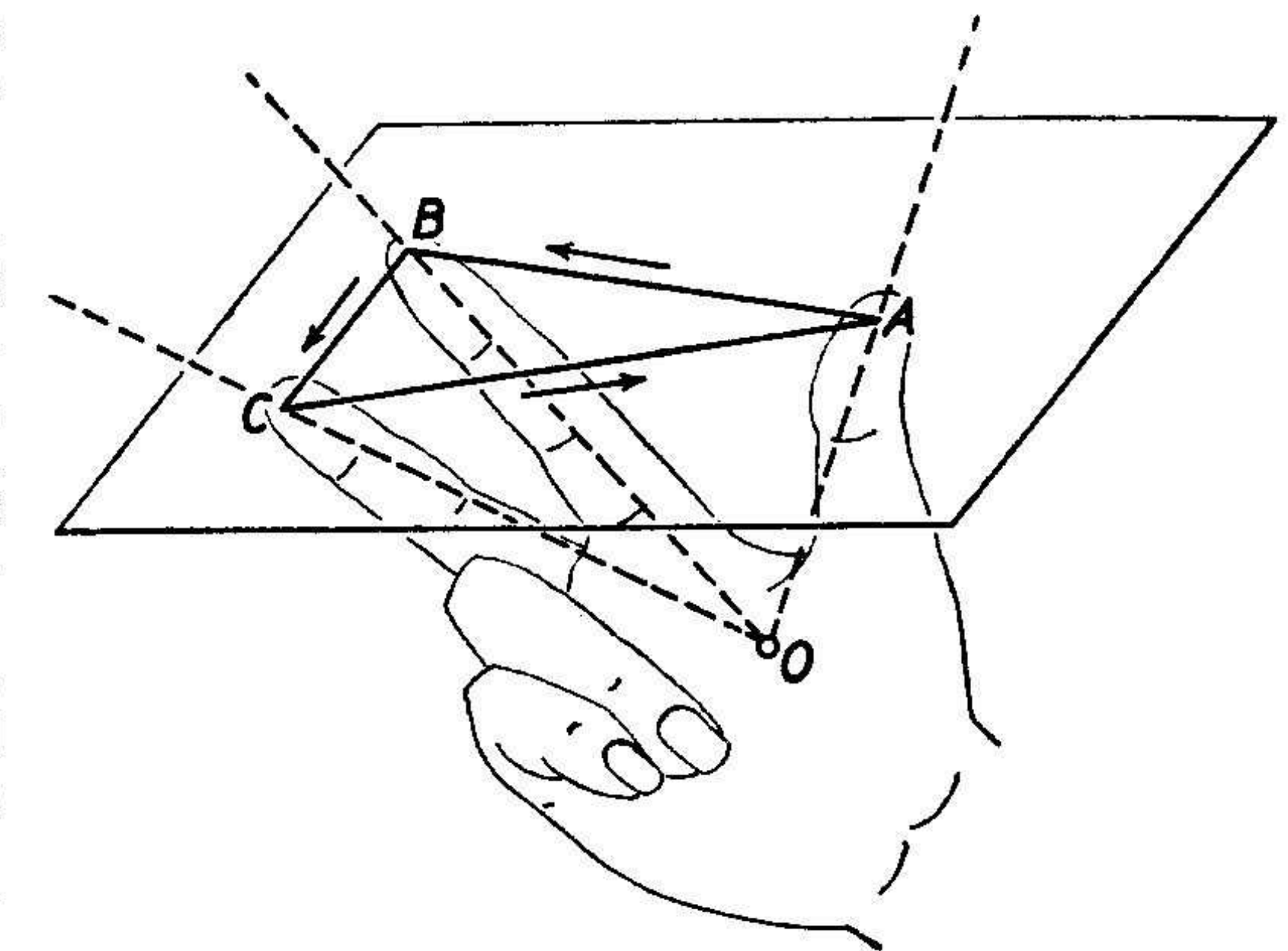
B1 Ha nem a mi tapasztalati térünkről van szó, akkor külön meg kell adni, hogy mit mondunk jobbrendszernek, és mit mondunk balrendszernek, ha ilyenekről egyáltalában beszélni akarunk. Ekkor a teret *orientáltnak* (irányított) mondjuk. Tapasztalati térünk már eleve orientált.

Egy síkot akkor mondunk *orientáltnak*, ha az általa határolt féltérekről megmondjuk, hogy melyiket tekintjük pozitívnak, és melyiket negatívnak. Orientált térben az orientált síkot úgy irányítjuk, hogy ha a sík *OA, OB* félegyenesei 180° -nál kisebb pozitív irányított szöget alkotnak, akkor a pozitív féltérbe mutató *OC* félegyenessel együtt jobbrendszert alkossanak. Orientált térben, és így a tapasztalati térben sem teszünk tehát különbséget irányított és orientált sík között. Nem teszünk különbséget akkor sem, ha térbe be nem ágyazott síkról van szó, ha tehát csak a síkgeometriával foglalkozunk.

Egy síkbeli egyenest *orientáltnak* mondunk, ha az általa határolt félsíkokról megmondjuk, hogy melyik a pozitív, és melyik a negatív. Irányított síkban az orientált egyenest úgy irányítjuk, hogy $+90^\circ$ -os elforgatás után a pozitív félsíkba vezessen. Irányított síkban tehát nem teszünk különbséget irányított és orientált egyenes között.

B2 Az orientáció fogalmának megismerése lehetővé teszi, hogy itt az egybevágóságok és az elmozgatások viszonyát tisztázzuk.

Felhasználjuk azt, hogy sem a félsíknak, sem a féltérnek nincs két olyan pontja, amelyekből a határegyenes, illetőleg a határsík minden egyes pontja ugyanakkora távolságra van. Ezt már 6.3 B1-ben kimondtuk, mégpedig 7.3-ra támaszkodva.



12. ábra

a) A tér egybevágóságai között egyetlenegy olyan van, amely egy adott féltérhez, ennek határán megadott félsíkhöz és ez utóbbinak a határán megadott félegyeneshez ugyanilyen viszonylagos elhelyezkedésű adott féltérrel, félsíkot és félegyeneset rendel.

Ha csak a félsíkról és félegyenesről beszélünk, akkor VIII. szerint van (mégpedig egyetlenegy) térmozgás, amely megfelelő leképezést létesít. Ha ez a térmozgás az adott féltérrel nem viszi az előírt helyzetbe, hanem a kiegészítő féltérre képezi le, akkor az elmozgatást követően a féltér határisíkjára tükrözve jutunk egy feltételeinket kielégítő egybevágósághoz. Ilyen egybevágóság tehát mindig található.

Azt kell még belátnunk, hogy csak egy ilyen egybevágóság van, vagyis azt, hogy a feltételeinket kielégítő egybevágóságok ugyanazt a pontot nem vihetik két különböző helyzetbe. Az adott félegyenes pontjaira ez így van, hiszen ezek a pontok a távolságtartás miatt a képfélegyenesnek csak a megfelelő pontjába juthatnak. Ugyanezt elmondhatjuk az adott félegyenes kiegészítő félegyeneséről, tehát az adott félsík teljes határegyeneséről is. A félsíkról szóló, fentebb idézett tényre hivatkozva megállapíthatjuk tehát, hogy az adott félsík pontjai is csak egyféle helyzetbe juthatnak. Ugyanezt elmondhatjuk a kiegészítő félsíkról, tehát az adott féltér teljes határisíkjáról is. A féltérről szóló, fentebb ugyancsak idézett tényre hivatkozva kimondhatjuk akkor, hogy az adott féltér és a kiegészítő féltér minden pontja, vagyis a teljes tér valamennyi pontja szintén csak egyféle helyzetbe juthat.

Lényegesen egyszerűbben láthatjuk be, hogy a sík egybevágóságai között egyetlenegy olyan van, amely egy adott félsíkhöz és ennek határán megadott félegyeneshez ugyanilyen viszonylagos elhelyezkedésű adott félsíkot és félegyeneset rendel. Minthogy a sík térbeli mozgatása ilyen egybevágóságot szolgáltat, csak azt kell igazolni, hogy csak egy ilyen egybevágóság van, ez pedig a térre vonatkozó állításunk bizonyításából közvetlenül kiolvasható. A kétféleség itt azáltal áll elő, hogy a sík térbeli elmozgatása síkbeli elmozgatás-e vagy sem.

b) A tér minden egybevágósága vagy elmozgatás, vagy pedig előállítható elmozgatást követő síkra vonatkozó tükrözéssel. Ez következik abból, hogy az egybevágóságot a) szerint jellemezhetjük egy féltér, félsík és félegyenes kezdő- és véghelyzetének megadásával, s hogy ezeket az alakzatokat elmozgatással és ezt követő esetleges tükrözéssel az előírt véghelyzetbe juttathatjuk el. Azt is láttuk ott, hogy a két lehetőség közül mindig csak az egyik vezet célhoz: vagy elmozgatással érhetünk célt, vagy pedig elmozgatást követő tükrözéssel.

A sík minden egybevágósága vagy síkmozgás, vagy pedig előállítható síkmozgást követő egyenesre vonatkozó tükrözéssel. Minthogy a sík egybevágóságát a) szerint egy félsík és ennek a határán elhelyezkedő félegyenes kezdő- és véghelyzetének megadásával jellemezhetjük, állításunk következik abból, hogy a félegyeneset síkmozgással az előírt véghelyzetbe juttathatjuk, és ha a félsík nem jutott ezáltal az előírt véghelyzetébe, akkor a határegyenesre vonatkozó tükrözéssel ezt is elérhetjük.

Ha a most bizonyítottakat az inverz egybevágóságra alkalmazzuk, belátjuk, hogy az elmozgatást követő tükrözés helyett mindkét esetben az elmozgatást megelőző tükrözésről is szólhattunk volna. Minden esetben szabadon előírhatjuk azt is, hogy esetleges tükrözéskor melyik síkra vagy melyik egyenesre tükrözzünk, hiszen az okoskodásban szereplő féltér, illetőleg félsík kezdőhelyzete szabadon választható meg.

c) A tér egybevágósága akkor és csak akkor térmozgás, ha az orientációt megtartja; a tér minden más egybevágósága megváltoztatja az orientációt. Ennek belátása végett elég b) első kijelentésére hivatkoznunk, valamint arra, hogy a tér elmozgatása az orientációt megtartja, a síkra vonatkozó tükrözés pedig megváltoztatja.

A sík egybevágósága akkor és csak akkor síkmozgás, ha a sík orientációját megtartja; a sík minden más egybevágósága megváltoztatja a sík orientációját. Az előző eredményünkhöz hasonlóan ez is nyomban adódik b) második megállapításából, valamint abból, hogy a síkmozgás a sík orientációját megtartja, az egyenesre vonatkozó tükrözés pedig megváltoztatja.

Ezek szerint a tér és a sík egybevágóságainak csoportján belül a mozgáscsoportnak nevezett alcsoportot azok az egybevágóságok alkotják, amelyek az orientációt megtartják. Ennek az alcsoportnak megvan az a sajátja, hogy bármely két nem az alcsoportához tartozó egybevágóság egymásutánja az alcsoporthoz tartozó egybevágóság, azaz mozgás. Ez nyomban belátható, ha a második egybevágóság előállítását azzal a tükrözéssel kezdjük, amellyel az elsőét befejeztük.

B3 Ha az orientáció megtartásának és megváltoztatásának fogalmát úgy akarjuk bevezetni, hogy ez a bevezetés ne támaszkodjék a szemléletre, hanem csak axiómáinkra épüljön,

akkor körülményesebben kell eljárni. Ilyen módon szabatosabbá válik az is, amit a 3. §-ban a síkbeli irányításról és annak kétféleségéről mondtunk.

a) A tér nem komplanáris A, B, C, D pontjaihoz hozzárendeljük az AB félegyeneset, az AB egyenes által határolt, a C pontot tartalmazó félsíkot, valamint az ABC sík által határolt, a D pontot tartalmazó féltérrel. A tér két ilyen rendezett pontnégyeséről azt mondjuk, hogy az orientációjuk megegyezik, ha van olyan elmozgatás, amelyik az egyik pontnégyeshez rendelt alakzatokat a másikhoz rendelt alakzatokba viszi át.

A sík nem kollineáris A, B, C pontjaihoz hozzárendeljük az AB félegyeneset, valamint az AB egyenes által határolt a C pontot tartalmazó félsíkot. A sík két ilyen rendezett pontnégyeséről azt mondjuk, hogy az orientációjuk megegyezik, ha van olyan síkmozgás, amely az egyik pontnégyeshez rendelt alakzatokat a másikhoz rendelt alakzatokba viszi át.

Definíciókból következik, hogy az orientáció megegyezése reflexív, szimmetrikus és tranzitív reláció, amely tehát a tér rendezett pontnégyeseit és a sík rendezett pontnégyeseit osztályokba sorolja. B2b)-ből kiolvasható, hogy mind a két esetben két osztály van. Az orientáció az ugyanabba az osztályba sorolt pontcsoportok közös tulajdonsága.

Az is kiolvasható B2b)-ből, hogy a pontcsoport térbeli, illetőleg síkbeli elmozgatása az orientációt megváltoztatja, viszont a tér síkra vonatkozó és a sík egyenesre vonatkozó tükrözése megváltoztatja. Ezek szerint a tér egyenesre vonatkozó és a sík pontra vonatkozó tükrözése is megváltoztatja a pontcsoport orientációját, viszont a tér pontra vonatkozó tükrözése megváltoztatja azt, hiszen ez utóbbi síkra vonatkozó tükrözés és elmozgatás egymásutánjaként állítható elő (vö. 6.3 B1).

b) Bizonyítjuk, hogy ha az A, B, C, D nem komplanáris pontnégyesben két szomszédos pontot felcserélünk, akkor az orientáció megváltozik.

Ha a B, A, C, D pontnégyesre térünk át, akkor a pontokhoz rendelt félsík és féltér változatlan marad, viszont a hozzárendelt félegyenes az AB szakasz F felezőpontjára vonatkozó tükröképébe megy át. A három alakzat ugyanígy módosul, ha a teret először az F pontra, azután pedig az AB egyenesre tükrözzük. Az orientáció ezért valóban megváltozik, mert a pontra vonatkozó tükrözés megváltoztatja, az egyenesre vonatkozó tükrözés pedig változatlanul hagyja.

Amikor az A, B, C, D pontnégyesről az A, C, B, D pontnégyesre térünk át, a pontokhoz rendelt féltér nem változik meg, de a félegyenesről és a félsíkról ezt nem mondhatjuk el. A három alakzat úgy módosul, mintha a teret először a BAC szögfelező egyenesére, majd az ABC síkra tükröztük volna. Minthogy az első tükrözés a pontnégyes orientációját megváltoztatja, a második pedig megváltoztatja, az orientáció végeredményben valóban megváltozik.

Utolsó esetként az A, B, C, D pontnégyesről az A, B, D, C pontnégyesre való áttérést vizsgáljuk. Ekkor a pontokhoz rendelt félegyenes megmarad, viszont a félsík és a féltér megváltozik. A félsíkot az előírt helyzetbe juttathatjuk azáltal, hogy a teret az AB egyenes körül elforgatjuk. Ha ezt követően az ABD síkra tükrözzük, akkor a féltér is az előírt helyzetbe jut (lásd B4d). Az orientáció most is megváltozott, mert az elforgatás meghagyta, a tükrözés pedig megváltoztatta.

Bebizonyított állításunkból következik, hogy ha a nem komplanáris A, B, C, D pontokat permutáljuk, orientációjuk megmarad vagy megváltozik aszerint, hogy a permutáció inverziószáma páros-e vagy páratlan. A kétféle orientációnak megfelelően azt mondjuk, hogy a DA, DB, DC félegyenesek rendszerének jellege kétféle lehet. Igaz tehát, hogy a félegyenesek ciklikus permutációja a rendszer jellegét meghagyja, a többi permutáció pedig megváltoztatja.

c) Bizonyítjuk, hogy ha a sík nem kollineáris A, B, C pontnégyesében két szomszédos pontot felcserélünk, akkor az orientáció megváltozik.

Ha a B, A, C pontnégyesre térünk át, akkor a pontokhoz rendelt félsík változatlan marad, viszont a hozzájuk rendelt félegyenes az AB szakasz F felezőpontjára vonatkozó tükröképébe megy át. Ez a két alakzat ugyanígy változik meg, ha a síkot először az F pontra, azután pedig az AB egyenesre tükrözzük. Mivel az első tükrözés az orientációt meghagyja, a második pedig megváltoztatja, az orientáció végeredményben megváltozik.

Ha az A, B, C pontnégyesről az A, C, B pontnégyesre térünk át, akkor a pontokhoz rendelt félegyenes és félsík megváltozik, mégpedig mind a kettő a BAC szögfelező egyenesére vonatkozó tükröképébe megy át. Ez a tükrözés az orientációt valóban megváltoztatja.

Bebizonyított állításunkból következik, hogy ha a kollineáris A, B, C pontokat permutáljuk, akkor orientációjuk megmarad vagy megváltozik aszerint, amint a permutáció ciklikus vagy sem. Eszerint a pontok ciklusának megadása, vagy ha egy háromszög csúcsairól van szó, a háromszög körüljárása az orientációt megszabja.

B4* Az alapfogalmakat tárgyaló első fejezet lezárásakor néhány megjegyzést teszünk azok számára, akik tárgyalásunkat a geometriai axiómatika szemüvegén át figyelik. A szokásos felépítéshez viszonyítva lényeges eltérést jelent tárgyalásunkban az, hogy mi már itt szerepeltettük a térmozgásokat. Ennek indokáról 2.1 B-ben már szóltunk. Felmerülhet azonban az a kétely, hogy mi a térmozgásokkal kapcsolatosan a VIII. axióma kimondásán túlmenően olyan tényeket is ismertettünk ebben a szemléletre építő fejezetben, amelyeknek szigorú igazolása az általunk később, a térgeometria tárgyalása során bizonyítandó tételeket igényli. Ennek az esetleg vélt logikai zavarnak az elhárítása érdekében az alábbi megjegyzéseket tesszük.

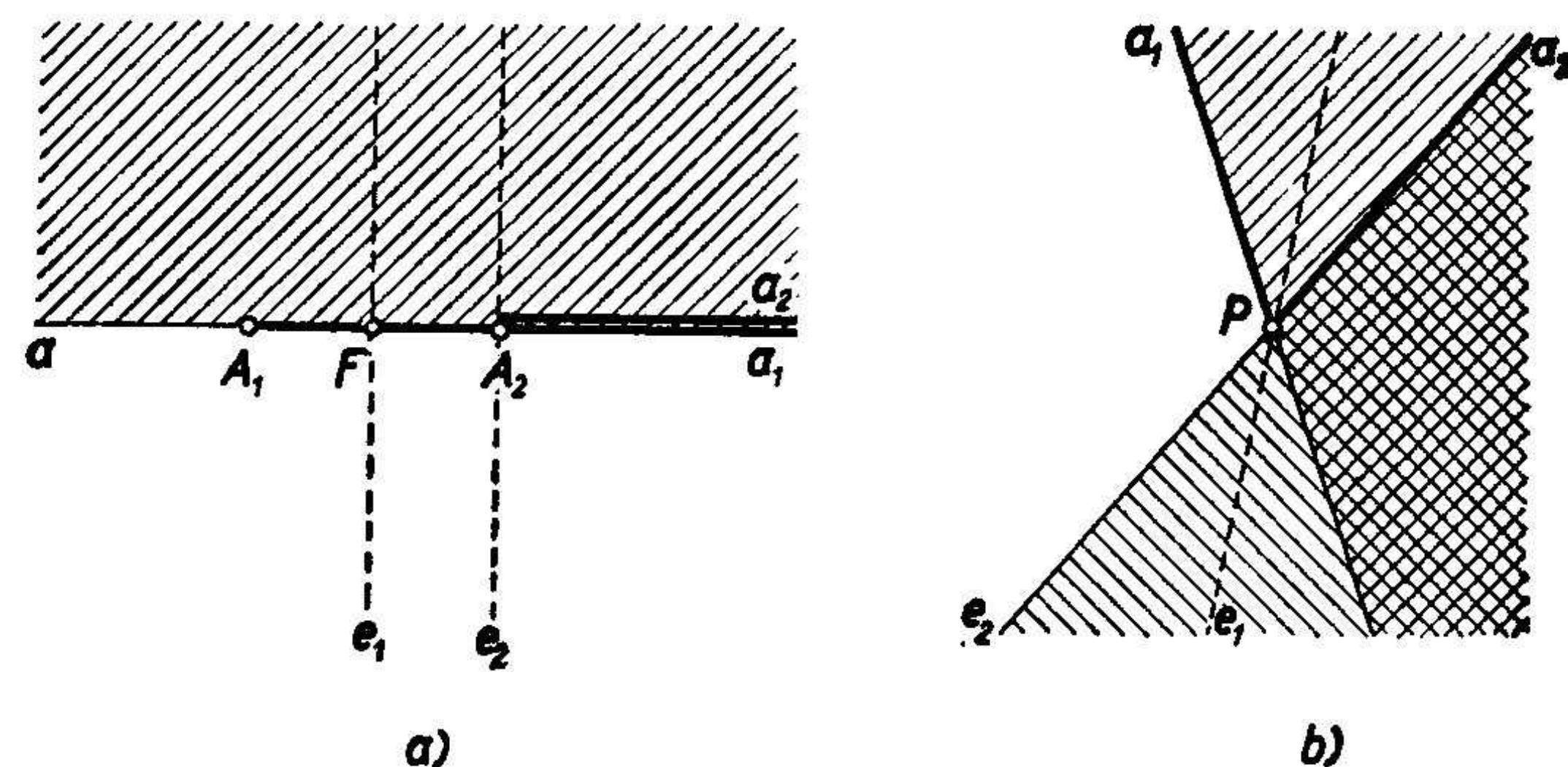
a) Ha az e egyenes egy síkot az S_1, S_2 félsíkokra bont, akkor VIII. axiómánk szerint van olyan térmozgás, amelyik az e egyenes pontjait változatlanul hagyja, és az S_1 félsíkot S_2 helyzetbe viszi. Minthogy ez a térmozgás S_1 kiegészítő félsíkját S_2 kiegészítő félsíkjába kell, hogy vigye, kimondhatjuk, hogy a tekintett térmozgás kétszer egymás után alkalmazva el nem mozdítást eredményez, azaz ez a térmozgás saját magának inverze. Ha tehát egy A_1 pontot a térmozgás A_2 helyzetbe visz, akkor az A_1A_2 szakaszt A_2A_1 helyzetbe viszi, és ennek következtében az A_1A_2 szakasz felezőpontját változatlanul hagyja.

Nem lehetséges azonban az, hogy az e egyenesen kívüli P pont helyben maradjon. Ebben az esetben ugyanis térmozgásunk nem változtatná meg sem az e egyenes pontjainak, sem pedig a P pontot tartalmazó, e által határolt félsíknak a helyzetét. Ez ellentmondana VIII. axiómánknak, hiszen e szerint az axióma szerint csak egy térmozgás rendelkezhetik a mondott tulajdonságokkal, viszont az el nem mozdítás is rendelkezik ezekkel.

Az elmondottakból következik, hogy a homológ A_1, A_2 pontok összekötő szakaszának felezőpontja az e egyenesen van, hogy tehát ez a térmozgás az e egyenesen átfektetett síkok helyzetét nem változtatja meg, viszont e által határolt félsíkjaikat felcseréli. Beláttuk ilyen módon annak az átforgatásnak a létezését, amelyikről 6.3-ban szóltunk.

b) Beláttuk azt is, hogy az e egyenesre vonatkozó tükrözés felcseréli azokat a féltereket, amelyeket egy az e egyenest tartalmazó sík határol. Ebből következik, hogy ha a teret egymást követően egy sík két egyenesére tükrözzük, akkor a sík által határolt félterek nem változtatják meg helyzetüket. A síkmozgás 2.4-ben adott definíciója értelmében következik tehát, hogy ha a síkot egymást követően két egyenesére tükrözzük, akkor síkmozgáshoz jutunk.

Ha egy eltolás az a egyenes A_1A_2 félegyenesét A_2 kezdőpontú helyzetbe viszi, akkor a félegyenesnek ezt az eltolását azáltal is megvalósíthatjuk, hogy először az A_1A_2 szakasz F felezőpontjára, majd az A_2 pontra tükrözzük. Ebből következik, hogy a térnek az az eltolása, amelyik egy az a egyenes által határolt félsík helyzetét nem változtatja meg, és az A_1A_2 félegyeneset a mondott helyzetbe viszi, ugyancsak helyettesíthető két egyenesre vonatkozó tükrözés egymásutánjával, és pedig azokra az egyenesekre vonatkozó tükrözésekkel, amelyek a helyben maradó síkban vannak, és az a egyenest az F, A_2 pontokban merőlegesen metszik:



13. ábra

(13a ábra). Támaszkodtunk itt arra, hogy ha a síkot egy egyenesére tükrözzük, akkor a síknak ezt az egyenest merőlegesen metsző egyenesei, és az ilyen egyenesek által határolt félsíkjai helyben maradnak.

A tükrözések egymásutánjára vonatkozó fenti megállapításunkra hivatkozva beláttuk ilyen módon, hogy a tér eltolásakor az elcsúsztatott félsík síkja síkmozgással önmagában tolik el, és az általa határolt félterek helyzete nem változik meg, s hogy a sík eltolása a helyben maradó egyenest önmagában tolja el, és az általa határolt félsíkokat helyben hagyja. Igazoltuk tehát 2.4-nek az eltolással kapcsolatos, bizonyításra szoruló állításait.

A sík elforgatását is megvalósíthatjuk két tükrözés egymásutánjával. Ha egy a P forgáscentrumból kiinduló félegyenes kezdő és vég helyzete van adva, akkor először e félegyenesek szögének szögfelező egyenesére, majd a véghelyzetet tartalmazó egyenesre tükrözzük (13b ábra). Támaszkodunk itt arra, hogy a szögfelezőre tükrözve a szög egyik szára a másikba jut, s hogy egy egyenes helyben marad, ha önmagára tükrözzük. Az egymást követő tükrözések ezért valóban egy kívánt tulajdonságú síkmozgást szolgáltatnak. Ugyanarra a két tükrötengelyre tükrözve azt a térmozgást is megkapjuk, amelyik forgósíkhöz tapasztott tér mozgását jelenti. Látjuk ilyen módon, hogy a sík elforgatása síkmozgás abban az értelemben, ahogyan 2.4 a síkmozgást definiálta.

c) Beláttuk már, hogy egy síknak egy pont körüli elforgatását megvalósíthatjuk azáltal, hogy a teret egymást követően két tengely körül forgatjuk el (mégpedig ezekre a tengelyekre tükrözzük). A tér tengelyek körüli elforgatásaival elérhetjük azt is, hogy egy adott S_1 félsík, amely az O_1A_1 félegyeneset a határán tartalmazza, megadott S_2 helyzetbe jusson, mégpedig O_1A_1 az S_2 határán megadott O_2A_2 félegyeneset fedje. Ezt elérhetjük pl. úgy, hogy először az O_1O_2 szakasz egy felezőmerőlegesére tükrözzük, ami által O_1A_1 az O_2A_2 helyzetbe jut, ezt követően az O_2A_2 sík elforgatása révén elérjük, hogy O_2A_2 az előírt O_2A_2 helyzetbe kerüljön, végül pedig az O_2A_2 tengely körül elforgatva az előbb már kétszer is elmozgatott S_1 félsík a megadott S_2 félsíkot fedje. A mondott három lépés egyike-másika természetesen esetleg el is hagyható. Igazoltuk ilyen módon, hogy 2.4-nek a térmozgások eltolásokból és elforgatásokból való felépítésére vonatkozó kijelentése helyes, sőt azt is, hogy ebben a kijelentésben az eltolásokról nem is kellett volna szólnunk.

d) Tekintsük az e egyenes által határolt, nem komplanáris S_1, S_2 félsíkokat, valamint az ezeknek a síkjai által határolt, mindkét félsíkot tartalmazó T_1, T_2 féltereket. Bebizonyítjuk, hogy van olyan sík, amely tartalmazza az e egyenest, s amelyre vonatkozólag az S_1, S_2 félsíkok, valamint a T_1, T_2 félterek egymás tükrörképei.

Azért tesszük ezt, hogy teljessé tegyük 6.5 B3b) okoskodását. Állításunkból 6.5 B2a) és 6.5 B2b) alapján következik ugyanis, hogy az az egybevágóság, amelyik e pontjait változatlanul hagyja, az S_1, T_1 alakzatokat pedig S_2, T_2 helyzetbe juttatja, a tér elmozgatásával nem valósítható meg. Ha tehát e körül úgy forgatjuk el a teret, hogy S_1 az S_2 helyzetbe jusson, akkor valóban tükrözni kell még S_2 síkjára, ha T_1 -et is a T_2 helyzetbe akarjuk juttatni.

Egyszerű volna a bizonyítás, ha lapszögről és ennek szögfelezősíkjáról szó lehetne. Nem hivatkozhatunk azonban a térgeometria későbbi tárgyalásának eredményeire. Hivatkozunk viszont, immár harmadszor (vö. 6.3 B1, 6.5 B2), a közvetlenül következő paragrafus egy megállapítására, mégpedig itt abban a többet mondó formában is, hogy ha két pont ugyanakkora távolságra van egy egyenes két pontjának egyikétől és másiktól, akkor a két pont ugyanakkora távolságra van az egyenes minden egyes pontjától is. Igaz ugyan, hogy ezt 7.3-ban csak egy sík pontjaira mondjuk ki, jogosan alkalmazhatjuk mégis a tér pontjaira, hiszen az egyenesünk által határolt két félsíkot az egyenes körüli elforgatással egy síkba vihetjük.

Hangsúlyozzuk, hogy bevezető fejezetünk akkor sem igényelne többet a későbbiekből, ha axiómáinkból kiindulva minden állítását szigorúan bizonyítanók. A 7.3-ra vonatkozó háromszori hivatkozás megbontja ugyan ezt a rendet, viszont lényegesen hozzájárul a bevezető fejezet kerekdedségéhez.

A bizonyításra térve egy P_1 pontot veszünk fel az S_1 félsík belsejében. Ha S_1 -et e körül elforgatva S_2 helyzetbe visszük, akkor P_1 az S_2 félsík P_2 pontjába jut. A P_1P_2 szakasz F felezőpontja nincs az e egyenesen, hiszen akkor S_1 és S_2 komplanáris volna. Tekintsük az e egyenesen és az F ponton átfektetett S síkot. A P_1, P_2 pontokról tudjuk, hogy F -től és e minden egyes pontjától ugyanakkora távolságra vannak. Ugyanakkora távolságra van akkor ez a két pont az előrebocsátottak szerint az e egyenes A, B pontjai által meghatározott ABF háromszög vonal minden pontjától, és ugyanilyen indokolással az S sík minden pontjától is, hiszen mindezen a pontokon át húzható olyan egyenes, amely az ABF háromszög vonalat két pontban metszi.

Az S síkra vonatkozó tükrözés a P_1 pontot a P_2 helyzetbe viszi, hiszen egy féltéren belül nincs két különböző, a határsík minden pontjától ugyanakkora távolságra elhelyezkedő pont. Ezt 7.3-ra hivatkozva 6.3 B1-ben megállapítottuk már. Az S síkra vonatkozó tükrözés

ezek szerint megfelel a követelményeinknek, mert a P_1 pontot tartalmazó S_1 félsíkot a P_2 pontot tartalmazó S_2 félsíkba, és az F pontot tartalmazó T_1 féltérrel az F pontot ugyancsak tartalmazó T_2 féltérbe viszi át.

B5 Annak ellenére, hogy mi a térmozgásokat is szerepeltettük már, arra törekszünk majd, hogy erre a többletre ne építsünk. Úgy gondoljuk, mintha a VIII. axiómánkat is csak a következő, kevesebbet mondó alakban mondtuk volna ki: *A sík egy és csak egyféleképpen mozgatható el úgy a térben, hogy egy a síkban megadott félsík és ennek határán megadott félegyenes előírt helyzetbe, egy adott félsíkba és annak határán adott félegyenesbe jusson.* Nem akarunk támaszkodni a bevezető fejezet olyan kijelentéseire sem, amelyek alátámasztásakor az eredeti VIII. axióma többletét is felhasználtuk.

Ennek az elhatározásnak következménye, hogy a térgeometria elemeinek tárgyalásánál a megszokott okoskodásokat szerepeltetjük és hogy VIII. axiómánk teljes állítását annak szűkebb alakjából kiindulva újból bizonyítjuk majd (lásd 24.8). Kísérő megjegyzéseinkben viszont rámutatunk majd arra, hogy a térgeometria elemeinek a tárgyalása során hogyan lehet hasznosítani azt a többletet, amit ennek a fejezetnek a tárgyalása nyújt (lásd 24.8 B4).

E kettősségnek a befogadását az indokolja, hogy egyrészt meg akarjuk őrizni a kevesebbre támaszkodó, EUKLIDESre visszanyúló, hagyományos tárgyalást, másrészt viszont elfogadjuk és értékeljük a 2.1 B-ben hangsúlyozott pedagógiai szempontokat.

MÁSODIK FEJEZET

A SÍK ELEMI GEOMETRIÁJA

Ebben a fejezetben már hozzákezdünk a geometria rendszeres felépítéséhez: az első fejezet által megadott alapokra támaszkodva minden állításunkat bizonyítani fogjuk. Előszóval alkalmazunk szemléletesen is jól követhető okoskodásokat, bizonyítunk szemléletesen könnyen belátható tényeket, de pusztán a szemléletre hivatkozva nem közlünk már ismereteket.

Tárgyunk ebben a fejezetben a sík geometriája, síkbeli alakzatok vizsgálata lesz. Csak az *elemi geometria* (szintétikus geometria) módszerével dolgozunk, s ez azt jelenti, hogy közvetlenül geometriai alapismereteinkre és a geometriai alakzatok kapcsolataira építve okoskodunk. Más az *analitikus geometria* módszere, amely az alakzatokat mennyiségi kapcsolatokkal jellemzi, és a geometriai ismeretekhez az ilyen mennyiségi kapcsolatok vizsgálatának a közvetítésével jut el. Az analitikus geometriával mi e könyv második felében foglalkozunk. Hangsúlyozzuk azonban, hogy a két módszer között éles határvonalat vonni aligha lehet, s hogy egyes alakzatok mértékét az elemi geometria is bevezeti, és ezekkel a mértékekkel számolva okoskodik is.

Minthogy ebben a fejezetben csak síkgeometriával foglalkozunk, nem hangsúlyozzuk minden esetben, hogy kijelentéseink csak a síkra, egy sík alakzataira vonatkoznak.

7. § Egyszerű szimmetrikus alakzatok

Egyszerű tengelyszimmetrikus síkbeli alakzatokkal foglalkozunk, s ezekből alapvető tényeket olvasunk ki.

7.1 Tétel. *Egy a szimmetriatengelyt metsző egyenes akkor és csak akkor tükörképe önmagának, ha a szimmetriatengelyt merőlegesen metszi.*

Bizonyítás. a) Ha egy egyenes merőlegesen metszi a tengelyt, akkor önmagának tükörképe, mert a tükrözés a tengely pontjait helybenhagyja, és a derékszöget derékszögbe viszi át, a metszéspontban pedig a tengelyre csak egy merőleges állítható.

b) Ha egy egyenes metszi a tengelyt és önmagának tükörképe, akkor merőleges a tengelyre, mert ez esetben a metszéspontban keletkező mellékszögek egymás tükörképei, tehát egyenlők, és tudjuk, hogy ha két mellékszög egyenlő, akkor azok derékszögek. —

Tétel. *Egy pontból egy egyenesre egy és csak egy merőleges egyenes bocsátható.*

Bizonyítás. Ha a pont rajta van az egyenesen, akkor állításunk nyilván igaz.