

05.

PROPOSTAS DE RESOLUÇÃO MANUAL

Materials disponíveis em

20 AULA DIGITAL
PROFESSOR

Tema I – Introdução à lógica bivalente e à teoria de conjuntos

Unidade 1 – Proposições

Páginas 13 a 29

1.

- a) “ 3^2 ” é uma designação.
- b) “ $3^2 = 6$ ” é uma proposição.
- c) “2 é o único número primo par” é uma proposição.
- d) “A reta r que passa pelo ponto A e é perpendicular à reta s ” é uma designação.
- e) “ $\sqrt{2} > \pi$ ” é uma proposição.

2.

- b) “ $3^2 = 6$ ” é uma proposição falsa.
- c) “2 é o único número primo par” é uma proposição verdadeira.
- e) “ $\sqrt{2} > \pi$ ” é uma proposição falsa.

3. Por exemplo:

- a) p : “Paris é a capital de Espanha”.
 $\sim p$: “Paris não é a capital de Espanha.”
- b) p : “Saramago escreveu o *Memorial do Convento*”.
 $\sim p$: “Não é verdade que Saramago tenha escrito o *Memorial do Convento*”.
- c) p : “Todas as crianças gostam de brincar com legos”.
 $\sim p$: “Nem todas as crianças gostam de brincar com legos”.

4.

- a) p : “12 é um número natural.” – proposição verdadeira
 $\sim p$: “12 não é um número natural.” – proposição falsa
- b) p : “ $1 + 2 \times 3 = 9$ ” – proposição falsa
 $\sim p$: “ $1 + 2 \times 3 \neq 9$ ” – proposição verdadeira
- c) p : “ $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ ” – proposição falsa
 $\sim p$: “ $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ ” – proposição verdadeira
- d) p : “3 não é um divisor comum de 6 e de 9.” – proposição falsa
 $\sim p$: “3 é um divisor comum de 6 e de 9.” – proposição verdadeira
- e) p : “Nem todos os números múltiplos de 5 terminam em 5.” – proposição verdadeira
 $\sim p$: “Todos os números múltiplos de 5 terminam em 5.” – proposição falsa

5. p : “As rosas são vermelhas”.

q : “As margaridas são brancas”.

- a) $p \wedge q$: “As rosas são vermelhas e as margaridas são brancas”.
- b) $(\sim p) \wedge q$: “As rosas não são vermelhas e as margaridas são brancas”.

6.

- a) “As rosas são vermelhas e as margaridas não são brancas”: $p \wedge (\sim q)$
- b) “Nem as rosas são vermelhas nem as margaridas são brancas”: $(\sim p) \wedge (\sim q)$

7. p : “7 é um número racional”.

q : “ $\frac{1}{3}$ é um número inteiro”.

a) $p \vee q$: “7 é um número racional ou $\frac{1}{3}$ é um número inteiro”.

b) $(\sim p) \vee q$: “7 não é um número racional ou $\frac{1}{3}$ é um número inteiro”.

c) $(\sim p) \vee (\sim q)$: “7 não é um número racional ou $\frac{1}{3}$ não é um número inteiro”.

8. p : “7 é um número racional.” – proposição verdadeira

q : “ $\frac{1}{3}$ é um número inteiro.” – proposição falsa

Assim:

$\sim p$ é uma proposição falsa, pois $\sim V \Leftrightarrow F$.

$\sim q$ é uma proposição verdadeira, pois $\sim F \Leftrightarrow V$.

$p \vee q$ é uma proposição verdadeira, pois $(V \vee F) \Leftrightarrow V$.

$\sim p \vee q$ é uma proposição falsa, pois $(F \vee F) \Leftrightarrow F$.

$\sim p \vee \sim q$ é uma proposição verdadeira, pois $(F \vee V) \Leftrightarrow V$.

9. A conjunção de duas proposições ($p \wedge q$) é verdadeira apenas no caso de ambas as proposições serem verdadeiras; assim, tem-se que p é uma proposição verdadeira e q é uma proposição verdadeira.

Logo:

a) p é uma proposição verdadeira.

b) $\sim q$ é uma proposição falsa, pois é a negação de uma proposição verdadeira ($\sim V \Leftrightarrow F$).

c) $p \vee q$ é uma proposição verdadeira, pois é a disjunção de duas proposições verdadeiras ($(V \vee V) \Leftrightarrow V$).

d) $\sim(p \vee q)$ é uma proposição falsa, pois é a negação de uma proposição verdadeira ($\sim(V \vee V) \Leftrightarrow (\sim V) \Leftrightarrow F$).

e) $p \wedge \sim q$ é uma proposição falsa, pois é a conjunção de uma proposição verdadeira com uma proposição falsa ($(V \wedge F) \Leftrightarrow F$).

f) $p \wedge F$ é uma proposição falsa, pois é a conjunção de uma proposição verdadeira com uma proposição falsa ($(V \wedge F) \Leftrightarrow F$).

g) $p \vee F$ é uma proposição verdadeira, pois é a disjunção de uma proposição verdadeira com uma proposição falsa ($(V \vee F) \Leftrightarrow V$).

10.

a) “15 é um número primo” é uma proposição falsa.

“15 é um número ímpar” é uma proposição verdadeira.

Assim, a conjunção das duas “15 é um número primo e ímpar” é uma proposição falsa.

b) “2 é um divisor de 100” e “5 é um divisor de 100” são ambas proposições verdadeiras; assim, a conjunção das duas “tanto 2 como 5 são divisores de 100” é uma proposição verdadeira.

c) “16 é múltiplo de 5” e “16 é múltiplo de 6” são ambas proposições falsas; assim, a disjunção das duas “16 é múltiplo de 5 ou de 6” é uma proposição falsa.

- d) " $\pi > 3,14$ " é uma proposição verdadeira e " $-1 < -2$ " é uma proposição falsa; assim, a disjunção das duas " $\pi > 3,14 \vee -1 < -2$ " é uma proposição verdadeira.

11.

a) $\sim p \vee q$

| p | q | $\sim p$ | $\sim p \vee q$ |
|-----|-----|----------|-----------------|
| V | V | F | V |
| V | F | F | F |
| F | V | V | V |
| F | F | V | V |

b) $\sim (p \vee q)$

| p | q | $p \vee q$ | $\sim (p \vee q)$ |
|-----|-----|------------|-------------------|
| V | V | V | F |
| V | F | V | F |
| F | V | V | F |
| F | F | F | V |

c) $p \wedge \sim q$

| p | q | $\sim q$ | $p \wedge \sim q$ |
|-----|-----|----------|-------------------|
| V | V | F | F |
| V | F | V | V |
| F | V | F | F |
| F | F | V | F |

12. $p \vee (\sim p \vee q)$

| p | q | $\sim p$ | $\sim p \vee q$ | $p \vee (\sim p \vee q)$ |
|-----|-----|----------|-----------------|--------------------------|
| V | V | F | V | V |
| V | F | F | F | V |
| F | V | V | V | V |
| F | F | V | V | V |

$p \vee (\sim p \vee q)$ é uma tautologia, pois verifica-se que é verdadeira quaisquer que sejam os valores lógicos das proposições p e q .

13. $(p \wedge (q \vee r)) \Leftrightarrow ((p \wedge q) \vee (p \wedge r))$, quaisquer que sejam as proposições p , q e r .

| P | q | r | $q \vee r$ | $p \wedge (q \vee r)$ | $p \wedge q$ | $p \wedge r$ | $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ |
|-----|-----|-----|------------|-----------------------|--------------|--------------|----------------------------------|
| V | V | V | V | V | V | V | V |
| V | V | F | V | V | V | F | V |
| V | F | V | V | V | F | V | V |
| V | F | F | F | F | F | F | F |
| F | V | V | V | F | F | F | F |
| F | V | F | V | F | F | F | F |
| F | F | V | V | F | F | F | F |
| F | F | F | F | F | F | F | F |

Observa-se que as colunas correspondentes às proposições $p \wedge (q \vee r)$ e $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ são iguais. Logo, $(p \wedge (q \vee r)) \Leftrightarrow ((p \wedge q) \vee (p \wedge r))$, como queríamos demonstrar.

14.

a) $p \wedge (\sim p \wedge q)$

$$\Leftrightarrow (p \wedge \sim p) \wedge q$$

$$\Leftrightarrow F \wedge q \Leftrightarrow F$$

$$\text{b)} p \vee (\sim p \vee q)$$

$$\Leftrightarrow (p \vee \sim p) \vee q$$

$$\Leftrightarrow V \vee q$$

$$\Leftrightarrow V$$

$$\text{c)} p \wedge (\sim p \vee q)$$

$$\Leftrightarrow (p \wedge \sim p) \vee (p \wedge q)$$

$$\Leftrightarrow F \vee (p \wedge q)$$

$$\Leftrightarrow p \wedge q$$

15. $\sim(p \vee q) \Leftrightarrow (\sim p \wedge \sim q)$, quaisquer que sejam as proposições p e q .

| p | q | $p \vee q$ | $\sim(p \vee q)$ | $\sim p$ | $\sim q$ | $\sim p \wedge \sim q$ |
|-----|-----|------------|------------------|----------|----------|------------------------|
| V | V | V | F | F | F | F |
| V | F | V | F | F | V | F |
| F | V | V | F | V | F | F |
| F | F | F | V | V | V | V |

Observa-se que as colunas correspondentes às proposições $\sim(p \vee q)$ e $(\sim p \wedge \sim q)$ são iguais.

Logo, $\sim(p \vee q) \Leftrightarrow (\sim p \wedge \sim q)$, como queríamos demonstrar.

16.

$$\text{a)} \sim(p \vee \sim q) \Leftrightarrow (\sim p \wedge q)$$

$$\text{b)} \sim(\sim p \wedge q) \Leftrightarrow (p \vee \sim q)$$

$$\text{c)} \sim(p \vee (q \wedge \sim r)) \Leftrightarrow (\sim p \wedge \sim(q \wedge \sim r)) \Leftrightarrow (\sim p \wedge (\sim q \vee r))$$

17. p : "A Ana é escritora."

q : "A Ana é famosa."

$$\text{a)} \sim(p \wedge q) \Leftrightarrow (\sim p \vee \sim q)$$

"A Ana não é escritora ou não é famosa."

$$\text{b)} \sim(p \vee q) \Leftrightarrow (\sim p \wedge \sim q)$$

"A Ana não é escritora nem é famosa."

$$\text{c)} \sim(\sim p \vee q) \Leftrightarrow (p \wedge \sim q)$$

"A Ana é escritora e não é famosa".

$$\text{d)} \sim(\sim p \wedge \sim q) \Leftrightarrow (p \vee q)$$

"A Ana é escritora ou é famosa."

18. p : "O João gosta de Matemática".

q : "O João faz muitos exercícios".

r : "O João não tem bons resultados".

a) i. "Se o João faz muitos exercícios, então gosta de Matemática.": $q \Rightarrow p$

ii. "Se o João tem bons resultados, então faz muitos exercícios.": $\sim r \Rightarrow q$

iii. "Se o João gosta de Matemática e faz muitos exercícios, então tem bons resultados.":

$$(p \wedge q) \Rightarrow \sim r$$

b) i. $(\sim p \vee r) \Rightarrow \sim q$

"Se o João não gosta de Matemática ou não tem bons resultados, então o João não faz muitos exercícios."

ii. $p \Rightarrow (q \wedge \sim r)$

“Se o João gosta de Matemática, então faz muitos exercícios e tem bons resultados.”

19. A implicação $p \Rightarrow q$ entre duas proposições é falsa apenas no caso em que o antecedente (p) é verdadeiro e o conseqüente (q) é falso. Assim:

- a) p é uma proposição verdadeira.
- b) $\sim q$ é uma proposição verdadeira, pois é a negação de uma proposição falsa.
- c) $p \vee q$ é uma proposição verdadeira, pois é a disjunção de uma proposição verdadeira (p) com uma proposição falsa (q).
- d) $\sim p \vee q$ é uma proposição falsa, pois é a disjunção de duas proposições falsas ($\sim p$ e q).
- e) $p \wedge \sim q$ é uma proposição verdadeira, pois é a conjunção de duas proposições verdadeiras (p e $\sim q$).
- f) $q \Rightarrow p$ é uma proposição verdadeira, pois é a implicação entre duas proposições cujo antecedente (q) é uma proposição falsa e o conseqüente (p) é uma proposição verdadeira.
- g) $\sim q \Rightarrow \sim p$ é uma proposição falsa, pois é a implicação entre duas proposições cujo antecedente ($\sim q$) é uma proposição verdadeira e o conseqüente ($\sim p$) é uma proposição falsa.

20. $((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$ é uma tautologia.

| P | q | r | $p \Rightarrow q$ | $q \Rightarrow r$ | $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)$ | $p \Rightarrow r$ | $((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$ |
|-----|-----|-----|-------------------|-------------------|--|-------------------|--|
| V | V | V | V | V | V | V | V |
| V | V | F | V | F | F | F | V |
| V | F | V | F | V | F | V | V |
| V | F | F | F | V | F | F | V |
| F | V | V | V | V | V | V | V |
| F | V | F | V | F | F | V | V |
| F | F | V | V | V | V | V | V |
| F | F | F | V | V | V | V | V |

21. Sabe-se que $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim p \vee q)$. Logo, $(\sim p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p \vee q)$.

Assim, a disjunção $p \vee q$ pode ser escrita utilizando a implicação e a negação como $\sim p \Rightarrow q$.

22. $(p \Rightarrow q)$: “se 10 é um número par, então é divisível por 2”.

$\sim(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p \wedge \sim q)$: “10 é um número par e não é divisível por 2”.

23.

a) $\sim(p \Rightarrow \sim q)$

$\Leftrightarrow (p \wedge \sim(\sim q))$

$\Leftrightarrow (p \wedge q)$

b) $\sim(\sim p \Rightarrow q)$

$\Leftrightarrow (\sim p \wedge \sim q)$

c) $(p \wedge q) \Rightarrow r$

$\Leftrightarrow (p \wedge q \wedge \sim r)$

d) $p \Rightarrow (q \wedge r)$

$\Leftrightarrow (p \wedge \sim(q \wedge r))$

$\Leftrightarrow (p \wedge (\sim q \vee \sim r))$

24.

a) $p \Rightarrow (p \vee q)$

$$\Leftrightarrow (\sim p \vee (p \vee q))$$

$$\Leftrightarrow ((\sim p \vee p) \vee q)$$

$$\Leftrightarrow V \vee q$$

$$\Leftrightarrow V \text{ (tautologia)}$$

b) $p \Rightarrow (p \wedge q)$

$$\Leftrightarrow (\sim p \vee (p \wedge q))$$

$$\Leftrightarrow ((\sim p \vee p) \wedge (\sim p \vee q))$$

$$\Leftrightarrow (V \wedge (\sim p \vee q))$$

$$\Leftrightarrow (\sim p \vee q)$$

c) $(p \wedge q) \Rightarrow (p \vee q)$

$$\Leftrightarrow (\sim(p \wedge q) \vee (p \vee q))$$

$$\Leftrightarrow ((\sim p \vee \sim q) \vee (p \vee q))$$

$$\Leftrightarrow ((\sim p \vee p) \vee (\sim q \vee q))$$

$$\Leftrightarrow (V \vee V)$$

$$\Leftrightarrow V \text{ (tautologia)}$$

25. p : “A Ana vai à festa”. q : “A Berta vai à festa”. r : “O Carlos vai à festa”.

a) i. “A Ana vai à festa se e só se o Carlos vai à festa.”: $p \Leftrightarrow r$

ii. “A Berta vai à festa se e só se o Carlos não vai à festa.”: $q \Leftrightarrow \sim r$

b) i. $r \Leftrightarrow (p \wedge q)$: “O Carlos vai à festa se e só se a Ana e a Berta vão à festa.”

ii. $(p \vee \sim r) \Leftrightarrow q$: “A Ana vai à festa ou o Carlos não vai se e só se a Berta vai à festa.”

26.

a) Para a proposição $p \Leftrightarrow q$ ser falsa os valores lógicos das proposições p e q têm de ser diferentes.

Como é referido no enunciado que p é verdadeira, então a proposição q tem de ser falsa.

b) $p \vee q$ é uma proposição verdadeira, visto tratar-se da disjunção de uma proposição verdadeira (p) com uma proposição falsa (q).

c) $p \wedge q$ é uma proposição falsa, visto tratar-se da conjunção de uma proposição verdadeira (p) com uma proposição falsa (q).

d) $p \Rightarrow q$ é uma proposição falsa, visto tratar-se da implicação entre duas proposições cujo antecedente é uma proposição verdadeira (p) e o consequente é uma proposição falsa (q).

e) $\sim(p \wedge \sim q)$ é uma proposição falsa, visto tratar-se da negação de uma proposição verdadeira ($p \wedge \sim q$ é uma proposição verdadeira, pois é a conjunção de duas proposições verdadeiras p e $\sim q$).

f) $\sim p \Rightarrow q$ é uma proposição verdadeira, visto tratar-se da implicação entre duas proposições falsas ($\sim p$ e q).

g) $p \Leftrightarrow \sim q$ é uma proposição verdadeira, visto tratar-se da equivalência entre duas proposições verdadeiras (p e $\sim q$).

$$27. (p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q \wedge q \Rightarrow p)$$

$$\Leftrightarrow (\sim p \vee q) \wedge (\sim q \vee p)$$

$$\Leftrightarrow ((p \vee \sim q) \wedge q) \vee ((p \vee \sim q) \wedge \sim p)$$

$$\Leftrightarrow ((p \wedge q) \vee (\sim q \wedge q)) \vee ((p \wedge \sim p) \vee (\sim q \wedge \sim p))$$

$$\Leftrightarrow ((p \wedge q) \vee F) \vee (F \vee (\sim q \wedge \sim p))$$

$$\Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (\sim q \wedge \sim p)$$

$$\Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q), \text{ como queríamos demonstrar.}$$

$$28. \sim(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow ((p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim p))$$

| p | q | $p \Leftrightarrow q$ | $\sim(p \Leftrightarrow q)$ | $\sim p$ | $\sim q$ | $p \wedge \sim q$ | $q \wedge \sim p$ | $(p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim p)$ |
|-----|-----|-----------------------|-----------------------------|----------|----------|-------------------|-------------------|--|
| V | V | V | F | F | F | F | F | F |
| V | F | F | V | F | V | V | F | V |
| F | V | F | V | V | F | F | V | V |
| F | F | V | F | V | V | F | F | F |

Observa-se que as colunas correspondentes às proposições $\sim(p \Leftrightarrow q)$ e $(p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim p)$ são iguais. Logo, $\sim(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow ((p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim p))$, como queríamos demonstrar.

$$29. (p \Leftrightarrow q) \Rightarrow p$$

$$\Leftrightarrow \sim(p \Leftrightarrow q) \vee p$$

$$\Leftrightarrow ((p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim p)) \vee p \quad (\text{ex. 28, negação da equivalência})$$

$$\Leftrightarrow [(p \wedge \sim q) \vee q] \wedge [(p \wedge \sim q) \vee \sim p] \vee p$$

$$\Leftrightarrow [(q \vee p) \wedge (q \vee \sim q)] \wedge [(\sim p \vee p) \wedge (\sim p \vee \sim q)] \vee p$$

$$\Leftrightarrow [(q \vee p) \wedge V] \wedge (V \wedge (\sim p \vee \sim q)) \vee p$$

$$\Leftrightarrow [(q \vee p) \wedge (\sim p \vee \sim q)] \vee p$$

$$\Leftrightarrow [p \vee (q \vee p)] \wedge [p \vee (\sim p \vee \sim q)]$$

$$\Leftrightarrow [(p \vee p) \vee q] \wedge [(p \vee \sim p) \vee \sim q]$$

$$\Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (V \vee \sim q)$$

$$\Leftrightarrow (p \vee q) \wedge V$$

$$\Leftrightarrow p \vee q$$

30.

a) $a \Rightarrow b \vee c$

b) $(a \Rightarrow b) \vee c$

c) $a \Leftrightarrow b \Rightarrow \sim c$

d) $a \vee (b \wedge \sim c) \Leftrightarrow a$

e) $(\sim a \Rightarrow b) \wedge c$

Unidade 2 – Condições e conjuntos

Páginas 30 a 61

31.

a) $A = 4 \pi r^2$

Constantes: 4 e π

Variáveis: A e r

b) $A = \pi r g$

Constante: π

Variáveis: A , r e g

32. “ $-2x + 1 > 9$ ”, “ $3x + y = z$ ”, “o simétrico de x é y ” e “ $x \in]-\infty, 2]$ ” são expressões proposicionais, pois são expressões com variáveis que se transformam numa proposição quando se substituem as variáveis por objetos convenientes.

33.

a) $p(x)$: “ $x^2 + 1$ é um número par”.

Por exemplo:

- Se $x = 3$, $p(x)$ transforma-se numa proposição verdadeira ($3^2 + 1$ é um número par).
- Se $x = 4$, $p(x)$ transforma-se numa proposição falsa ($4^2 + 1$ é um número par).

b) $p(x)$: “ $x^2 - x - 6 = 0$ ”

Por exemplo:

- Se $x = -2$, $p(x)$ transforma-se numa proposição verdadeira ($(-2)^2 + (-2) - 6 = 0$).
- Se $x = 0$, $p(x)$ transforma-se numa proposição falsa ($0^2 - 0 - 6 = 0$).

c) $p(x, y)$: “ $x + y > x$ ”

Por exemplo:

- Se $x = 1$ e $y = 2$, $p(x, y)$ transforma-se numa proposição verdadeira ($1 + 2 > 1$).
- Se $x = 1$ e $y = -3$, $p(x, y)$ transforma-se numa proposição falsa ($1 + (-3) < 1$).

d) $p(x)$: “ $x^2 + 1$ é um número positivo”.

Qualquer concretização de x por um número real transforma a expressão proposicional numa proposição verdadeira.

e) $p(x)$: “ $x - 2 = x + 3$ ”

Qualquer concretização de x por um número real transforma a expressão proposicional numa proposição falsa.

34.

a) “ $3x = 10$ ” é uma expressão proposicional.

b) “O triplo de x é superior a 10” é uma expressão proposicional.

c) “O triplo de x ” é uma expressão designatória.

d) “ $x + \pi$ ” é uma expressão designatória.

e) “ $x < -5 \vee x \geq \frac{1}{4}$ ” é uma expressão proposicional.

f) “ $x \notin \{1, 3, 5, 15\}$ ” é uma expressão proposicional.

35.

- a) Em \mathbb{N} , $10x > 1$ é uma condição universal, pois qualquer concretização de x por um número natural transforma a expressão proposicional $10x > 1$ numa proposição verdadeira.

$$10x > 1 \Leftrightarrow x > \frac{1}{10}$$

- b) Em \mathbb{Z} , $x^2 \neq 13$ é uma condição universal, pois qualquer concretização de x por um número inteiro transforma a expressão proposicional $x^2 \neq 13$ numa proposição verdadeira.

$$x^2 \neq 13 \Leftrightarrow x \neq \sqrt{13} \wedge x \neq -\sqrt{13}$$

- c) Em \mathbb{R}^- , $x^2 = 13$ é uma condição possível, mas não universal, pois existe pelo menos um número real negativo que transforma a expressão proposicional $x^2 = 13$ numa proposição verdadeira.

$$x^2 = 13 \Leftrightarrow x = \sqrt{13} \vee x = -\sqrt{13}$$

36.

- a) $x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow x(x + 2) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -2$

Em \mathbb{N} , $x^2 + 2x = 0$ é uma condição impossível, pois qualquer concretização de x por um número natural transforma a expressão proposicional $x^2 + 2x = 0$ numa proposição falsa.

- b) $x^2 + 2 < 0 \Leftrightarrow x^2 < -2$

Em \mathbb{R} , $x^2 + 2 < 0$ é uma condição impossível, pois qualquer concretização de x por um número real transforma a expressão proposicional $x^2 + 2 < 0$ numa proposição falsa.

- c) $(x - 3)(x + 1) = 0 \Leftrightarrow x - 3 = 0 \vee x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 3 \vee x = -1$

Em $[4, +\infty[$, $(x - 3)(x + 1) = 0$ é uma condição impossível, pois qualquer concretização de x por um número real pertencente ao intervalo $[4, +\infty[$ transforma a expressão proposicional $(x - 3)(x + 1) = 0$ numa proposição falsa.

37. $2x < 10 \Leftrightarrow x < 5$

- a) Em \mathbb{R} , por exemplo, " $2x < 10$ " é uma condição possível mas não universal.

- b) Em $]-\infty, 5[$, por exemplo, " $2x < 10$ " é uma condição universal.

- c) Em $\{5, 7, 10\}$, por exemplo, " $2x < 10$ " é uma condição impossível.

38.

- a) $(x - 1)(x + 1) = x^2 - 1$ (caso notável)

$(x - 1)(x + 1) = x^2 - 1$ é uma condição universal em \mathbb{N} , em \mathbb{Z} e em \mathbb{R} .

- b) $x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$x^2 = 0$ é uma condição impossível em \mathbb{N} e é uma condição possível em \mathbb{Z} e em \mathbb{R} .

- c) $x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -1$

$x^2 + 1 = 0$ é uma condição impossível em \mathbb{N} , em \mathbb{Z} e em \mathbb{R} .

- d) $-x < 0 \Leftrightarrow x > 0$

$-x < 0$ é uma condição universal em \mathbb{N} e é uma condição possível em \mathbb{Z} e em \mathbb{R} .

39.

a) Por exemplo:

- Se $x = 6$, a expressão proposicional anterior transforma-se numa proposição verdadeira: (6 é múltiplo de 2 \wedge 6 é múltiplo de 3) $((V \vee V) \Leftrightarrow V)$
- Se $x = 4$, a expressão proposicional anterior transforma-se numa proposição falsa: (4 é múltiplo de 2 \wedge 4 é múltiplo de 3) $((V \wedge F) \Leftrightarrow F)$

b) Por exemplo:

- Se $(x, y) = (-1, 2)$, a expressão proposicional anterior transforma-se numa proposição verdadeira: $(2 \times (-1) + 2 = 0 \wedge -(-1) + 2 \times 2 = 5)$ $((V \wedge V) \Leftrightarrow V)$
- Se $(x, y) = (0, 1)$, a expressão proposicional anterior transforma-se numa proposição falsa: $(2 \times 0 + 1 = 0 \wedge -0 + 2 \times 1 = 5)$ $((F \wedge F) \Leftrightarrow F)$

40.

a) Por exemplo:

- Se $x = 2$, a expressão proposicional anterior transforma-se numa proposição verdadeira: (2 é múltiplo de 2 \vee 2 é múltiplo de 3) $((V \vee F) \Leftrightarrow V)$
- Se $x = 5$, a expressão proposicional anterior transforma-se numa proposição falsa: (5 é múltiplo de 2 \vee 5 é múltiplo de 3) $((F \vee F) \Leftrightarrow F)$

b) Por exemplo:

- Se $(x, y) = (0, 0)$, a expressão proposicional anterior transforma-se numa proposição verdadeira: $(0 + 0 = 0 \vee 0 + 0 = 5)$ $((V \vee F) \Leftrightarrow V)$
- Se $(x, y) = (1, 0)$, a expressão proposicional anterior transforma-se numa proposição falsa: $(2 \times 1 + 0 = 0 \vee -1 + 2 \times 0 = 5)$ $((F \vee F) \Leftrightarrow F)$

c) Por exemplo:

- Se $x = 2$, a expressão proposicional anterior transforma-se numa proposição verdadeira: $(\sim(2 > 2))$ $(\sim F \Leftrightarrow V)$
- Se $x = 5$, a expressão proposicional anterior transforma-se numa proposição falsa: $\sim(5 > 2)$ $(\sim V \Leftrightarrow F)$

41.

a) " $x = x$ " é uma condição universal.

" $x \neq x$ " é uma condição impossível.

" $x \in \mathbb{Z}^-$ " é uma condição possível, mas não universal.

" $x \in \mathbb{Q}$ " é uma condição possível, mas não universal.

" $x \in \emptyset$ " é uma condição impossível.

" $x \notin \emptyset$ " é uma condição universal.

b) i. " $x = x \wedge x \in \emptyset$ " é uma condição impossível, pois é a conjunção de uma condição (neste caso, universal, $x = x$) com uma condição impossível ($x \in \emptyset$).

ii. " $x \notin \emptyset \vee x \in \mathbb{Q}$ " é uma condição universal, pois é a disjunção de uma condição universal ($x \notin \emptyset$) com uma condição (neste caso, possível, $x \in \mathbb{Q}$).

iii. " $x \neq x \wedge x \in \mathbb{Z}^-$ " é uma condição impossível, pois é a conjunção de uma condição impossível ($x \neq x$) com uma condição (neste caso, possível, $x \in \mathbb{Z}^-$).

- iv. " $x \in \mathbb{Q} \vee x \in \emptyset$ " é uma condição possível, mas não universal, pois é a disjunção de uma condição possível ($x \in \mathbb{Q}$) com uma condição (neste caso, impossível, $x \in \emptyset$).
- v. " $x \neq x \vee x \notin \emptyset$ " é uma condição universal, pois é a disjunção de uma condição (neste caso impossível, $x \neq x$) com uma condição universal ($x \notin \emptyset$).

42.

- a) " $x^2 = 0 \vee -x < 0$ " é uma condição possível em \mathbb{R} , visto tratar-se da disjunção de duas condições possíveis em \mathbb{R} .
- b) " $x^2 + 1 = 0 \wedge x^2 = 0$ " é uma condição impossível em \mathbb{R} , visto tratar-se da conjunção de uma condição impossível em \mathbb{R} ($x^2 + 1 = 0$) com outra condição, neste caso, possível em \mathbb{R} ($x^2 = 0$).
- c) " $x^2 + 1 = 0 \wedge (x - 1)(x + 1) = x^2 - 1$ " é uma condição impossível em \mathbb{R} , visto tratar-se da conjunção de uma condição impossível em \mathbb{R} ($x^2 + 1 = 0$) com outra condição, neste caso, universal em \mathbb{R} ($(x - 1)(x + 1) = x^2 - 1$).
- d) " $x^2 + 1 = 0 \vee -x < 0$ " é uma condição possível em \mathbb{R} , visto tratar-se da disjunção de uma condição, neste caso impossível em \mathbb{R} ($x^2 + 1 = 0$) com uma condição possível em \mathbb{R} ($-x < 0$).
- e) " $x^2 + 1 = 0 \vee (x - 1)(x + 1) = x^2 - 1$ " é uma condição universal em \mathbb{R} , visto tratar-se da disjunção de uma condição, neste caso impossível em \mathbb{R} ($x^2 + 1 = 0$) com uma condição universal em \mathbb{R} ($(x - 1)(x + 1) = x^2 - 1$).

43.

- a) Para $x = 2$, obtém-se as proposições $2^2 = 4$ e $2 = 2$, ambas verdadeiras. Para qualquer concretização da variável x por um valor diferente de 2, obtém-se proposições falsas. Assim, a condição $x^2 = 4 \Leftrightarrow x = 2$ é universal em \mathbb{N} .
- b) Se substituirmos x por 1 (respetivamente 2 ou 3) as condições $2x \leq 6$ e $x \in \{1, 2, 3\}$ transformam-se em proposições verdadeiras. Para qualquer concretização da variável x por um valor diferente de 1, 2 ou 3, obtém-se proposições falsas. Assim, a condição $2x \leq 6 \Leftrightarrow x \in \{1, 2, 3\}$ é universal em \mathbb{N} .

44.

- a) A condição $x^2 = 4 \Leftrightarrow x = 2$ não é universal em \mathbb{R} . Por exemplo, para $x = -2$, a condição $x^2 = 4$ transforma-se numa proposição verdadeira, enquanto que, para a mesma concretização da variável, a condição $x = 2$ transforma-se numa proposição falsa.
- b) A condição $x^2 = 4 \Leftrightarrow x = 2 \vee x = -2$ é universal em \mathbb{R} , pois $x^2 = 4$ e $x = 2 \vee x = -2$ tomam o mesmo valor lógico em toda a concretização das variáveis.
- c) A condição $2x \leq 6 \Leftrightarrow x \in \{1, 2, 3\}$ não é universal em \mathbb{R} . Por exemplo, para $x = 0$, a condição $2x \leq 6$ transforma-se numa proposição verdadeira, enquanto que, para a mesma concretização da variável, a condição $x \in \{1, 2, 3\}$ transforma-se numa proposição falsa.
- d) A condição $2x \leq 6 \Leftrightarrow x \in]-\infty, 3]$ é universal em \mathbb{R} , pois $2x \leq 6$ e $x \in]-\infty, 3]$ tomam o mesmo valor lógico em toda a concretização das variáveis.

45.

- a) A condição $x < 2 \Rightarrow x < 4$ é universal em \mathbb{R} , pois qualquer concretização da variável x por um número real que verifique a condição $x < 2$, verifica igualmente a condição $x < 4$.

- b) A condição $x < 4 \Rightarrow x < 2$ não é universal em \mathbb{R} , pois nem toda a concretização da variável x por um número real que verifique a condição $x < 4$ verifica a condição $x < 2$. Por exemplo, se $x = 3$, $x < 4$ transforma-se numa proposição verdadeira, mas $x < 2$ transforma-se numa proposição falsa.
- c) A condição $x = 1 \Rightarrow x^2 = 1$ é universal em \mathbb{R} , pois qualquer concretização da variável x por um número real que verifique a condição $x = 1$, verifica igualmente a condição $x^2 = 1$.
- d) A condição $x^2 = 1 \Rightarrow x = 1$ não é universal em \mathbb{R} , pois nem toda a concretização da variável x por um número real que verifique a condição $x^2 = 1$ verifica a condição $x = 1$. Por exemplo, se $x = -1$, $x^2 = 1$ transforma-se numa proposição verdadeira, mas $x = 1$ transforma-se numa proposição falsa. Logo, não é universal em \mathbb{R} .

46.

- a) $x = 3 \Rightarrow x^2 = 9$
 b) $x^2 = 9 \Leftarrow x = 3$
 c) $x^2 = 9 \Leftrightarrow x = 3 \vee x = -3$
 d) $x > 3 \Rightarrow x^2 > 9$
 e) $x = 3 \Leftrightarrow x^3 = 27$

47.

- a) " $x^2 = 1 \Leftrightarrow x = 1$ " é uma proposição falsa, pois $-1 \in \mathbb{R}$ e $(-1)^2 = 1 \Leftrightarrow -1 = 1$ é uma proposição falsa.
- b) " $x^4 = 16 \Leftrightarrow x = 2$ " é uma proposição falsa, pois $-2 \in \mathbb{R}$ e $(-2)^4 = 16 \Leftrightarrow -2 = 2$ é uma proposição falsa.
- c) " $x^2 > 9 \Leftrightarrow x > 3$ " é uma proposição falsa, pois $-4 \in \mathbb{R}$ e $(-4)^2 > 9 \Leftrightarrow -4 > 3$ é uma proposição falsa.
- d) " $|x-1| = 2 \Leftrightarrow x-1 = 2$ " é uma proposição falsa, pois $-1 \in \mathbb{R}$ e $|-1-1| = 2 \Leftrightarrow -1-1 = 2$ é uma proposição falsa.

48.

- a) Ser peixe é condição suficiente para ter guelras.
 " x é peixe $\Rightarrow x$ tem guelras"
- b) Ser retângulo é condição necessária para ser quadrado.
 " x é quadrado $\Rightarrow x$ é retângulo"
- c) É condição necessária para que dois lados de um triângulo sejam iguais que os ângulos opostos sejam iguais.
 "(Dois lados de um triângulo são iguais) \Rightarrow (os ângulos opostos são iguais)"

49.

- a) $x > 3 \Rightarrow x^2 > 9$ " $x > 3$ " é condição suficiente para " $x^2 > 9$ ".
 b) $x(x-1) = 0 \Leftarrow x = 1$ " $x(x-1)$ " é condição necessária para " $x = 1$ ".
 c) $x^2 = y^2 \Leftrightarrow x = y \vee x = -y$ " $x^2 = y^2$ " é condição necessária e suficiente para " $x = y \vee x = -y$ ".

50.

a) $\forall x \in \mathbb{N}, x + 1 \geq 2$

“Qualquer que seja o número natural x , tem-se $x + 1 \geq 2$.” – proposição verdadeira

b) $\forall x \in \mathbb{R}, x + 1 \geq 2$

“Para todo o número real x , tem-se $x + 1 \geq 2$.” – proposição falsa

c) $\forall x \in \mathbb{R}, |x| \geq 0$

“O valor absoluto de um número x é superior ou igual a zero, qualquer que seja o número real x .” – proposição verdadeira

51.

a) $\forall x \in \mathbb{N}, 2x \geq x + 1$

$\forall x, x \in \mathbb{N} \Rightarrow 2x \geq x + 1$

b) $\forall x \in \mathbb{R}, |x| \geq x$

$\forall x, x \in \mathbb{R} \Rightarrow |x| \geq x$

52. Para provar que é falsa a proposição “qualquer número natural que seja múltiplo de 2 é múltiplo de 10”, basta encontrar um número natural que seja múltiplo de 2 e que não seja múltiplo de 10. 4 é um número natural múltiplo de 2 (pois $4 = 2 \times 2$) e não é múltiplo de 10 (pois não existe nenhum número natural k tal que $4 = 10 \times k$). Assim, provamos que a proposição é falsa.

53. Suponhamos que $x > 8$. Como $8 > 0$, tem-se também $x > 0$.

Logo, $x \times x > 8 \times x$ e $x^2 + x > 8x + x$ ou seja, $x^2 + x > 9x$. Uma vez que a partir da hipótese $x > 8$ chegamos à conclusão que $x^2 + x > 9x$, fica provado que se $x > 8$, então $x^2 + x > 9x$.

54.

a) “O quadrado de qualquer número natural é um número par” é uma proposição falsa, pois, por exemplo, 3 é um número natural e o seu quadrado, 9, não é um número par.

b) $\forall x \in \mathbb{R}, x > 0 \vee x < 0$ é uma proposição falsa, pois, por exemplo, $0 \in \mathbb{R}$ e não é verdade que $0 > 0 \vee 0 < 0$.

c) “Todos os divisores de 12 são divisores de 6” é uma proposição falsa, pois, por exemplo, 4 é divisor de 12 e não é divisor de 6.

55.

a) $\exists x \in \mathbb{N}: x^2 - 9 = 0$

“Existe pelo menos um número natural x tal que $x^2 - 9 = 0$ ” – proposição verdadeira

b) $\exists x \in \mathbb{R}: x^2 - 9 = 0$

“Existe pelo menos um número real x tal que $x^2 - 9 = 0$ ” – proposição verdadeira

56. Para provar a implicação, “se $x^2 \geq x$, então $x \leq 0$ ou $x \geq 1$ ”, vamos provar a implicação contrarrecíproca, “se $0 < x < 1$, então $x^2 < x$ ”.

Suponhamos que $0 < x < 1$. Como $x > 0$, então $x \times x < 1 \times x$, ou seja, $x^2 < x$.

Ficou provado que se $0 < x < 1$, então $x^2 < x$. Logo, ficou provado que se $x^2 \geq x$, então $x \leq 0$ ou $x \geq 1$.

57.

a) $\exists x \in \mathbb{N}: 2x = x + 1$

$\exists x: x \in \mathbb{N} \wedge 2x = x + 1$

b) $\exists x \in \mathbb{R}: x^5 = 12$

$\exists x: x \in \mathbb{R} \wedge x^5 = 12$

58.

a) “Existe pelo menos um número inteiro inferior a 10.”

$\exists x \in \mathbb{Z}: x < 10$

b) “Todo o número natural é positivo.”

$\forall x \in \mathbb{N}, x > 0$

c) “Existe pelo menos um número real tal que o dobro é igual à sua metade.”

$\exists x \in \mathbb{R}: 2x = \frac{x}{2}$

59. $\forall x \in \{1, 2, 3\}, 3x$ é ímpar

“3 é ímpar \wedge 6 é ímpar \wedge 9 é ímpar” – proposição falsa

60. $\exists x \in \{1, 2, 3\}: 3x$ é ímpar

“3 é ímpar \vee 6 é ímpar \vee 9 é ímpar” – proposição verdadeira

61.

a) $\sim(\forall x \in \{1, 2, 3\}, 3x \text{ é ímpar}) \Leftrightarrow \exists x \in \{1, 2, 3\}, 3x \text{ não é ímpar}$ – proposição verdadeira

b) $\sim(\exists x \in \mathbb{R}: x + 3 = \frac{x}{2}) \Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R}: x + 3 \neq \frac{x}{2})$ – proposição falsa

c) $\sim(\forall x \in \mathbb{N}, x + 1 > 0) \Leftrightarrow (\exists x \in \mathbb{N}, x + 1 \leq 0)$ – proposição falsa

62.

a) p : “Todos os americanos gostam de comida de plástico”.

$\sim p$: “Existe pelo menos um americano que não gosta de comida de plástico”

b) p : “Existe pelo menos um italiano que não gosta de massa”.

$\sim p$: “Todos os italianos gostam de massa”.

c) p : “Há números naturais cujo triplo é um número primo”.

$\sim p$: “O triplo de qualquer número natural não é um número primo”.

d) p : “Existe um número real que é inferior à sua raiz”.

$\sim p$: “Todos os números reais são superiores ou iguais à sua raiz”.

63. $U = \{6, 7, 8, 10\}$

$a(x)$: “ x é um número composto”.

$b(x)$: “ x admite resto 3 na divisão por 6”.

a) $\forall x \in U, a(x)$ – proposição falsa

$\forall x \in U, b(x)$ – proposição falsa

$\exists x \in U: a(x)$ – proposição verdadeira

$\exists x \in U: b(x)$ – proposição falsa

b) $\sim(\forall x \in U, a(x)) \Leftrightarrow \exists x \in U: \sim a(x)$ – “Existe pelo menos um elemento de U que não é um número composto”.

$\sim(\forall x \in U, b(x)) \Leftrightarrow \exists x \in U: \sim b(x)$ – “Existe pelo menos um elemento de U que não admite resto 3 na divisão por 6”.

$\sim(\exists x \in U : a(x)) \Leftrightarrow \forall x \in U: \sim a(x)$ – “Todo o elemento de U é um número não composto”.

$\sim(\exists x \in U : b(x)) \Leftrightarrow \forall x \in U, \sim b(x)$ – “Todo o elemento de U admite resto diferente de 3 na divisão por 6”.

c) $a(x)$ é possível em U

$b(x)$ é impossível em U

$\sim a(x)$ é possível em U

$\sim b(x)$ é universal em U

64.

a) $\forall x \in \{\pi, \sqrt{2}, 3\}, x$ é natural.

“ π é natural $\wedge \sqrt{2}$ é natural $\wedge 3$ é natural”

b) $\sim(\pi \text{ é natural } \wedge \sqrt{2} \text{ é natural } \wedge 3 \text{ é natural})$

$\Leftrightarrow \pi \text{ não é natural } \vee \sqrt{2} \text{ não é natural } \vee 3 \text{ não é natural}$

$\Leftrightarrow \exists x \in \{\pi, \sqrt{2}, 3\}, x \text{ não é natural}$

65. $A = \{0, 2, \{\}, \{1\}\}$

a) $0 \in A$ é uma afirmação verdadeira, pois 0 é um elemento do conjunto A .

b) $1 \in A$ é uma afirmação falsa, pois 1 não é um elemento do conjunto A .

c) $2 \notin A$ é uma afirmação falsa, pois 2 é um elemento do conjunto A .

d) $\{\} \notin A$ é uma afirmação falsa, pois $\{\}$ é um elemento do conjunto A .

e) $\{1\} \notin A$ é uma afirmação falsa, pois $\{1\}$ é um elemento do conjunto A .

66.

a) $\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47\}$

b) $\{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$

67.

a) $\{1, 3, 5, 7, 9, \dots\}$

b) $\{5, 10, 15, 20, 25, \dots\}$

c) $\{25, 36, 49, 64, 81, 100\}$

68.

a) $\{x \in \mathbb{N}: 2x^2 + x - 1 = 0\}$ é o conjunto dos números naturais que satisfazem a condição

$2x^2 + x - 1 = 0$. Uma vez que:

$$2x^2 + x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \times 2 \times (-1)}}{4}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm 3}{4} \Leftrightarrow x = -1 \vee x = \frac{1}{2}$$

e $-1 \notin \mathbb{N}$ e $\frac{1}{2} \notin \mathbb{N}$, concluímos que não existe nenhum número natural que satisfaça a condição,

logo o conjunto definido em \mathbb{N} por $2x^2 + x - 1$ é o conjunto vazio, $\{\}$.

b) $\{x \in \mathbb{N}: x^2 + x + 1 = 0\}$ é o conjunto dos números naturais que satisfazem a condição

$x^2 + x + 1 = 0$. Uma vez que:

$$x^2 + x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \times 1 \times 1}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} \text{ e } \sqrt{-3} \text{ é uma expressão sem sentido em}$$

\mathbb{R} , significa que não existe nenhum número natural que satisfaça a condição $x^2 + x + 1 = 0$, logo o conjunto definido em \mathbb{N} por esta condição é o conjunto vazio, $\{\}$.

c) $\{x \in \mathbb{N}: 2x - 4 < 6\}$ é o conjunto dos números naturais que satisfazem a condição $2x - 4 < 6$.

Como $2x - 4 < 6 \Leftrightarrow 2x < 10 \Leftrightarrow x < 5$ e $1 \in \mathbb{N}$ e $1 < 5$

$$2 \in \mathbb{N} \text{ e } 2 < 5$$

$$3 \in \mathbb{N} \text{ e } 3 < 5$$

$$4 \in \mathbb{N} \text{ e } 4 < 5$$

concluimos que o conjunto definido em \mathbb{N} por esta condição é $\{1, 2, 3, 4\}$.

d) $\{x \in \mathbb{N}: |1 - 2x| < 4\}$ é o conjunto dos números naturais que satisfazem a condição $|1 - 2x| < 4$.

Como:

$$|1 - 2x| < 4 \Leftrightarrow 1 - 2x < 4 \wedge 1 - 2x > -4$$

$$\Leftrightarrow -2x < 3 \wedge -2x > -5$$

$$\Leftrightarrow x > -\frac{3}{2} \wedge x < \frac{5}{2}$$

e $1 > -\frac{3}{2} \wedge 1 < \frac{5}{2}$ e $2 > -\frac{3}{2} \wedge 2 < \frac{5}{2}$, concluimos que o conjunto definido em \mathbb{N} por esta condição é $\{1, 2\}$.

69.

a) Averiguemos se as condições $\left|x - \frac{1}{2}\right| = \frac{3}{2}$ e $x^2 - x - 2 = 0$ são equivalentes em \mathbb{R} :

$$\left|x - \frac{1}{2}\right| = \frac{3}{2} \Leftrightarrow x - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \vee x - \frac{1}{2} = -\frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \vee x = -\frac{3}{2} + \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = 2 \vee x = -1$$

O conjunto-solução é $\{2, -1\}$.

$$x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \times (-2)}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1 \pm 3}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = 2 \vee x = -1$$

O conjunto-solução é $\{2, -1\}$.

Uma vez que todas as soluções da primeira condição são solução da segunda e vice-versa, concluimos que as duas condições são equivalentes.

b) Averiguemos se as condições $x^2 - 10 = 0$ e $x - \sqrt{10} = 0$ são equivalentes em \mathbb{R} :

$$x^2 - 10 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 10 \Leftrightarrow x = \sqrt{10} \vee x = -\sqrt{10}$$

O conjunto-solução é $\{-\sqrt{10}, \sqrt{10}\}$.

$$x - \sqrt{10} = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{10} \text{ O conjunto-solução é } \{\sqrt{10}\}.$$

Repara que existe uma solução $(-\sqrt{10})$ da primeira condição que não é solução da segunda condição, logo as duas condições não são equivalentes.

70.

a) $\{x \in \mathbb{R}: x^2 + 3 = 4x\}$

$$x^2 + 3 = 4x \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \times 3}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{4 \pm 2}{2} \Leftrightarrow x = 3 \vee x = 1$$

Assim, o conjunto-solução da condição $x^2 + 3 = 4x$ é $\{1, 3\}$.

Logo, $\{x \in \mathbb{R}: x^2 + 3 = 4x\} = \{1, 3\}$.

$\{n \in \mathbb{N}: n \text{ é ímpar} \wedge n < 5\}$ é o conjunto dos números naturais que são ímpares e inferiores a 5.

Como 1 e 3 são os únicos números naturais que obedecem a esta condição, $\{n \in \mathbb{N}: n \text{ é ímpar} \wedge n < 5\} = \{1, 3\}$.

Daqui se conclui que $\{x \in \mathbb{R}: x^2 + 3 = 4x\} = \{1, 3\} = \{n \in \mathbb{N}: n \text{ é ímpar} \wedge n < 5\}$.

b) $\{1, 2, 3, 4\} = \{2, 1, 3, 4\} = \{4, 2, 3, 1, 2, 3\}$, pois têm os mesmos elementos.

71. $U = \{-5, -\sqrt{5}, -1, 0, 1, \sqrt{5}, 5, 25\}$

a) $A = \{-5, -1\}$

b) $\{-\sqrt{5}, -1, 0, 1, \sqrt{5}\}$

c) $C = \{0, 1, 5, 25\}$

d) $D = \{25, 5, 1, 0, 625\}$

72. Por exemplo:

a) $\{3n: n \in \mathbb{N}\}$ ou $\{n \in \mathbb{N}: n \text{ é múltiplo de } 3\}$

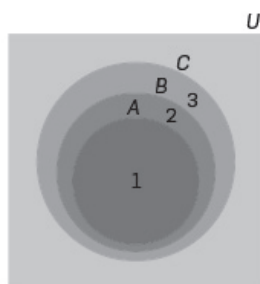
b) $\{x \in \mathbb{R}: |x| = 5\} = \{x \in \mathbb{R}: x = -5 \vee x = 5\}$

c) $\{n \in \mathbb{N}: n \text{ é divisor de } 10\}$

d) $\{x \in \mathbb{R}: |x| < 0\}$

e) $\{x \in \mathbb{R}: |x| \geq 0\}$

73. $A \subset B$ e $B \subset C$



a) $1 \in B$ é necessariamente verdadeira, pois $A \subset B$ e $1 \in A$.

b) $2 \in A$ não é necessariamente verdadeira.

c) $3 \notin A$ não é necessariamente verdadeira.

d) $4 \in B$ não é necessariamente verdadeira.

e) $5 \notin A$ é necessariamente verdadeira, pois $5 \notin B$ e $A \subset B$, logo, se $5 \in A$, então $5 \in B$, o que não acontece.

f) $5 \in C$ não é necessariamente verdadeira.

g) $6 \notin B$ é necessariamente verdadeira, pois $6 \notin C$ e $B \subset C$, logo, se $6 \in B$, então $6 \in C$, o que não acontece.

74. Sejam A , B , C e D os conjuntos definidos pelas condições $a(n)$, $b(n)$, $c(n)$ e $d(n)$, respectivamente.

$$P = A \cap D = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, \dots\} \cap \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} = \{2, 3, 5, 7\}$$

$$Q = B \cap C = \{3, 6, 9, 12, 15, 18, \dots\} \cap \{1, 2, 3, 6, 9, 18\} = \{3, 6, 9, 18\}$$

$$R = C \cup D = \{1, 2, 3, 6, 9, 18, \dots\} \cup \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} = \{1, 2, 3, 6, 9, 18, 4, 5, 7, 8\}$$

$$S = \overline{C} \cap D = \{4, 5, 7, 8, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 19, 20, 21, 22, \dots\} \cap \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} \\ = \{4, 5, 7, 8\}$$

75. $A =] - \infty, 5]$ $B =] - \infty, -\pi]$ $C = \left] -\frac{7}{2}, +\infty[\right.$

a) $A \cup B =] - \infty, 5]$

b) $B \cup C =] - \infty, +\infty[= \mathbb{R}$

c) $A \cap B =] - \infty, -\pi]$

d) $A \cap C = \left] -\frac{7}{2}, 5] \right]$

e) $A \cap (B \cap C) =] - \infty, 5] \cap \left] -\frac{7}{2}, -\pi] \right] = \left] -\frac{7}{2}, -\pi] \right]$

f) $\bar{A} = \overline{] - \infty, 5]} =]5, +\infty[$

g) $\bar{C} = \overline{\left] -\frac{7}{2}, +\infty[\right]} = \left] -\infty, -\frac{7}{2} \right]$

h) $A \setminus B =] - \infty, 5] \setminus] - \infty, -\pi] =] - \pi, 5]$

i) $A \setminus (B \cup C) =] - \pi, 5] \setminus \mathbb{R} = \emptyset$

76.

a) $A = \{x \in \mathbb{N}: 1 - x > 0 \vee 3x - 6 < 12\}$

$$1 - x > 0 \Leftrightarrow 1 > x$$

O conjunto-solução da condição $1 - x > 0$, em \mathbb{N} , é \emptyset .

$$3x - 6 < 12 \Leftrightarrow 3x < 18 \Leftrightarrow x < 6$$

O conjunto-solução da condição $3x - 6 < 12$, em \mathbb{N} , é $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.

$$A = \emptyset \cup \{1, 2, 3, 4, 5\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

b) $B = \{x \in \mathbb{R}: x^2 - x - 2 = 0\}$

$$x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \times (-2)}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm 3}{2} \Leftrightarrow x = 2 \vee x = -1$$

O conjunto-solução da condição $x^2 - x - 2 = 0$, em \mathbb{R} , é $\{2, -1\}$. Logo, $B = \{2, -1\}$.

c) $A \setminus C = \{1, 2, 3, 4, 5\} \setminus (] - \infty, 1[\cup]3, +\infty]) = \{1, 2, 3\}$

d) $A \cap B = \{1, 2, 3, 4, 5\} \cap \{2, -1\} = \{2\}$

e) $B \cap C = \{2, -1\} \cap (] - \infty, 1[\cup]3, +\infty]) = \{-1\}$

f) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\} \cup \{2, -1\} = \{-1, 1, 2, 3, 4, 5\}$

Aprende Fazendo

Páginas 62 a 72

1.

a) p : "O Afonso usa óculos".

q : "O Afonso usa chapéu".

$p \vee q$: "O Afonso usa óculos ou chapéu".

Opção (B)

- b) $\sim p$: "O Afonso não usa óculos". $\sim q$: "O Afonso não usa chapéu".
 $\sim p \wedge \sim q$: "O Afonso não usa óculos e não usa chapéu".

Opção (D)

2. Sabe-se que, dadas duas proposições a e b , o valor lógico da equivalência pode ser obtido a partir dos valores lógicos de a e b , como se encontra resumido na seguinte tabela de verdade:

| a | b | $a \Leftrightarrow b$ |
|-----|-----|-----------------------|
| V | V | V |
| V | F | F |
| F | V | F |
| F | F | V |

Assim, $a \Leftrightarrow b$ é falsa quando e apenas quando a e b têm valores lógicos diferentes.

Opção (C)

3. Das expressões com variáveis apresentadas, a única que não se transforma numa proposição, quando se substitui a variável x por valores reais, é a expressão da opção (B).

Opção (B)

4. $A = \{1, 2\}$

$B = \{2, 1\}$

$C = \{n \in \mathbb{N}: n^2 \leq 9\} = \{1, 2, 3\}$

Assim, $A = B$ e $A \subset C$.

Opção (D)

5. Vamos construir tabelas de verdade de cada uma das proposições presentes nas quatro opções apresentadas:

(A) $(p \wedge q) \Leftrightarrow (\sim p \wedge \sim q)$

| p | q | $\sim p$ | $\sim q$ | $p \wedge q$ | $\sim p \wedge \sim q$ | $p \wedge q \Leftrightarrow (\sim p \wedge \sim q)$ |
|-----|-----|----------|----------|--------------|------------------------|---|
| V | V | F | F | V | F | F |
| V | F | F | V | F | F | V |
| F | V | V | F | F | F | V |
| F | F | V | V | F | V | F |

(B) $\sim(p \wedge q) \Rightarrow (p \vee q)$

| p | q | $p \wedge q$ | $\sim(p \wedge q)$ | $p \vee q$ | $\sim(p \wedge q) \Rightarrow (p \vee q)$ |
|-----|-----|--------------|--------------------|------------|---|
| V | V | V | F | V | V |
| V | F | F | V | V | V |
| F | V | F | V | V | V |
| F | F | F | V | F | F |

(C) $p \Rightarrow (p \vee q)$

| p | q | $p \vee q$ | $p \Rightarrow (p \vee q)$ |
|-----|-----|------------|----------------------------|
| V | V | V | V |
| V | F | V | V |
| F | V | V | V |
| F | F | F | V |

(D) $(p \vee \sim p) \Rightarrow (p \wedge \sim p)$

| p | $\sim p$ | $p \vee \sim p$ | $p \wedge \sim p$ | $(p \vee \sim p) \Rightarrow (p \wedge \sim p)$ |
|-----|----------|-----------------|-------------------|---|
| V | F | V | F | F |
| V | F | V | F | F |
| F | V | V | F | F |
| F | V | V | F | F |

Das proposições apresentadas, observa-se que apenas $p \Rightarrow (p \vee q)$ é verdadeira, quaisquer que sejam os valores lógicos de p e q , sendo, então, a única opção onde está presente uma tautologia.

Opção (C)

6. Sabemos que a proposição $\forall x, p(x) \Rightarrow q(x)$ é equivalente à proposição $\forall x, \sim q(x) \Rightarrow \sim p(x)$ (implicação contrarrecíproca).

Opção (D)

7. Negar a proposição “Todas as crianças acreditam no Pai Natal” equivale a afirmar que “Não é verdade que todas as crianças acreditam no Pai Natal”, ou seja, “Existe pelo menos uma criança que não acredita no Pai Natal”.

Opção (C)

8. A implicação contrarrecíproca da condição “Se um triângulo é retângulo, então não é equilátero” é aquela cujo antecedente é a negação do consequente “não é equilátero” e cujo consequente é a negação do antecedente “é retângulo”. Assim, a implicação contrarrecíproca da implicação apresentada é: “Se um triângulo é equilátero, então não é retângulo”.

Opção (A)

9. Sabe-se que $a \Leftrightarrow b$ é uma proposição falsa, portanto, a e b têm valores lógicos diferentes (a é verdadeira e b é falsa ou vice-versa). Assim:

(A) $a \wedge b$ é uma proposição falsa.

(B) $a \vee b$ é uma proposição verdadeira.

(C) $\sim a \wedge \sim b$ é uma proposição falsa.

(D) $a \Rightarrow b$ é uma proposição falsa, no caso de a ser verdadeira e b ser falsa. No entanto, $a \Rightarrow b$ é verdadeira no caso de a ser falsa e b ser verdadeira.

Opção (B)

10. Sabe-se que a implicação entre duas proposições é falsa apenas no caso em que o antecedente é verdadeiro e o consequente é falso. Assim, como $p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$ é uma proposição falsa, tem-se que o antecedente (p) é verdadeiro e o consequente ($q \Rightarrow r$) é falso.

Pela mesma ordem de ideias, como a proposição $q \Rightarrow r$ é falsa, tem-se que o antecedente (q) é verdadeiro e o consequente (r) é falso.

Opção (D)

11. Pelas segundas leis de De Morgan, tem-se que a proposição $\sim(\forall x, p(x) \Rightarrow q(x))$ é equivalente à proposição $\exists x: \sim(p(x) \Rightarrow q(x))$, o que pela negação da implicação é equivalente à proposição $\exists x: p(x) \wedge \sim q(x)$.

Opção (A)

12. (i) é verdadeira.

Seja $p(x)$ uma condição universal em \mathcal{U} (isto é, uma proposição que se transforma numa proposição verdadeira em \mathcal{U} , para qualquer concretização das suas variáveis) e seja $q(x)$ uma qualquer condição em \mathcal{U} .

A disjunção de $p(x)$ e $q(x)$, $p(x) \vee q(x)$, é uma nova condição que é universal em \mathcal{U} , pois, para qualquer concretização das suas variáveis vem que $p(x)$ se transforma numa proposição verdadeira e $q(x)$ numa proposição verdadeira ou falsa, e a disjunção é verdadeira em qualquer um destes casos ($(V \vee V) \Leftrightarrow V$; $(V \vee F) \Leftrightarrow V$).

(ii) é verdadeira.

Seja $p(x)$ uma condição impossível em \mathcal{U} (isto é, uma proposição que se transforma numa proposição falsa em \mathcal{U} , para qualquer concretização das suas variáveis) e seja $q(x)$ uma qualquer condição em \mathcal{U} .

A conjunção de $p(x)$ e $q(x)$, $p(x) \wedge q(x)$, é uma nova condição que é impossível em \mathcal{U} , pois para qualquer concretização das suas variáveis vem que $p(x)$ se transforma numa proposição falsa em \mathcal{U} e $q(x)$ numa proposição verdadeira ou falsa, e a conjunção é falsa em qualquer um destes casos ($(F \wedge V) \Leftrightarrow F$; $(F \wedge F) \Leftrightarrow F$).

Opção (B)

13. Das afirmações apresentadas, apenas a opção (B) é necessariamente verdadeira, pois:

como $A \subset B$ e $a \in A$, então $a \in B$

e como $B \subset C$ e $a \in B$, então $a \in C$.

Opção (B)

14.

- a) " $5^2 \times (\pi - 3)$ " é uma designação.
- b) " $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ " é uma proposição.
- c) "17 é um número primo" é uma proposição.
- d) "O triângulo de vértices A , B e C " é uma designação.
- e) "Há triângulos com dois ângulos retos" é uma proposição.
- f) " $\sqrt{3} > \pi + 1$ " é uma proposição.
- g) " $-5 \in \mathbb{N}$ " é uma proposição.
- h) " $\{1, 2, 3\}$ " é uma designação.
- i) " $\{1, 2, 3, 6\}$ é o conjunto dos divisores de 6" é uma proposição.
- j) "Existe um número primo que é par" é uma proposição.

15. As proposições presentes nas alíneas b), e), f) e g) são falsas.

As proposições presentes nas alíneas c), i) e j) são verdadeiras.

16. p : "Eu gosto do verão".

$\sim p$: "Eu não gosto do verão".

q : "Eu não gosto do inverno".

$\sim q$: "Eu gosto do inverno".

r : "Eu gosto da primavera".

$\sim r$: "Eu não gosto da primavera".

- a) $p \wedge q$: "Eu gosto do verão e não gosto do inverno".
- b) $q \vee r$: "Eu não gosto do inverno ou gosto da primavera".
- c) $\sim p \wedge \sim q$: "Eu não gosto do verão e gosto do inverno".
- d) $\sim q \vee r$: "Eu gosto do inverno ou da primavera".
- e) $\sim (p \vee r)$: "Não é verdade que eu goste do verão ou da primavera".
- f) $\sim p \wedge \sim r$: "Eu não gosto do verão nem da primavera".

17.

- a) A proposição $p \wedge q$ é verdadeira apenas no caso em que a proposição p é verdadeira e a proposição q é verdadeira.
- b) A proposição $p \vee q$ é falsa apenas no caso em que a proposição p é falsa e a proposição q é falsa.
- c) A proposição $\sim p \wedge q$ é verdadeira apenas no caso em que a proposição $\sim p$ é verdadeira, isto é, p é falsa e q é verdadeira.

18.

a) $\sim p \wedge q$

| p | q | $\sim p$ | $\sim p \wedge q$ |
|-----|-----|----------|-------------------|
| V | V | F | F |
| V | F | F | F |
| F | V | V | V |
| F | F | V | F |

b) $\sim(p \wedge q)$

| p | q | $p \wedge q$ | $\sim(p \wedge q)$ |
|-----|-----|--------------|--------------------|
| V | V | V | F |
| V | F | F | V |
| F | V | F | V |
| F | F | F | V |

c) $p \vee (\sim p \wedge q)$

| p | q | $\sim p$ | $\sim p \wedge q$ | $p \vee (\sim p \wedge q)$ |
|-----|-----|----------|-------------------|----------------------------|
| V | V | F | F | V |
| V | F | F | F | V |
| F | V | V | V | V |
| F | F | V | F | F |

19.

- a) p : “ π é um número irracional e é superior a 2”.
- $\sim p$: “ π não é um número irracional ou não é superior a 2”.
- b) p : “15 não é um número par nem é um número primo”.
- $\sim p$: “15 é um número par ou é um número primo”.
- c) p : “O Joaquim é um bebé ou não sabe falar”.
- $\sim p$: “O Joaquim não é um bebé e sabe falar”.
- d) p : “A Margarida é um bebé e não sabe nadar”.
- $\sim p$: “A Margarida não é um bebé ou sabe nadar”.

20.

a) $p(x): 5x + 1 \geq 0$

$p(x)$ é uma condição universal em \mathbb{N} e possível em \mathbb{R} .

$q(x): |x| < 0$

$q(x)$ é uma condição impossível em \mathbb{N} e impossível em \mathbb{R} .

$r(x): x(x - 2) = 0$

$r(x)$ é uma condição possível em \mathbb{N} e possível em \mathbb{R} .

$s(x): x(x + 2) = 0$

$s(x)$ é uma condição impossível em \mathbb{N} e possível em \mathbb{R} .

$t(x): 2x^2 \geq 0$

$t(x)$ é uma condição universal em \mathbb{N} e universal em \mathbb{R} .

b) $\sim p(x): 5x + 1 < 0$

$\sim q(x): |x| \geq 0$

$\sim r(x): x(x - 2) \neq 0$

$\sim s(x): x(x + 2) \neq 0$

$\sim t(x): 2x^2 < 0$

c) (i) $p(x) \wedge q(x)$ é uma condição impossível em \mathbb{R} , visto tratar-se da conjunção entre uma condição possível, $p(x)$, e uma condição impossível, $q(x)$, em \mathbb{R} .

(ii) $q(x) \vee r(x)$ é uma condição possível em \mathbb{R} , visto tratar-se da disjunção entre uma condição impossível, $q(x)$, e uma condição possível, $r(x)$, em \mathbb{R} .

(iii) $r(x) \vee s(x)$ é uma condição possível em \mathbb{R} , visto tratar-se da disjunção entre condições possíveis em \mathbb{R} .

(iv) $s(x) \vee t(x)$ é uma condição universal em \mathbb{R} , visto tratar-se da disjunção entre uma condição universal, $t(x)$, e uma condição possível, $s(x)$, em \mathbb{R} .

21.

a) (i) $\exists x: p(x)$

“Existe pelo menos um gato malhado”.

(ii) $\forall x, q(x)$

“Todos os gatos gostam de leite”.

(iii) $\forall x, p(x) \vee r(x)$

“Todos os gatos são malhados ou são pretos”.

(iv) $\exists x: r(x) \wedge \sim q(x)$

“Existe pelo menos um gato preto que não gosta de leite”.

b) (i) “Existe pelo menos um gato que não é malhado nem preto”.

$$\exists x: \sim p(x) \wedge \sim r(x)$$

(ii) “Existe pelo menos um gato que gosta de leite ou é preto”.

$$\exists x: q(x) \vee r(x)$$

(iii) “Todos os gatos que gostam de leite são malhados”

$$\forall x, q(x) \Rightarrow p(x)$$

(iv) “Todos os gatos são malhados se e só se não são pretos”.

$$\forall x, p(x) \Leftrightarrow \sim r(x)$$

22.

a) p : “Todos os homens são ambiciosos”.

$\sim p$: “Existe pelo menos um homem que não é ambicioso”.

b) p : “Existe um ator famoso que não tem formação em teatro”.

$\sim p$: “Todos os atores famosos têm formação em teatro”.

23.

a) $\{x \in U: x \in \mathbb{N}\} = \{1, 5, 25\}$

b) $\{x \in U: x \in \mathbb{Z}^-\} = \{-1\}$

c) $\{x \in U: x^2 > 10\} = \{5, 25\}$

d) $\{x \in U: 2x \leq 0\} = \{-1, 0\}$

e) $\{x \in U: x \text{ é um número irracional}\} = \emptyset$

24.

a) $\{3, -3\} = \{x \in \mathbb{R}: x^2 = 9\} = \{x \in \mathbb{R}: x = 3 \vee x = -3\}$ (por exemplo)

b) $\{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, \dots\} = \{x \in \mathbb{N}: x \text{ é ímpar}\}$

c) $\{1, 4, 9, 16, 25, 36, \dots\} = \{x^2: x \in \mathbb{N}\}$

25.

a) (i) " $\pi \neq 3,14$ e 27 é múltiplo de 9": $\sim q \wedge r$

(ii) "9 não é primo ou $\pi = 3,14$ ": $\sim p \vee q$

(iii) "Se $\pi = 3,14$, então 27 não é múltiplo de 9": $q \Rightarrow \sim r$

b) (iv) $p \vee \sim r$: "9 é um número primo ou 27 não é múltiplo de 9".

(v) $\sim(p \wedge q)$: "Não é verdade que 9 seja um número primo e que $\pi = 3,14$ ".

(vi) $\sim r \Rightarrow (\sim q \vee p)$: "Se 27 não é múltiplo de 9, então $\pi \neq 3,14$ ou 9 é um número primo".

c) Das proposições p , q e r do enunciado, tem-se que p e q são falsas e r é verdadeira.

- A proposição da alínea (i), $\sim q \wedge r$, é verdadeira, pois $V \wedge V \Leftrightarrow V$.
- A proposição da alínea (ii), $\sim p \vee q$, é verdadeira, pois $V \vee F \Leftrightarrow V$.
- A proposição da alínea (iii), $q \Rightarrow \sim r$, é verdadeira, pois $(F \Rightarrow F) \Leftrightarrow V$.
- A proposição da alínea (iv), $p \vee \sim r$, é falsa, pois $F \vee F \Leftrightarrow F$.
- A proposição da alínea (v), $\sim(p \wedge q)$, é verdadeira, pois $\sim(F \wedge F) \Leftrightarrow V$.
- A proposição da alínea (vi), $\sim r \Rightarrow (\sim q \vee p)$, é verdadeira, pois $(F \Rightarrow (V \vee F)) \Leftrightarrow (F \Rightarrow V) \Leftrightarrow V$.

26.

a) $\sim(p \Rightarrow \sim q)$ não é uma tautologia.

| p | q | $\sim q$ | $p \Rightarrow \sim q$ | $\sim(p \Rightarrow \sim q)$ |
|-----|-----|----------|------------------------|------------------------------|
| V | V | F | F | V |
| V | F | V | V | F |
| F | V | F | V | F |
| F | F | V | V | F |

b) $p \Leftrightarrow (p \vee q)$ não é uma tautologia.

| p | q | $p \vee q$ | $p \Leftrightarrow (p \vee q)$ |
|-----|-----|------------|--------------------------------|
| V | V | V | V |
| V | F | V | V |
| F | V | V | F |
| F | F | F | V |

c) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim p \vee q)$ é uma tautologia.

| p | q | $p \Rightarrow q$ | $\sim p$ | $\sim p \vee q$ | $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim p \vee q)$ |
|-----|-----|-------------------|----------|-----------------|---|
| V | V | V | F | V | V |
| V | F | F | F | F | V |
| F | V | V | V | V | V |
| F | F | V | V | V | V |

27.

a) $(p \vee (p \wedge q)) \Leftrightarrow p$

| p | q | $p \wedge q$ | $p \vee (p \wedge q)$ |
|-----|-----|--------------|-----------------------|
| V | V | V | V |
| V | F | F | V |
| F | V | F | F |
| F | F | F | F |

Observa-se que são iguais as colunas que dizem respeito a p e a $p \vee (p \wedge q)$.

$$\mathbf{b)} \ p \vee (p \wedge q)$$

$$\Leftrightarrow (p \wedge V) \vee (p \wedge q), \text{ pois } p \wedge V \Leftrightarrow p$$

$$\Leftrightarrow p \wedge (V \vee q)$$

$$\Leftrightarrow p \wedge V$$

$$\Leftrightarrow p$$

28.

$$\mathbf{a)} \ q \vee (p \vee \sim q)$$

$$\Leftrightarrow p \vee (q \vee \sim q)$$

$$\Leftrightarrow p \vee V$$

$$\Leftrightarrow V$$

$$\mathbf{b)} \ q \wedge (p \wedge \sim q)$$

$$\Leftrightarrow p \wedge (q \wedge \sim q)$$

$$\Leftrightarrow p \wedge F$$

$$\Leftrightarrow F$$

$$\mathbf{c)} \ q \wedge (\sim q \vee p)$$

$$\Leftrightarrow (q \wedge \sim q) \vee (q \wedge p)$$

$$\Leftrightarrow F \vee (q \wedge p)$$

$$\Leftrightarrow q \wedge p$$

$$\mathbf{d)} \ \sim p \wedge (p \vee q) \wedge \sim q$$

$$\Leftrightarrow [(\sim p \wedge p) \vee (\sim p \wedge q)] \wedge \sim q$$

$$\Leftrightarrow (F \vee (\sim p \wedge q)) \wedge \sim q$$

$$\Leftrightarrow (\sim p \wedge q) \wedge \sim q$$

$$\Leftrightarrow \sim p \wedge (q \wedge \sim q)$$

$$\Leftrightarrow \sim p \wedge F$$

$$\Leftrightarrow F$$

$$\mathbf{e)} \ p \vee (\sim p \wedge q) \vee \sim q$$

$$\Leftrightarrow [(p \vee \sim p) \wedge (p \vee q)] \vee \sim q$$

$$\Leftrightarrow (V \wedge (p \vee q)) \vee \sim q$$

$$\Leftrightarrow (p \vee q) \vee \sim q$$

$$\Leftrightarrow p \vee (q \vee \sim q)$$

$$\Leftrightarrow p \vee V \Leftrightarrow V$$

29.

$$\mathbf{a)} \ \sim(p \wedge \sim q) \Leftrightarrow \sim p \vee q$$

$$\mathbf{b)} \ \sim(\sim p \vee \sim q) \Leftrightarrow p \wedge q$$

$$\mathbf{c)} \ \sim(p \wedge (\sim q \vee r)) \Leftrightarrow \sim p \vee \sim(\sim q \vee r) \\ \Leftrightarrow \sim p \vee (q \wedge \sim r)$$

$$\mathbf{d)} \ \sim(\sim p \Rightarrow q) \Leftrightarrow \sim p \wedge \sim q$$

$$\mathbf{e)} \ \sim(p \Rightarrow (q \vee r)) \Leftrightarrow p \wedge \sim(q \vee r) \\ \Leftrightarrow p \wedge \sim q \wedge \sim r$$

$$\mathbf{f)} \ \sim((q \vee r) \Rightarrow p) \Leftrightarrow (q \vee r) \wedge \sim p$$

$$\begin{aligned} \text{g)} \quad & \sim((p \Rightarrow q) \vee r) \Leftrightarrow \sim(p \Rightarrow q) \wedge \sim r \\ & \Leftrightarrow p \wedge \sim q \wedge \sim r \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{h)} \quad & \sim(p \Leftrightarrow \sim q) \Leftrightarrow \sim(p \Rightarrow \sim q \wedge \sim q \Rightarrow p) \\ & \Leftrightarrow \sim(p \Rightarrow \sim q) \vee \sim(\sim q \Rightarrow p) \\ & \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (\sim q \wedge \sim p) \end{aligned}$$

30.

a) Se o conseqüente, q , é uma proposição falsa, a implicação $p \Rightarrow q$ só será verdadeira no caso de o antecedente ser também falso; assim, p é uma proposição falsa.

b) $p \vee q$ é uma proposição falsa, pois $(F \vee F) \Leftrightarrow F$.

c) $\sim(p \vee q)$ é uma proposição verdadeira, pois $\sim(F \vee F) \Leftrightarrow \sim F \Leftrightarrow V$.

d) $\sim p \wedge \sim q$ é uma proposição verdadeira, pois $(V \vee V) \Leftrightarrow V$.

e) $\sim p \vee q$ é uma proposição verdadeira, pois $(V \vee F) \Leftrightarrow V$.

f) $\sim q \Rightarrow p$ é uma proposição falsa, pois $(V \Rightarrow F) \Leftrightarrow F$.

g) $p \Leftrightarrow q$ é uma proposição verdadeira, pois $(F \Leftrightarrow F) \Leftrightarrow V$.

h) $\sim p \Leftrightarrow q$ é uma proposição falsa, pois $(V \Leftrightarrow F) \Leftrightarrow F$.

31.

$$\text{a)} \quad (p \vee q) \Leftrightarrow \sim(\sim p \wedge \sim q)$$

$$\text{b)} \quad (p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim p \vee q) \Leftrightarrow \sim(p \wedge \sim q)$$

$$\begin{aligned} \text{c)} \quad & (p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow ((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)) \\ & \Leftrightarrow ((\sim p \vee q) \wedge (\sim q \vee p)) \\ & \Leftrightarrow (\sim(p \wedge \sim q) \wedge \sim(q \wedge \sim p)) \end{aligned}$$

32.

a) $\sim(p \wedge q) \vee r$ é falsa.

A disjunção de duas proposições é falsa apenas no caso em que ambas as proposições são falsas, logo $\sim(p \wedge q)$ é falsa r é falsa. Como $\sim(p \wedge q)$ é falsa, então $p \wedge q$ é verdadeira. Como a conjunção de duas proposições é verdadeira apenas no caso em que ambas as proposições são verdadeiras, tem-se que p é verdadeira e q é verdadeira.

b) $r \wedge \sim(p \Rightarrow q)$ é verdadeira.

A conjunção de duas proposições é verdadeira apenas no caso em que ambas as proposições são verdadeiras, logo r é verdadeira e $\sim(p \Rightarrow q)$ é verdadeira. Como $\sim(p \Rightarrow q)$ é verdadeira, então $p \Rightarrow q$ é falsa. Uma implicação entre duas proposições é falsa apenas no caso em que o antecedente é verdadeiro e o conseqüente é falso. Assim, p é uma proposição verdadeira e q é uma proposição falsa.

33.

a) p : "Um aluno está distraído". q : "A professora repreende o aluno".

"Se um aluno está distraído, então a professora repreende-o". $(p \Rightarrow q)$

Negação da implicação: "Um aluno está distraído e a professora não o repreende".

$$(p \wedge \sim q)$$

Implicação contrarrecíproca: "Se a professora não repreende um aluno, então o aluno não está distraído". $(\sim q \Rightarrow \sim p)$

b) $p: "x = 3"$

$q: "x^2 = 9"$

$p \Rightarrow q: "x = 3 \Rightarrow x^2 = 9"$

Negação da implicação: $"x = 3 \wedge x^2 \neq 9" (p \wedge \sim q)$

Implicação contrarrecíproca: $"x^2 \neq 9 \Rightarrow x \neq 3" (\sim q \Rightarrow \sim p)$

c) $p: "n \text{ é um múltiplo de } 10."$

$q: "n \text{ é um múltiplo de } 5."$

$p \Rightarrow q: "Se n \text{ é um múltiplo de } 10, \text{ então } n \text{ é um múltiplo de } 5."$

Negação da implicação: $"n \text{ é um múltiplo de } 10 \text{ e não é um múltiplo de } 5": (p \wedge \sim q)$

Implicação contrarrecíproca: $"Se n \text{ não é um múltiplo de } 5, \text{ então não é um múltiplo de } 10":$

$(\sim q \Rightarrow \sim p)$

34.

a) $p: "Existe um número real x que é maior que o seu quadrado".$

$\sim p: "Todos os números reais são inferiores ou iguais ao seu quadrado".$

b) $p: "x^2 - 2x \geq 0 \text{ verifica-se para todo o número real } x".$

$\sim p: "Existe pelo menos um número real x que não verifica $x^2 - 2x \geq 0."$$

c) $p: "Existe um número natural x que é solução da equação $x^3 = 25."$$

$\sim p: "Qualquer número natural x não é solução da equação $x^3 = 25."$$

35.

a) $\exists x \in \mathbb{R} : x > x^2$

$\sim(\exists x \in \mathbb{R} : x > x^2) \Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R}, x \leq x^2)$

b) $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - 2x \geq 0$

$\sim(\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - 2x \geq 0) \Leftrightarrow (\exists x \in \mathbb{R} : x^2 - 2x < 0)$

c) $\exists x \in \mathbb{R} : x^3 = 25$

$\sim(\exists x \in \mathbb{N} : x^3 = 25) \Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{N}, x^3 \neq 25)$

36.

a) A proposição é falsa, pois, por exemplo, 3 e 5 são números primos e a sua soma, 8, não é um número primo.

b) A proposição é falsa, pois, por exemplo, 11 é um número primo formado por dois algarismos e estes não são distintos.

c) A proposição é falsa, pois, por exemplo, 1 é um número natural e não se verifica que $1^2 - 2 \times 1 \geq 0$.

37.

a) $P = \{n : p(n) \wedge r(n)\} = \{n : n \text{ é um número primo inferior a } 9\} = \{2, 3, 5, 7\}$

b) $Q = \{n : q(n) \vee r(n)\} = \{n : n \text{ é um divisor de } 12 \text{ ou } n \text{ é inferior a } 9\}$
 $= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 12\}$

c) $R = \{n : q(n) \wedge \sim p(n)\} = \{n : n \text{ é um divisor de } 12 \text{ e não é um número primo}\}$
 $= \{1, 4, 6, 12\}$

38.

a) $\{x \in \mathbb{N} : x - 4 < 0 \vee x^2 - 36 = 0\} = \{1, 2, 3\} \cup \{6\} = \{1, 2, 3, 6\}$

Cálculos auxiliares

$$x - 4 < 0 \Leftrightarrow x < 4$$

$$x^2 - 36 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 36 \Leftrightarrow x = -6 \vee x = 6$$

b) $\{x \in \mathbb{N} : x - 4 < 0 \wedge x^2 - 36 = 0\} = \{1, 2, 3\} \cap \{6\} = \emptyset$

c) $\{x \in \mathbb{N} : x - 4 < 0 \wedge x^2 - 36 = 0\} =]4 + \infty[\cap \{-6, 6\} = \{6\}$

d) $\{x \in \mathbb{R} : x - 4 < 0 \wedge x^2 - 36 = 0\} =]-\infty, 4[\cap \{-6, 6\} = \{-6\}$

39. $A = \{0, 1, 2, 3\}$ $B =]2, +\infty[$ $C =]1, 6]$

a) $A \cup B = \{0, 1, 2, 3\} \cup]2, +\infty[= [2, +\infty[\cup \{0, 1\}$

b) $B \cup C =]2, +\infty[\cup]1, 6] =]1, +\infty[$

c) $A \cap C = \{0, 1, 2, 3\} \cap]1, 6] = \{2, 3\}$

d) $B \cap C =]2, +\infty[\cap]1, 6] =]2, 6]$

e) $(A \cap C) \cap B \stackrel{\text{alínea c)}}{=} \{2, 3\} \cap]2, +\infty[= \{3\}$

f) $\bar{A} = \mathbb{R} \setminus \{0, 1, 2, 3\}$

g) $\bar{B} = \mathbb{R} \setminus]2, +\infty[=]-\infty, 2]$

h) $\bar{C} = \mathbb{R} \setminus]1, 6] =]-\infty, 1] \cup]6, +\infty[$

i) $A \setminus B = \{0, 1, 2, 3\} \setminus]2, +\infty[= \{0, 1, 2\}$

j) $B \setminus A =]2, +\infty[\setminus \{0, 1, 2, 3\} =]2, +\infty[\setminus \{3\} =]2, 3[\cup]3, +\infty[$

k) $C \setminus (A \cap B) =]1, 6] \setminus (\{0, 1, 2, 3\} \cap]2, +\infty[) =]1, 6] \setminus \{3\} =]1, 3[\cup]3, 6]$

40.

| p | q | r | $\sim r$ | $p \Leftrightarrow \sim r$ | $q \wedge r$ | $(p \Leftrightarrow \sim r) \vee (q \wedge r)$ |
|-----|-----|-----|----------|----------------------------|--------------|--|
| V | V | V | F | F | V | V |
| V | V | F | V | V | F | V |
| V | F | V | F | F | F | F |
| V | F | F | V | V | F | V |
| F | V | V | F | V | V | V |
| F | V | F | V | F | F | F |
| F | F | V | F | V | F | V |
| F | F | F | V | F | F | F |

41. Como $(p \Rightarrow \sim q) \wedge (\sim r \Rightarrow q) \wedge p$ é uma proposição verdadeira, e a conjunção de três proposições é verdadeira apenas no caso das três proposições o serem, pode concluir-se que $p \Rightarrow \sim q$, $\sim r \Rightarrow q$ e p são proposições verdadeiras. Assim, sabendo que p e $p \Rightarrow \sim q$ são proposições verdadeiras, vem que $\sim q$ é uma proposição verdadeira, já que se trata de uma implicação verdadeira cujo antecedente é verdadeiro, logo o consequente terá de ser também verdadeiro. Assim, como $\sim q$ é uma proposição verdadeira, então q é uma proposição falsa. Temos ainda que, se $\sim r \Rightarrow q$ é uma proposição verdadeira e q é uma proposição falsa, então $\sim r$ é uma proposição falsa, já que se trata de uma implicação verdadeira cujo consequente é falso, logo o antecedente terá de ser também falso. Assim, como $\sim r$ é uma proposição falsa, r é uma proposição verdadeira.

42.

$$\begin{aligned}
 \text{a) } p \Rightarrow \sim q \wedge \sim r \Rightarrow q &\Leftrightarrow p \Rightarrow (\sim q \wedge \sim r) \Rightarrow q \\
 &\Leftrightarrow (\sim p \vee (\sim q \wedge \sim r)) \Rightarrow q \\
 &\Leftrightarrow \sim(\sim p \vee (\sim q \wedge \sim r)) \vee q \\
 &\Leftrightarrow (\sim(\sim p) \wedge \sim(\sim q \wedge \sim r)) \vee q \\
 &\Leftrightarrow (p \wedge (q \vee r)) \vee q \\
 &\Leftrightarrow (q \vee p) \wedge (q \vee q \vee r) \\
 &\Leftrightarrow (q \vee p) \wedge (q \vee r) \\
 &\Leftrightarrow q \vee (p \wedge r)
 \end{aligned}$$

$$\text{b) } (p \Rightarrow \sim q) \wedge (\sim r \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim p \vee \sim q) \wedge (r \vee q)$$

43.

a) p : "O FCP ganha o campeonato deste ano".

q : "O SLB ganha o jogo de hoje".

Afirmar que: "O FCP ganha o campeonato deste ano, exceto se o SLB ganhar o jogo de hoje"

equivale a afirmar que: "Se o SLB não ganhar o jogo de hoje, então o FCP ganha o campeonato deste ano."

o que pode ser traduzido em linguagem simbólica por $\sim q \Rightarrow p$.

b) a : "A Carolina vai ao cinema".

b : "A Carolina come pipocas".

c : "O filme é de terror".

Afirmar que: "A Carolina não come pipocas quando vai ao cinema, a menos que o filme seja de terror"

equivale a afirmar que: "Se o filme não é de terror, então a Carolina não come pipocas quando vai ao cinema"

ou seja: "Se o filme não é de terror, então a Carolina ir ao cinema implica que não coma pipocas"

o que em linguagem simbólica pode ser traduzido por $\sim c \Rightarrow (a \Rightarrow \sim b)$.

44.

a)

| p | q | $p \dot{\vee} q$ |
|-----|-----|------------------|
| V | V | F |
| V | F | V |
| F | V | V |
| F | F | F |

b) Como $p \dot{\vee} q$ é verdadeira quando, e apenas quando, p e q têm valores lógicos distintos, então a proposição $p \dot{\vee} q$ é equivalente a $(p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim p)$.

c) Vamos construir a tabela de verdade da proposição $\sim(p \dot{\vee} q)$:

| p | q | $p \dot{\vee} q$ | $\sim(p \dot{\vee} q)$ |
|-----|-----|------------------|------------------------|
| V | V | F | V |
| V | F | V | F |
| F | V | V | F |
| F | F | F | V |

(i) Vamos construir a tabela de verdade da proposição $(p \wedge q)$:

| p | q | $p \wedge q$ |
|-----|-----|--------------|
| V | V | V |
| V | F | F |
| F | V | F |
| F | F | F |

Comparando a tabela de verdade da proposição $\sim(p \vee q)$ com a tabela de verdade da proposição $(p \wedge q)$, verifica-se que as proposições $\sim(p \vee q)$ e $(p \wedge q)$ não são equivalentes, ou seja, a proposição $\sim(p \vee q) \Leftrightarrow (p \wedge q)$ não é verdadeira.

(ii) Vamos construir a tabela de verdade da proposição $(p \vee q)$:

| p | q | $p \vee q$ |
|-----|-----|------------|
| V | V | V |
| V | F | V |
| F | V | V |
| F | F | F |

Comparando a tabela de verdade da proposição $\sim(p \vee q)$ com a tabela de verdade da proposição $(p \vee q)$, verifica-se que as proposições $\sim(p \vee q)$ e $(p \vee q)$ não são equivalentes, ou seja, a proposição $\sim(p \vee q) \Leftrightarrow (p \vee q)$ não é verdadeira.

(iii) Vamos construir a tabela de verdade da proposição $(p \Rightarrow q)$:

| p | q | $p \Rightarrow q$ |
|-----|-----|-------------------|
| V | V | V |
| V | F | F |
| F | V | V |
| F | F | V |

Comparando a tabela de verdade da proposição $\sim(p \vee q)$ com a tabela de verdade da proposição $(p \Rightarrow q)$, verifica-se que as proposições $\sim(p \vee q)$ e $(p \Rightarrow q)$ não são equivalentes, ou seja, a proposição $\sim(p \vee q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q)$ não é verdadeira.

(iv) Vamos construir a tabela de verdade da proposição $(p \Leftrightarrow q)$:

| p | q | $p \Leftrightarrow q$ |
|-----|-----|-----------------------|
| V | V | V |
| V | F | F |
| F | V | F |
| F | F | V |

Comparando a tabela de verdade da proposição $\sim(p \vee q)$ com a tabela de verdade da proposição $(p \Leftrightarrow q)$, verifica-se que as proposições $\sim(p \vee q)$ e $(p \Leftrightarrow q)$ são equivalentes, ou seja, a proposição $\sim(p \vee q) \Leftrightarrow (p \Leftrightarrow q)$ é verdadeira.

45.

a) Consideremos as proposições:

$p(x)$: "Ser mamífero". $q(x)$: "Ser felino".

A expressão "ser mamífero é condição necessária para ser felino" pode ser traduzida simbolicamente por $q(x) \Rightarrow p(x)$.

b) Consideremos as proposições:

$p(x)$: "Ser múltiplo de 6". $q(x)$: "Ser múltiplo de 3".

A expressão "ser múltiplo de 6 é condição suficiente para que um número seja múltiplo de 3" pode ser traduzida simbolicamente por $p(x) \Rightarrow q(x)$.

c) Consideremos as proposições:

$$p(x, y): "x \times y = 0"$$

$$q(x, y): "x = 0 \vee y = 0", \text{ com } x \text{ e } y \text{ números reais}"$$

A expressão “é condição necessária e suficiente para que o produto de dois números reais seja nulo que pelo menos um deles seja zero” pode ser traduzida simbolicamente por $p \Leftrightarrow q$.

46.

a) Se $p(x)$ é uma condição universal em \mathcal{U} , então $\forall x \in \mathcal{U}, p(x)$ é uma proposição verdadeira, isto é, a concretização da variável x por um qualquer termo de \mathcal{U} transforma a condição numa proposição verdadeira.

Daqui se conclui que a proposição $\exists x \in \mathcal{U}: \sim p(x)$ é uma proposição falsa, já que não existe nenhum termo de \mathcal{U} que satisfaça $\sim p(x)$, ou seja, $\sim p(x)$ é uma condição impossível em \mathcal{U} .

Conclui-se assim que, se $p(x)$ for uma condição universal em \mathcal{U} , então $\sim p(x)$ é uma condição impossível em \mathcal{U} .

b) Se $p(x)$ é uma condição impossível em \mathcal{U} , então $\exists x \in \mathcal{U}: p(x)$ é uma proposição falsa, isto é, a concretização da variável x por um qualquer termo de \mathcal{U} transforma a condição numa proposição falsa.

Daqui se conclui que a proposição $\forall x \in \mathcal{U}, \sim p(x)$ é uma proposição verdadeira, ou seja, $\sim p(x)$ é uma condição universal em \mathcal{U} .

Conclui-se assim que, se $p(x)$ for uma condição impossível em \mathcal{U} , então $\sim p(x)$ é uma condição universal em \mathcal{U} .

47.

a) A proposição é falsa, pois, por exemplo, um retângulo é um quadrilátero que tem os ângulos iguais e, no entanto, não tem os lados iguais.

b) A proposição é falsa, pois, por exemplo, -2 e -3 são valores reais tais que $-2 > -3$ e, no entanto, não se tem que $(-2)^2 > (-3)^2$.

48. Provar que “se um número natural n não é divisível por 3, então não é divisível por 12” é equivalente a provar a implicação contrarrecíproca, isto é, “se um número natural n é divisível por 12, então é divisível por 3”. Assim, considerando n um número natural divisível por 12, tem-se que:

$$\exists k \in \mathbb{N}: n = 12k$$

O que é equivalente a afirmar que:

$$\exists k \in \mathbb{N}: n = 3 \times \underbrace{4k}_{\text{Como } k \in \mathbb{N}, 4k \in \mathbb{N}}$$

Ou seja:

$$\exists k' \in \mathbb{N}: n = 3 \times k' \quad (k' = 4k)$$

Isto significa que n é divisível por 3, como pretendíamos.

49. Queremos provar que para todo o número natural n , n^2 é par se e só se n é par.

Simbolicamente: $\forall n \in \mathbb{N}, n^2 \text{ é par} \Leftrightarrow n \text{ é par}$.

(1) $n \text{ é par} \Rightarrow n^2 \text{ é par}$

Seja n um número natural par, então existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $n = 2k$. Logo:

$$\begin{aligned} n^2 &= (2k)^2 \\ \Rightarrow n^2 &= 4k^2 \\ \Rightarrow n^2 &= 2 \times \underbrace{2k^2}_{\text{Como } k \in \mathbb{N}, 2k^2 \in \mathbb{N}} \end{aligned}$$

Podemos então concluir que existe $k' \in \mathbb{N}$ tal que $n^2 = 2 \times k'$ ($k' = 2k^2$), isto é, n^2 é par.

(2) n^2 é par $\Rightarrow n$ é par

Provemos esta implicação em \mathbb{N} , demonstrando a sua implicação contrarrecíproca, isto é, n é ímpar $\Rightarrow n^2$ é ímpar. Seja n um número natural ímpar, então existe $k \in \mathbb{N}_0$ tal que $n = 2k + 1$.

Logo:

$$\begin{aligned} n^2 &= (2k + 1)^2 \\ \Rightarrow n^2 &= 4k^2 + 4k + 1 \\ \Rightarrow n^2 &= 2 \underbrace{(2k^2 + 2k)}_{\text{Como } k \in \mathbb{N}_0, \text{então } 2k^2 + 2k \in \mathbb{N}_0} + 1 \end{aligned}$$

Podemos então concluir que existe $k' \in \mathbb{N}_0$ tal que $n^2 = 2k' + 1$ ($k' = 2k^2 + 2k$), isto é, n^2 é ímpar.

De (1) e (2) vem que n^2 é par $\Rightarrow n$ é par, para todo o número natural n , o que prova o pretendido.

Desafios

Página 73

1.

a) A proposição pode ser representada por:

$$\forall x \in R, x \in B \Rightarrow x \notin A$$

b) As duas proposições depois do quantificador, $x \in A \Rightarrow x \notin B$ e $x \in B \Rightarrow x \notin A$, são equivalentes por serem a contrarrecíproca uma da outra. Assim, as duas proposições, com quantificadores, são equivalentes.

c) Em linguagem corrente ficaria:

“Qualquer que seja o restaurante, não é verdade que seja simultaneamente barato e bom”
ou, de forma mais informal: “Não há restaurantes bons e baratos.”

d) Também esta é equivalente às anteriores. De facto,

$$\sim (x \in A \wedge x \in B) \Leftrightarrow x \notin A \vee x \notin B \Leftrightarrow (x \in A \Rightarrow x \notin B).$$

2.

a) A forma mais direta de escrever estas proposições é a seguinte:

$$s \Rightarrow \sim v, s \Leftrightarrow \sim r, v \vee r.$$

b) Podemos ir preenchendo a tabela a partir das colunas da esquerda.

| s | v | r | $\sim v$ | $\sim r$ | $s \Rightarrow \sim v$ | $s \Leftrightarrow \sim r$ | $s \vee r$ |
|-----|-----|-----|----------|----------|------------------------|----------------------------|------------|
| V | V | V | F | F | F | F | V |
| V | V | F | F | V | F | V | V |
| V | F | V | V | F | V | F | V |
| V | F | F | V | V | V | V | F |
| F | V | V | F | F | V | V | V |
| F | V | F | F | V | V | F | V |
| F | F | V | V | F | V | V | V |
| F | F | F | V | V | V | F | F |

- c) Só há duas linhas onde as três proposições são todas verdadeiras e estão identificadas na tabela abaixo.

| s | v | r | $\sim v$ | $\sim r$ | $s \Rightarrow \sim v$ | $s \Leftrightarrow \sim r$ | $s \vee r$ |
|----------|----------|----------|----------------------------|----------------------------|--|--|------------------------------|
| V | V | V | F | F | F | F | V |
| V | V | F | F | V | F | V | V |
| V | F | V | V | F | V | F | V |
| V | F | F | V | V | V | V | F |
| F | V | V | F | F | V | V | V |
| F | V | F | F | V | V | F | V |
| F | F | V | V | F | V | V | V |
| F | F | F | V | V | V | F | F |

- d) Supondo que todas as afirmações da alínea a) são verdadeiras, só podemos estar na situação descrita numa das linhas identificadas na alínea anterior, o que mostra que a Sara só pode usar calças e a Rebeca só pode usar saia. Concluimos que, se alguém levou calças num dos dias e saia no outro, esse alguém só pode ser a Vanessa.

Tema II – Álgebra

Unidade 1 – Radicais

Páginas 76 a 100

1.

a) Se a e b são dois números reais tais que $a < b < 0$, então $0 < -b < -a$.

Assim:

$$(-b) \times (-b) < (-a) \times (-a)$$

Ou seja:

$$b^2 < a^2$$

Isto é:

$$a^2 > b^2$$

b) Se a e b são dois números reais tais que $a < b < 0$, então $0 < -b < -a$.

Pela alínea anterior, sabemos que $0 < b^2 < a^2$.

Então:

$$b^2 \times b^2 < a^2 \times a^2$$

Ou seja:

$$b^4 < a^4$$

Isto é:

$$a^4 > b^4$$

c) Sejam a e b dois números reais tais que $a < b < 0$ e para $n \in \mathbb{N}$ par se tem $a^n > b^n$.

Pela alínea a) sabemos que $a^2 > b^2$. Como $a^n > b^n$ e $a^2 > b^2$ e a^n, b^n, a^2 e b^2 são números reais positivos, então $a^n \times a^2 > b^n \times b^2 \Leftrightarrow a^{n+2} > b^{n+2}$.

2.

• Sejam a e b dois números reais tais que $a < b < 0$ e $n \in \mathbb{N}$ é ímpar. Então $0 < -b < -a$.

Pela propriedade: dados x, y números reais tais que $0 \leq x < y$ e $n \in \mathbb{N}$, então $x^n < y^n$, vem que:

$$(-b)^n < (-a)^n \Leftrightarrow -b^n < -a^n, \text{ pois } n \text{ é ímpar}$$

$$\Leftrightarrow b^n > a^n$$

$$\Leftrightarrow a^n < b^n, \text{ como queríamos demonstrar}$$

• Sejam a e b dois números reais tais que $a < b < 0$ e $n \in \mathbb{N}$ é par. Então, $0 < -b < -a$.

Pela propriedade: dados x, y números reais tais que $0 \leq x < y$ e $n \in \mathbb{N}$, então $x^n < y^n$, vem que:

$$(-b)^n < (-a)^n \Leftrightarrow b^n < a^n, \text{ pois } n \text{ é par}$$

$$\Leftrightarrow a^n > b^n, \text{ como queríamos demonstrar}$$

3.

a) Como $A_{\text{quadrado}} = l^2$, então $l = \sqrt{36} = 6$ cm.

b) Como $V_{\text{cubo}} = a^3$, então $a = \sqrt[3]{8} = 2$ cm.

c) $\pi r^2 = 9\pi \Leftrightarrow r^2 = 9$

Como $r > 0$, então $r = \sqrt{9}$, ou seja, $r = 3$ cm.

4.

a) $x^5 = -32 \Leftrightarrow x = \sqrt[5]{-32} \Leftrightarrow x = -2$

C.S. = $\{-2\}$

b) $x^4 = 16 \Leftrightarrow x = \pm \sqrt[4]{16} \Leftrightarrow x = \pm 2$

C.S. = $\{-2, 2\}$

c) $x^{10} = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt[10]{0} \Leftrightarrow x = 0$

C.S. = $\{0\}$

5.

a) $x^2 = 100 \Leftrightarrow x = \pm \sqrt{100} \Leftrightarrow x = \pm 10$

C.S. = $\{-10, 10\}$

b) $x^3 = 1000 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{1000} \Leftrightarrow x = 10$

C.S. = $\{10\}$

c) $x^4 = 10\,000 \Leftrightarrow x = \pm \sqrt[4]{10\,000} \Leftrightarrow x = \pm 10$

C.S. = $\{-10, 10\}$

d) $x^5 = -10 \Leftrightarrow x = \sqrt[5]{-10}$

C.S. = $\{\sqrt[5]{-10}\}$

e) $x^6 = -10$

Equação impossível

C.S. = $\{\}$

f) $x^7 = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt[7]{0} \Leftrightarrow x = 0$

C.S. = $\{0\}$

g) $x^8 = 1 \Leftrightarrow x = \pm \sqrt[8]{1} \Leftrightarrow x = \pm 1$

C.S. = $\{-1, 1\}$

h) $x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 3 \Leftrightarrow x = \pm \sqrt{3}$

C.S. = $\{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$

i) $x^4 + 3 = 0 \Leftrightarrow x^4 = -3$

Equação impossível

C.S. = $\{\}$

j) $9x^2 - 24 = 1 \Leftrightarrow 9x^2 = 25 \Leftrightarrow x^2 = \frac{25}{9} \Leftrightarrow x = \pm \sqrt{\frac{25}{9}} \Leftrightarrow x = \pm \frac{5}{3}$

C.S. = $\left\{-\frac{5}{3}, \frac{5}{3}\right\}$

6. $A_{\text{total}} = 300 \Leftrightarrow 6a^2 = 300 \Leftrightarrow a^2 = 50 \Leftrightarrow a = \pm \sqrt{50}$

Como $a > 0$, então $a = \sqrt{50}$ cm.

7.

a) $2\sqrt{3} + 4\sqrt{3} - \sqrt{3} = 5\sqrt{3}$

b) $\sqrt[3]{2} - 6\sqrt[3]{2} = -5\sqrt[3]{2}$

c) $\sqrt[7]{-2} + \frac{\sqrt[7]{-2}}{2} = \frac{2\sqrt[7]{-2}}{2} + \frac{\sqrt[7]{-2}}{2} = \frac{3}{2}\sqrt[7]{-2}$

$$\text{d)} 3\sqrt{2} + 4\sqrt{3} - \sqrt{2} + \frac{\sqrt{3}}{3} = 3\sqrt{2} - \sqrt{2} - 4\sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{2} + \frac{12\sqrt{3}}{3} + \frac{\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{2} + \frac{13\sqrt{3}}{3}$$

8.

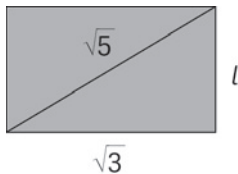
$$\text{a)} \sqrt{2} \times \sqrt{3} \times \sqrt{5} = \sqrt{30}$$

$$\text{b)} 5^3\sqrt{2} \times 2^3\sqrt{2} = 10^3\sqrt{4}$$

$$\text{c)} 6^3\sqrt{-2} \times \frac{\sqrt[3]{-2}}{2} + 2^3\sqrt{4} = \frac{6}{2}\sqrt[3]{4} + 2^3\sqrt{4} = 3^3\sqrt{4} + 2^3\sqrt{4} = 5^3\sqrt{4}$$

$$\text{d)} (2 + \sqrt{5})(2 - \sqrt{5}) = 2^2 - (\sqrt{5})^2 = 4 - 5 = -1$$

9.



$$(\sqrt{5})^2 = l^2 + (\sqrt{3})^2 \Leftrightarrow 5 = l^2 + 3 \Leftrightarrow l^2 = 2 \Leftrightarrow l = \pm\sqrt{2}$$

Como $l > 0$, então $l = \sqrt{2}$.

$$\text{a)} P_{\text{retângulo}} = (2\sqrt{3} + 2\sqrt{2}) \text{ cm}$$

$$\text{b)} A_{\text{retângulo}} = \sqrt{3} \times \sqrt{2} = \sqrt{6} \text{ cm}^2$$

10. Seja a um número real, $n \in \mathbb{N}$ par e $m \in \mathbb{N}$ par.

Suponhamos que $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$.

Então:

$$\begin{aligned} (\sqrt[n]{a})^{m+1} &= (\sqrt[n]{a})^m \times \sqrt[n]{a} \\ &= \sqrt[n]{a^m} \times \sqrt[n]{a} \\ &= \sqrt[n]{a^m \times a} \\ &= \sqrt[n]{a^{m+1}}, \text{ como queríamos demonstrar.} \end{aligned}$$

11.

$$\text{a)} \sqrt{5^2} + \sqrt{(-5)^2} = 5 + |-5| = 5 + 5 = 10$$

Logo, a proposição é falsa.

$$\text{b)} \sqrt[3]{5^3} + \sqrt[3]{(-5)^3} = 5 + (-5) = 0$$

Logo, a proposição é verdadeira.

$$\text{c)} (3\sqrt{5})^2 = 3^2 \times (\sqrt{5})^2 = 9 \times 5 = 45$$

Logo, a proposição é falsa.

$$\text{d)} (\sqrt{5} - 2)^2 = (\sqrt{5})^2 - 4\sqrt{5} + 4 = 5 - 4\sqrt{5} + 4 = 9 - 4\sqrt{5}$$

Logo, a proposição é falsa.

12.

$$\begin{aligned} \text{a)} \sqrt{3} \times (2 - \sqrt{5})^2 + \frac{\sqrt{45}}{\sqrt{3}} &= \sqrt{3} \times (4 - 4\sqrt{5} + 5) + \sqrt{\frac{45}{3}} = \sqrt{3} \times (9 - 4\sqrt{5}) + \sqrt{15} \\ &= 9\sqrt{3} - 4\sqrt{15} + \sqrt{15} = 9\sqrt{3} - 3\sqrt{15} \end{aligned}$$

$$\text{b)} 5\sqrt[3]{12} : \sqrt[3]{-3} = 5\sqrt[3]{12 : (-3)} = 5\sqrt[3]{-4}$$

$$\text{c)} \left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^{-1} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}} \times \sqrt{\frac{2}{3}} = \sqrt{\frac{3}{2}} \times \sqrt{\frac{2}{3}} = \sqrt{\frac{3}{2} \times \frac{2}{3}} = \sqrt{1} = 1$$

13. Consideremos $a = 1$ e $b = 4$.

$$\sqrt{a+b} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$$

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{1} + \sqrt{4} = 1 + 2 = 3 \quad (\text{nota que: } 3 = \sqrt{9})$$

Sabemos que $\sqrt{5} \neq 3$, logo a proposição $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$ é falsa.

14.

$$\text{a)} A + B = \sqrt{5} + (2 - 4\sqrt{5}) = \sqrt{5} + 2 - 4\sqrt{5} = 2 - 3\sqrt{5}$$

$$\text{b)} 3A - B = 3\sqrt{5} - (2 - 4\sqrt{5}) = 3\sqrt{5} - 2 + 4\sqrt{5} = -2 + 7\sqrt{5}$$

$$\begin{aligned} \text{c)} (A - B)^2 &= (\sqrt{5} - (2 - 4\sqrt{5}))^2 = (\sqrt{5} - 2 + 4\sqrt{5})^2 = (5\sqrt{5} - 2)^2 = (5\sqrt{5})^2 - 20\sqrt{5} + 4 \\ &= 25 \times 5 - 20\sqrt{5} + 4 = 129 - 20\sqrt{5} \end{aligned}$$

$$\text{d)} A \times B = \sqrt{5}(2 - 4\sqrt{5}) = 2\sqrt{5} - 4 \times (\sqrt{5})^2 = 2\sqrt{5} - 4 \times 5 = -20 + 2\sqrt{5}$$

$$\text{e)} \sqrt[3]{A} = \sqrt[3]{\sqrt{5}} = \sqrt[6]{5}$$

$$\text{f)} \sqrt{A} + C = \sqrt{\sqrt{5}} + \sqrt[4]{5} = \sqrt[4]{5} + \sqrt[4]{5} = 2\sqrt[4]{5}$$

$$\text{g)} B + C^4 = (2 - 4\sqrt{5}) + (\sqrt[4]{5})^4 = 2 - 4\sqrt{5} + 5 = 7 - 4\sqrt{5}$$

15.

$$\text{a)} \sqrt{9} = 3 \quad \sqrt[4]{9^2} = \sqrt[4]{81} = 3 \quad \sqrt[6]{9^3} = \sqrt[6]{729} = 3$$

Assim, concluímos que $\sqrt[6]{9^3} = \sqrt[4]{9^2} = \sqrt{9} = 3$.

$$\text{b)} \sqrt{2^6} = \sqrt{64} = 8$$

$$\sqrt[3]{2^9} = \sqrt[3]{2^3 \times 2^3 \times 2^3} = 2 \times 2 \times 2 = 8$$

$$\sqrt[4]{2^{12}} = \sqrt[4]{2^4 \times 2^4 \times 2^4} = 2 \times 2 \times 2 = 8$$

Concluimos assim que $\sqrt[4]{2^{12}} = \sqrt[3]{2^9} = \sqrt{2^6} = 8$.

16.

$$\text{a)} \sqrt{3} \times \sqrt[4]{2} = \sqrt[2 \times 2]{3^2} \times \sqrt[4]{2} = \sqrt[4]{9} \times \sqrt[4]{2} = \sqrt[4]{18}$$

$$\text{b)} \sqrt[3]{5} \times \sqrt[6]{4} = \sqrt[3 \times 2]{5^2} \times \sqrt[6]{4} = \sqrt[6]{25} \times \sqrt[6]{4} = \sqrt[6]{100}$$

$$\text{c)} \sqrt{2} + \sqrt[4]{4} + \sqrt[6]{8} + \sqrt[8]{16} = \sqrt{2} + \sqrt[2 \times 2]{2^2} + \sqrt[2 \times 3]{2^3} + \sqrt[2 \times 4]{2^4} = \sqrt{2} + \sqrt{2} + \sqrt{2} + \sqrt{2} = 4\sqrt{2}$$

17. Seja a um número real positivo. Seja x a raiz índice 8 de a^6 , onde $x > 0$. Então:

$$x = \sqrt[8]{a^6} \Leftrightarrow x^8 = a^6, \text{ por definição}$$

$$\Leftrightarrow (x^4)^2 = (a^3)^2$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{x^4}_{a^3 > 0} = a^3$$

$$\Leftrightarrow x = \sqrt[4]{a^3}, \text{ por definição}$$

Assim, provámos que $\sqrt[8]{a^6} = \sqrt[4]{a^3}$.

Outro processo

$$\sqrt[8]{a^6} = \sqrt[4 \times 2]{a^{3 \times 2}} = \sqrt[4]{\sqrt{(a^3)^2}} \underset{\text{pois } a^3 > 0}{=} \sqrt[4]{a^3}$$

18. Seja a um número real positivo e sejam n, m e p números naturais:

$$\sqrt[n \times p]{a^{m \times p}} = \sqrt[n]{\sqrt[p]{(a^m)^p}} = \sqrt[n]{a^m}, \text{ pois } a^m > 0$$

Outro processo

Seja a um número real positivo, sejam n, m e p números naturais e x a raiz índice np de a^{mp} , onde x é positivo:

$$\begin{aligned} x = \sqrt[np]{a^{mp}} &\Leftrightarrow x^{np} = a^{mp}, \text{ por definição} \\ &\Leftrightarrow (x^n)^p = (a^m)^p \\ &\Leftrightarrow x^n = \sqrt[p]{(a^m)^p}, \text{ pois } x^n > 0 \\ &\Leftrightarrow x^n = a^m \\ &\underset{x > 0}{\Leftrightarrow} x = \sqrt[n]{a^m}, \text{ por definição} \end{aligned}$$

Provamos, assim, que $\sqrt[np]{a^{mp}} = \sqrt[n]{a^m}$.

19.

$$\begin{aligned} \text{a) } \sqrt[5]{486} + \frac{\sqrt[5]{2}}{3} - \sqrt[10]{4} &= \sqrt[5]{3^5 \times 2} + \frac{\sqrt[5]{2}}{3} - \sqrt[10]{2^2} \\ &= 3\sqrt[5]{2} + \frac{\sqrt[5]{2}}{3} - \sqrt[5]{2} \\ &= \frac{9\sqrt[5]{2}}{3} + \frac{\sqrt[5]{2}}{3} - \frac{3\sqrt[5]{2}}{3} \\ &= \frac{7\sqrt[5]{2}}{3} \end{aligned}$$

| | |
|-----|---|
| 486 | 2 |
| 243 | 3 |
| 81 | 3 |
| 27 | 3 |
| 9 | 3 |
| 3 | 3 |
| 1 | |

$$\begin{aligned} \text{b) } \frac{\sqrt[9]{4\,096\,000}}{\sqrt[3]{4}} - \sqrt[3]{5} &= \frac{\sqrt[9]{2^{15} \times 5^3}}{\sqrt[3]{4}} - \sqrt[3]{5} \\ &= \frac{\sqrt[9]{2^{15} \times 5^3}}{\sqrt[3]{4}} - \sqrt[3]{5} \\ &= \frac{\sqrt[3]{2^5 \times 5^3}}{\sqrt[3]{2^2}} - \sqrt[3]{5} \\ &= \frac{\sqrt[3]{2^5}}{\sqrt[3]{2^2}} \times \sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{5} \\ &= \sqrt[3]{2^3} \times \sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{5} \\ &= 2\sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{5} \\ &= \sqrt[3]{5} \end{aligned}$$

| | |
|---------|---|
| 4096000 | 2 |
| 2048000 | 2 |
| 1024000 | 2 |
| 512000 | 2 |
| 256000 | 2 |
| 128000 | 2 |
| 64000 | 2 |
| 32000 | 2 |
| 16000 | 2 |
| 8000 | 2 |
| 4000 | 2 |
| 2000 | 2 |
| 1000 | 2 |
| 500 | 2 |
| 250 | 2 |
| 125 | 5 |
| 25 | 5 |
| 5 | 5 |
| 1 | |

$$\begin{aligned}
 \text{c) } \sqrt[4]{275} \times \sqrt{5} + \frac{\sqrt[4]{11}}{3} &= \sqrt[4]{5^2 \times 11} \times \sqrt{5} + \frac{\sqrt[4]{11}}{3} \\
 &= \sqrt[4]{5^2} \times \sqrt[4]{11} \times \sqrt{5} + \frac{\sqrt[4]{11}}{3} \\
 &= \sqrt{5} \times \sqrt[4]{11} \times \sqrt{5} + \frac{\sqrt[4]{11}}{3} \\
 &= 5 \times \sqrt[4]{11} + \frac{\sqrt[4]{11}}{3} \\
 &= \frac{15 \times \sqrt[4]{11}}{3} + \frac{\sqrt[4]{11}}{3} \\
 &= \frac{16 \sqrt[4]{11}}{3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r|l}
 275 & 5 \\
 55 & 5 \\
 11 & 11 \\
 1 &
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 \text{d) } \sqrt[3]{5} \times \sqrt{5} \times \sqrt[6]{35} + \frac{\sqrt[6]{7}}{4} &= \sqrt[6]{5^2} \times \sqrt[6]{5^3} \times \sqrt[6]{35} + \frac{\sqrt[6]{7}}{4} = \sqrt[6]{5^2 \times 5^3 \times 35} + \frac{\sqrt[6]{7}}{4} = \sqrt[6]{5^2 \times 5^3 \times 7 \times 5} + \frac{\sqrt[6]{7}}{4} \\
 &= \sqrt[6]{5^6 \times 7} + \frac{\sqrt[6]{7}}{4} \\
 &= 5 \sqrt[6]{7} + \frac{\sqrt[6]{7}}{4} \\
 &= \frac{20 \sqrt[6]{7}}{4} + \frac{\sqrt[6]{7}}{4} \\
 &= \frac{21 \sqrt[6]{7}}{4}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{e) } \left(\frac{\sqrt[3]{2} \times \sqrt[5]{3}}{\sqrt[15]{36}} \right)^5 - \sqrt[3]{3} &= \left(\frac{\sqrt[15]{2^5 \times 3^5}}{\sqrt[15]{2^2 \times 3^2}} \right)^5 - \sqrt[3]{3} \\
 &= \left(\frac{\sqrt[15]{2^5 \times 3^3}}{\sqrt[15]{2^2 \times 3^2}} \right)^5 - \sqrt[3]{3} \\
 &= \left(\sqrt[15]{\frac{2^5 \times 3^3}{2^2 \times 3^2}} \right)^5 - \sqrt[3]{3} \\
 &= \left(\sqrt[15]{2^3 \times 3} \right)^5 - \sqrt[3]{3} \\
 &= \sqrt[15]{(2^3 \times 3)^5} - \sqrt[3]{3} \\
 &= \sqrt[15]{2^{15} \times 3^5} - \sqrt[3]{3} \\
 &= 2 \sqrt[15]{3^5} - \sqrt[3]{3} \\
 &= 2 \sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{3} \\
 &= \sqrt[3]{3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r|l}
 36 & 2 \\
 18 & 2 \\
 9 & 3 \\
 3 & 3 \\
 1 &
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 \text{f) } \sqrt[3]{2\sqrt{5}} \times \sqrt{5} \times \sqrt[3]{5} - (\sqrt[3]{2} - 1)^2 &= \sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{\sqrt{5}} \times \sqrt{5} \times \sqrt[3]{5} - ((\sqrt[3]{2})^2 - 2\sqrt[3]{2} + 1) \\
 &= 2^{\frac{1}{3}} \times 5^{\frac{1}{6}} \times 5^{\frac{1}{2}} \times 5^{\frac{1}{3}} - \sqrt[3]{4} + 2\sqrt[3]{2} - 1 \\
 &= 2^{\frac{1}{3}} \times 5^{\frac{1}{6} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}} - \sqrt[3]{4} + 2\sqrt[3]{2} - 1 \\
 &= 2^{\frac{1}{3}} \times 5^{\frac{1}{6} + \frac{3}{6} + \frac{2}{6}} - \sqrt[3]{4} + 2\sqrt[3]{2} - 1 \\
 &= 2^{\frac{1}{3}} \times 5^1 - \sqrt[3]{4} + 2\sqrt[3]{2} - 1 \\
 &= 5\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{4} + 2\sqrt[3]{2} - 1 \\
 &= 7\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{4} - 1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{g)} \quad (2\sqrt[6]{9} + 3\sqrt[3]{3}) \times \sqrt[3]{\sqrt{162}} - \sqrt[12]{4^7} &= (2\sqrt[6]{9} + 3\sqrt[6]{3^2}) \times \sqrt[6]{162} - \sqrt[12]{(2^2)^7} \\
 &= 5\sqrt[6]{9} \times \sqrt[6]{2 \times 3^4} - \sqrt[12]{2^{14}} \\
 &= 5\sqrt[6]{3^2 \times 2 \times 3^4} - \sqrt[6]{2^7} \\
 &= 5\sqrt[6]{3^6 \times 2} - \sqrt[6]{2^6 \times 2} \\
 &= 5 \times 3 \times \sqrt[6]{2} - 2\sqrt[6]{2} \\
 &= 15\sqrt[6]{2} - 2\sqrt[6]{2} \\
 &= 13\sqrt[6]{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r|l}
 162 & 2 \\
 81 & 3 \\
 27 & 3 \\
 9 & 3 \\
 3 & 3 \\
 1 &
 \end{array}$$

20.

$$\text{a)} \quad \sqrt{250} = \sqrt{2 \times 5^2 \times 5} = 5\sqrt{10}$$

$$\text{b)} \quad \sqrt[3]{250} = \sqrt[3]{2 \times 5^3} = 5\sqrt[3]{2}$$

$$\begin{array}{r|l}
 250 & 2 \\
 125 & 5 \\
 25 & 5 \\
 5 & 5 \\
 1 &
 \end{array}$$

$$\text{c)} \quad \sqrt{1008} = \sqrt{2^2 \times 2^2 \times 3^2 \times 7} = 12\sqrt{7}$$

$$\begin{array}{r|l}
 1008 & 2 \\
 504 & 2 \\
 252 & 2 \\
 126 & 2 \\
 63 & 3 \\
 21 & 3 \\
 7 & 7 \\
 1 &
 \end{array}$$

$$\text{d)} \quad \sqrt[3]{1008} = \sqrt[3]{2^3 \times 2 \times 3^2 \times 7} = 2\sqrt[3]{126}$$

$$\text{e)} \quad \sqrt[4]{1008} = \sqrt[4]{2^4 \times 3^2 \times 7} = 2\sqrt[4]{63}$$

21.

$$\text{a)} \quad \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{b)} \quad \frac{6}{\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{(\sqrt{3})^2} = \frac{6\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}$$

$$\text{c)} \quad \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2} \times \sqrt{3}}{(\sqrt{3})^2} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$\text{d)} \quad \frac{1}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{2^2}} = \frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{2^3}} = \frac{\sqrt[3]{4}}{2}$$

$$\text{e)} \quad \frac{2}{5\sqrt[4]{3}} = \frac{2^4\sqrt[4]{3^3}}{5^4\sqrt[4]{3} \times \sqrt[4]{3^3}} = \frac{2^4\sqrt[4]{27}}{5^4\sqrt[4]{3^4}} = \frac{2^4\sqrt[4]{27}}{5 \times 3} = \frac{2^4\sqrt[4]{27}}{15}$$

$$\text{f)} \quad \frac{2}{4-\sqrt{3}} = \frac{2(4+\sqrt{3})}{(4-\sqrt{3})(4+\sqrt{3})} = \frac{8+2\sqrt{3}}{4^2-(\sqrt{3})^2} = \frac{8+2\sqrt{3}}{16-3} = \frac{8+2\sqrt{3}}{13}$$

$$\begin{aligned}
 \text{g)} \quad \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{6}} &= \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-\sqrt{6})}{(\sqrt{3}+\sqrt{6})(\sqrt{3}-\sqrt{6})} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{12}}{(\sqrt{3})^2-(\sqrt{6})^2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{12}}{3-6} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{12}}{-3} = \\
 &= -\frac{\sqrt{6}-\sqrt{12}}{3} = -\frac{\sqrt{6}-2\sqrt{3}}{3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r|l}
 12 & 2 \\
 6 & 2 \\
 3 & 3 \\
 1 &
 \end{array}$$

$$\text{h)} \quad \frac{\sqrt{3}+\sqrt{6}}{\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{3}+\sqrt{6})\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{12}}{2} = \frac{\sqrt{6}+2\sqrt{3}}{2}$$

$$i) \frac{1}{2\sqrt{3}-4\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{3}+4\sqrt{5}}{(2\sqrt{3})^2-(4\sqrt{5})^2} = \frac{2\sqrt{3}+4\sqrt{5}}{4 \times 3 - 16 \times 5} = \frac{2\sqrt{3}+4\sqrt{5}}{12-80} = \frac{2\sqrt{3}+4\sqrt{5}}{-68} = \frac{\sqrt{3}+2\sqrt{5}}{-34}$$

$$22. \sqrt{5}x + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{5}x + 2x = 3 \Leftrightarrow (\sqrt{5} + 2)x = 3$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{3}{\sqrt{5}+2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{3(\sqrt{5}-2)}{(\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-2)}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{3\sqrt{5}-6}{5-4}$$

$$\Leftrightarrow x = 3\sqrt{5} - 6$$

$$C.S. = \{3\sqrt{5} - 6\}$$

23.

$$a) \frac{\sqrt{35}}{\sqrt{7}} - 2\sqrt{180} + \frac{10}{\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{35}{7}} - 2 \times 6\sqrt{5} + \frac{10\sqrt{5}}{5}$$

$$= \sqrt{5} - 12\sqrt{5} + 2\sqrt{5}$$

$$= -9\sqrt{5}$$

$$\begin{array}{r|l} 180 & 2 \\ 90 & 2 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$$\sqrt{180} = 6\sqrt{5}$$

$$b) \sqrt[4]{1875} + \sqrt{\sqrt{12}} \times \sqrt[4]{\frac{1}{4}} = 5\sqrt[4]{3} + \sqrt[4]{12} \times \sqrt[4]{\frac{1}{4}}$$

$$= 5\sqrt[4]{3} + \sqrt[4]{\frac{12}{4}}$$

$$= 5\sqrt[4]{3} + \sqrt[4]{3} = 6\sqrt[4]{3}$$

$$\begin{array}{r|l} 1875 & 3 \\ 625 & 5 \\ 125 & 5 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$$1875 = 3 \times 5^4$$

24.

a) Seja x a medida da aresta do octaedro:

$$x^2 = 4^2 + 4^2 \Leftrightarrow x^2 = 16 + 16 \Leftrightarrow x^2 = 32 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{32}$$

Como $x > 0$, $x = \sqrt{32}$, isto é, $x = 4\sqrt{2}$ cm.

$$b) P_{\text{face octaedro}} = 3 \times 4\sqrt{2} = 12\sqrt{2} \text{ cm}$$

$$c) A_{\text{face octaedro}} = \frac{4\sqrt{2} \times h}{2}$$

$$= \frac{4\sqrt{2} \times 2\sqrt{6}}{2}$$

$$= \frac{8\sqrt{12}}{2}$$

$$= 4\sqrt{12}$$

$$= 4 \times 2\sqrt{3}$$

$$= 8\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

$$\begin{array}{r|l} 32 & 2 \\ 16 & 2 \\ 8 & 2 \\ 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array}$$

Cálculos auxiliares

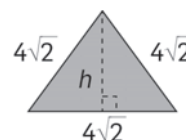
$$(4\sqrt{2})^2 = (2\sqrt{2})^2 + h^2$$

$$\Leftrightarrow 32 = 8 + h^2$$

$$\Leftrightarrow 24 = h^2$$

$$\Leftrightarrow h = \pm\sqrt{24}$$

Como $h > 0$, $h = \sqrt{24}$, ou seja, $h = 2\sqrt{6}$ cm.



$$\begin{array}{r|l} 24 & 2 \\ 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$$24 = 2^3 \times 3$$

$$d) V_{\text{octaedro}} = 2 \times V_{\text{pirâmide}} = 2 \times \frac{1}{3} \times (4\sqrt{2})^2 \times 4 = 2 \times \frac{1}{3} \times 16 \times 2 \times 4 = \frac{256}{3} \text{ cm}^3$$

25.

a) $\sqrt{9 + 4\sqrt{5}} = 2 + \sqrt{5}$ é uma proposição verdadeira se a raiz quadrada de $9 + 4\sqrt{5}$ for $2 + \sqrt{5}$, isto é, se $(2 + \sqrt{5})^2 = 9 + 4\sqrt{5}$.

$$(2 + \sqrt{5})^2 = 2^2 + 2 \times 2\sqrt{5} + (\sqrt{5})^2 = 4 + 4\sqrt{5} + 5 = 9 + 4\sqrt{5}$$

Logo, concluímos que $\sqrt{9 + 4\sqrt{5}} = 2 + \sqrt{5}$ é uma proposição verdadeira.

b) $\sqrt{29 + 12\sqrt{5}} = 3 + 2\sqrt{5}$ é uma proposição verdadeira se a raiz quadrada de $29 + 12\sqrt{5}$ for $3 + 2\sqrt{5}$, isto é, se $(3 + 2\sqrt{5})^2 = 29 + 12\sqrt{5}$.

$$(3 + 2\sqrt{5})^2 = 3^2 + 2 \times 3 \times 2\sqrt{5} + (2\sqrt{5})^2 = 9 + 12\sqrt{5} + 20 = 29 + 12\sqrt{5}$$

Logo, concluímos que $\sqrt{29 + 12\sqrt{5}} = 3 + 2\sqrt{5}$ é uma proposição verdadeira.

26.

a) $(a + b\sqrt{c})^2 = 11 - 6\sqrt{2} \Leftrightarrow a^2 + 2ab\sqrt{c} + b^2 \times c = 11 - 6\sqrt{2}$

$$\Leftrightarrow (a^2 + b^2c) + 2ab\sqrt{c} = 11 - 6\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2c = 11 \\ 2ab\sqrt{c} = -6\sqrt{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2c = 11 \\ 2ab = -6 \\ c = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + 2b^2 = 11 \\ ab = -3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{3}{b}, \text{ pois } b \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(-\frac{3}{b}\right)^2 + 2b^2 = 11 \\ \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{9}{b^2} + 2b^2 = 11 \\ \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 9 + 2(b^2)^2 = 11b^2 \\ \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2(b^2)^2 - 11b^2 + 9 = 0 \\ \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b^2 = \frac{11 \pm \sqrt{(-11)^2 - 4 \times 2 \times 9}}{2 \times 2} \\ \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b^2 = \frac{11 \pm \sqrt{49}}{4} \\ \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b^2 = \frac{9}{2} \\ \text{_____} \end{cases} \vee \begin{cases} b^2 = 1 \\ \text{_____} \end{cases} \quad \text{Como } b \in \mathbb{Z}, \text{ então } b^2 \in \mathbb{Z}, \text{ logo} \\ \text{não podemos ter } b^2 = \frac{9}{2}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = 1 \\ a = -\frac{3}{1} \\ \text{_____} \end{cases} \vee \begin{cases} b = -1 \\ a = \frac{-3}{-1} \\ \text{_____} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = 1 \\ a = -3 \\ c = 2 \end{cases} \vee \begin{cases} b = -1 \\ a = 3 \\ c = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow a + b\sqrt{c} = -3 + \sqrt{2} \vee a + b\sqrt{c} = 3 - \sqrt{2}$$

Como $-3 + \sqrt{2}$ é um número negativo não pode ser a raiz quadrada de $11 - 6\sqrt{2}$. Logo, concluímos que $\sqrt{11 - 6\sqrt{2}} = 3 - \sqrt{2}$.

$$\mathbf{b)} \quad (a + b\sqrt{c})^2 = 9 + 4\sqrt{2} \Leftrightarrow a^2 + 2ab\sqrt{c} + b^2 \times c = 9 + 4\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow (a^2 + b^2c) + 2ab\sqrt{c} = 9 + 4\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2c = 9 \\ 2ab\sqrt{c} = 4\sqrt{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2c = 9 \\ 2ab = 4 \\ c = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + 2b^2 = 9 \\ ab = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{2}{b}\right)^2 + 2b^2 = 9 \\ a = \frac{2}{b}, \text{ pois } b \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{4}{b^2} + 2b^2 = 9 \\ \text{_____} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{4}{b^2} + \frac{2(b^2)^2}{b^2} = \frac{9b^2}{b^2} \\ \text{_____} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4 + 2(b^2)^2 = 9b^2 \\ \text{_____} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2(b^2)^2 - 9b^2 + 4 = 0 \\ \text{_____} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b^2 = \frac{9 \pm \sqrt{(-9)^2 - 4 \times 2 \times 4}}{4} \\ \text{_____} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b^2 = \frac{9 \pm \sqrt{49}}{4} \\ \text{_____} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b^2 = \frac{9 \pm 7}{4} \\ \hline \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b^2 = 4 \\ \hline \end{cases} \vee \begin{cases} b^2 = \frac{1}{2} \\ \hline \end{cases}$$

Como $b \in \mathbb{Z}$, então $b^2 \in \mathbb{Z}$, logo não podemos ter $b^2 = \frac{1}{2}$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = 2 \\ a = \frac{2}{2} \\ c = 2 \end{cases} \vee \begin{cases} b = -2 \\ a = \frac{2}{-2} \\ c = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = 2 \\ a = 1 \\ c = 2 \end{cases} \vee \begin{cases} b = -2 \\ a = -1 \\ c = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow a + b\sqrt{c} = 1 + 2\sqrt{2} \vee a + b\sqrt{c} = -1 - 2\sqrt{2}$$

Como $-1 - 2\sqrt{2}$ é um número negativo não pode ser a raiz quadrada de $9 + 4\sqrt{2}$. Logo, concluímos que $\sqrt{9 + 4\sqrt{2}} = 1 + 2\sqrt{2}$.

Unidade 2 – Potências de expoente racional

Páginas 101 a 105

27.

$$\text{a)} 10^4 \div (2^3 \times 5^3) \times \left(\frac{1}{10}\right)^{-3} \div 5^4 = 10^4 \div 10^3 \times 10^3 \div 5^4 = 10 \times 10^3 \div 5^4 = 10^4 \div 5^4 = 2^4 = 16$$

$$\text{b)} \frac{(18^{-3} \times 2^{-3}) : 6^6}{\left[1000 : \left(\frac{1}{6}\right)^{14}\right] : [(6^2)^{-5} : (36^5)^{-2}]} = \frac{(36^{-3})^{-2} : 6^6}{[1 : 6^{-14}] : [6^{-10} : 36^{-10}]} = \frac{36^{6 \div 6^6}}{\left(\frac{1}{6}\right)^{-14} \div \left(\frac{1}{6}\right)^{-10}} = \frac{6^6}{6^{14 \div 6^{10}}} = \frac{6^6}{6^4} = 6^2 = 36$$

28.

$$\text{a)} 16^{\frac{1}{2}} = \sqrt{16} = 4$$

$$\text{b)} 64^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{64} = 4$$

$$\text{c)} 81^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{81} = 3$$

$$\text{d)} 27^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{27^2} = \sqrt[3]{(3^3)^2} = \sqrt[3]{(3^2)^3} = 9$$

$$\text{e)} 16^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{16^3} = \sqrt[4]{(2^4)^3} = \sqrt[4]{(2^3)^4} = 8$$

$$\text{f)} 16^{\frac{7}{4}} = \sqrt[4]{16^7} = \sqrt[4]{(2^4)^7} = \sqrt[4]{(2^7)^4} = 2^7 = 128$$

29.

$$\text{a)} 25^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{25^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{25}} = \frac{1}{5}$$

$$\text{b)} 8^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{8^{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{8}} = \frac{1}{2}$$

$$\text{c)} 81^{-\frac{1}{4}} = \frac{1}{81^{\frac{1}{4}}} = \frac{1}{\sqrt[4]{81}} = \frac{1}{3}$$

$$\text{d)} 64^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{64^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{64^2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{(2^6)^2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2^{12}}} = \frac{1}{2^{\frac{12}{3}}} = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16}$$

30.

$$\text{a)} a^{\frac{1}{4}} \times a^{\frac{2}{4}} = \sqrt[4]{a} \times \sqrt[4]{a^2} = \sqrt[4]{a \times a^2} = \sqrt[4]{a^3} = a^{\frac{3}{4}}$$

$$\text{b)} a^{\frac{2}{3}} \times a^{\frac{3}{4}} = \sqrt[3]{a^2} \times \sqrt[4]{a^3} = \sqrt[12]{a^8} \times \sqrt[12]{a^9} = \sqrt[12]{a^8 \times a^9} = \sqrt[12]{a^{17}} = a^{\frac{17}{12}}$$

$$\text{c)} \left(a^{\frac{3}{4}}\right)^{\frac{1}{5}} = \left(\sqrt[4]{a^3}\right)^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{\sqrt[4]{a^3}} = \sqrt[20]{a^3} = a^{\frac{3}{20}}$$

$$\text{d)} \frac{6^{\frac{1,3}{2}}}{2^{\frac{1,3}{10}}} = \frac{6^{\frac{13}{10}}}{2^{\frac{13}{10}}} = \frac{10\sqrt[10]{6^{13}}}{10\sqrt[10]{2^{13}}} = \sqrt[10]{\frac{6^{13}}{2^{13}}} = \sqrt[10]{3^{13}} = 3^{\frac{13}{10}} = 3^{1,3}$$

$$\text{e)} \frac{a^{\frac{3}{4}}}{\frac{1}{a^{\frac{1}{2}}}} = \frac{\sqrt[4]{a^3}}{\frac{1}{\sqrt{a}}} = \frac{\sqrt[4]{a^3}}{\sqrt[4]{a^2}} = \sqrt[4]{\frac{a^3}{a^2}} = \sqrt[4]{a} = a^{\frac{1}{4}}$$

31.

$$\text{a)} \sqrt{\frac{\frac{2}{4^{\frac{3}{2}} \times 2}}{\frac{1}{4^6}}} = \sqrt{\frac{(2^2)^{\frac{2}{3}} \times 2}{\frac{1}{4^6}}} = \sqrt{\frac{\frac{4}{2^{\frac{2}{3}} \times 2}}{(2^2)^{\frac{1}{6}}}} = \sqrt{\frac{\frac{4}{2^{\frac{2}{3}+1}}}{\frac{2}{2^6}}} = \sqrt{\frac{\frac{4}{2^{\frac{4}{3}}}}{\frac{2}{2^6}}} = \sqrt{\frac{2^{\frac{7}{3}-\frac{1}{3}}}{2^{\frac{1}{3}}}} = \sqrt{2^2} = 2$$

$$\text{b)} \frac{10^{\frac{2}{3}} \times 2^{\frac{2}{3}} \div 4^{\frac{2}{3}}}{\left(\frac{1}{5^{12}}\right)^2} + 5^{-\frac{1}{2}} = \frac{20^{\frac{2}{3}} \div 4^{\frac{2}{3}}}{\frac{1}{5^{24}}} + \frac{1}{5^{\frac{1}{2}}} = \frac{5^{\frac{2}{3}}}{\frac{1}{5^{\frac{1}{2}}}} + \frac{1}{5^{\frac{1}{2}}} = 5^{\frac{2}{3}+\frac{1}{6}} + \frac{1}{\sqrt{5}} = 5^{\frac{4}{6}+\frac{1}{6}} + \frac{1}{\sqrt{5}} = 5^{\frac{5}{6}} + \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$= \sqrt{5} + \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{(\sqrt{5})^2}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{5+1}{\sqrt{5}} = \frac{6}{\sqrt{5}} = \frac{6\sqrt{5}}{5}$$

$$\begin{aligned} \text{c)} \frac{6^{0,75} \times 6^{-\frac{1}{4}}}{\left(\frac{1}{3^4}\right)^2} + \frac{4\left(\sqrt[3]{5}\right)^3}{\sqrt[3]{4}} &= \frac{6^{\frac{3}{4}} \times 6^{-\frac{1}{4}}}{\frac{1}{3^8}} + \frac{4 \times 5}{\sqrt[3]{4}} = \frac{6^{\frac{2}{4}}}{\frac{1}{3^8}} + \frac{20}{\sqrt[3]{4}} = 2^{\frac{1}{2}} + \frac{20}{\sqrt[3]{4}} = \sqrt{2} + \frac{20}{\sqrt[3]{4}} = \frac{\sqrt{2} \times \sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{4}} + \frac{20}{\sqrt[3]{4}} \\ &= \frac{\sqrt{2} \times \sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{4}} + \frac{20}{\sqrt[3]{4}} = \frac{\frac{1}{2^2} \times 2^{\frac{2}{3}} + 20}{\sqrt[3]{4}} = \frac{2^{\frac{3}{6}+\frac{4}{6}} + 20}{\sqrt[3]{4}} = \frac{2^{\frac{7}{6}} + 20}{\sqrt[3]{4}} \\ &= \frac{6^{\frac{7}{6}} + 20}{\sqrt[3]{4}} = \frac{2^{\frac{7}{2}} + 20}{\sqrt[3]{2^2}} = \frac{(2^{\frac{7}{2}} + 20)^{\frac{1}{3}}}{\sqrt[3]{2^3}} = \frac{2^{\frac{7}{2}} \times \sqrt[3]{2} + 20 \sqrt[3]{2}}{2} \\ &= \sqrt[6]{2} \times \sqrt[6]{2^2} + 10 \sqrt[3]{2} = \sqrt[6]{2^3} + 10 \sqrt[3]{2} = \sqrt{2} + 10 \sqrt[3]{2} \end{aligned}$$

Aprende Fazendo

Páginas 106 a 113

1. (A) $7\sqrt{-10} = -7\sqrt{10}$, afirmação falsa.

(B) Metade de $14\sqrt{10}$ é igual a $\frac{14\sqrt{10}}{2} = 7\sqrt{10}$, logo a afirmação presente nesta opção é verdadeira.

(C) O produto de $7\sqrt{10}$ por $2\sqrt{10}$ é igual a $7\sqrt{10} \times 2\sqrt{10} = 14\sqrt{100} = 140$, que é diferente de $14\sqrt{10}$, logo a afirmação presente nesta opção é falsa.

(D) $10\sqrt{10} + 4\sqrt{10} = 14\sqrt{10}$, logo a afirmação presente nesta opção ($14\sqrt{20} = 10\sqrt{10} + 4\sqrt{10}$) é falsa.

Opção (B)

2. (A) Metade de $8\sqrt{40}$ é igual a $\frac{8\sqrt{40}}{2} = 4\sqrt{40} = 4 \times 2\sqrt{10} = 8\sqrt{10}$, que é diferente de $8\sqrt{5}$.

(B) A soma de $2\sqrt{12}$ com $2\sqrt{8}$ é igual a $2\sqrt{12} + 2\sqrt{8} = 2 \times 2\sqrt{3} + 2 \times 2\sqrt{2} = 4\sqrt{3} + 4\sqrt{2}$, que é diferente de $8\sqrt{5}$.

(C) O dobro de $2\sqrt{10}$ é igual a $2 \times 2\sqrt{10} = 4\sqrt{10}$, que é diferente de $8\sqrt{5}$.

(D) O produto de $2\sqrt{10}$ por $2\sqrt{2}$ é igual a $2\sqrt{10} \times 2\sqrt{2} = 4\sqrt{20} = 4 \times 2\sqrt{5} = 8\sqrt{5}$.

Opção (D)

3. Área do quadrado $= l^2$, onde $l = \sqrt{2} + \sqrt{6}$.

Assim: Área $= (\sqrt{2} + \sqrt{6})^2 = (\sqrt{2})^2 + 2 \times \sqrt{2} \times \sqrt{6} + (\sqrt{6})^2 = 2 + 2\sqrt{12} + 6 = 8 + 2 \times 2\sqrt{3} = 8 + 4\sqrt{3}$

Opção (C)

4. $a^{\frac{3}{4}} \times a^{\frac{5}{6}} = a^{\frac{3}{4} + \frac{5}{6}} = a^{\frac{9}{12} + \frac{10}{12}} = a^{\frac{19}{12}} = \sqrt[12]{a^{19}}$

Opção (C)

5. Nas opções (A), (B) e (C) não se encontram afirmações necessariamente verdadeiras, pois existem números reais positivos a e b e números reais c que as transformam em proposições falsas. Por exemplo, se $a = 4$, $b = 3$ e $c = -3$ tem-se que:

$$\bullet \sqrt[1]{4-3} = \sqrt[2]{4} - \sqrt{3} = 2 - \sqrt{3} \text{ (Falsa)}$$

$$\bullet \sqrt[7]{4+3} = \sqrt[2+\sqrt{3}]{4+\sqrt{3}} \text{ (Falsa)}$$

$$\bullet \sqrt[3]{(-3)^2} = \sqrt[-3]{-3} \text{ (Falsa)}$$

Como a é um número real positivo, sabemos ser sempre verdade que $(\sqrt{a})^2 = a$.

Opção (D)

$$6. \sqrt[3]{\sqrt{\sqrt{3}}} = \left(\left(3^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{3}} = 3^{\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3}} = 3^{\frac{1}{12}}$$

Opção (C)

$$7. \sqrt{3 + \sqrt{23 + \sqrt[3]{6 + \sqrt{4}}}} = \sqrt{3 + \sqrt{23 + \sqrt[3]{6 + 2}}} = \sqrt{3 + \sqrt{23 + \sqrt[3]{8}}} = \sqrt{3 + \sqrt{23 + 2}} = \sqrt{3 + \sqrt{25}} \\ = \sqrt{3 + 5} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

Opção (B)

$$8. \text{Área losango } [ABCD] = \frac{\overline{AC} \times \overline{BD}}{2} = \frac{(7+2\sqrt{3}) \times (7-2\sqrt{3})}{2} \\ = \frac{7^2 - (2\sqrt{3})^2}{2} \\ = \frac{49 - 4 \times 3}{2} \\ = \frac{37}{2}$$

Opção (A)

9. Área parte sombreada = Área $[PQRS] = \overline{PQ}^2 = 7 - 2\sqrt{5}$

Cálculo auxiliar

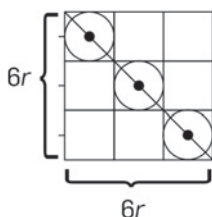
$$\begin{aligned}\overline{PQ}^2 &= \overline{AP}^2 + \overline{AQ}^2 \\ \Leftrightarrow \overline{PQ}^2 &= 1^2 + (\sqrt{5} - 1)^2 \\ \Leftrightarrow \overline{PQ}^2 &= 1 + (\sqrt{5})^2 - 2 \times \sqrt{5} + 1^2 \\ \Leftrightarrow \overline{PQ}^2 &= 1 + 5 - 2\sqrt{5} + 1 \\ \Leftrightarrow \overline{PQ}^2 &= 7 - 2\sqrt{5}\end{aligned}$$

Opção (A)

10. $\sqrt{2} \times \sqrt[3]{5} = \sqrt[2 \times 3]{2^{1 \times 3}} \times \sqrt[3 \times 2]{5^{1 \times 2}} = \sqrt[6]{8} \times \sqrt[6]{25} = \sqrt[6]{200}$

Opção (C)

11.



$$d^2 = (6r)^2 + (6r)^2 \Leftrightarrow d^2 = 36r^2 + 36r^2$$

$$\Leftrightarrow d^2 = 72r^2$$

$$\Leftrightarrow d = \sqrt{72r^2}, \text{ pois } d > 0$$

$$\Leftrightarrow d = \sqrt{72}\sqrt{r^2}$$

$$\Leftrightarrow d = 6\sqrt{2}r, \quad r > 0$$

$$\begin{array}{r|l} 72 & 2 \\ 36 & 2 \\ 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \\ \hline \sqrt{72} & = 6\sqrt{2} \end{array}$$

Opção (B)

12. Área sombreada = $A_{\text{triângulo } [ABC]} - A_{\text{círculo}}$

$$\begin{aligned}&= \frac{\overline{BC} \times \overline{AB}}{2} - \pi \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \\&= \frac{\sqrt{7} \times \sqrt{h^2 - 7}}{2} - \frac{1}{2}\pi \\&= \frac{\sqrt{7(h^2 - 7)} - \pi}{2} \\&= \frac{\sqrt{7h^2 - 49} - \pi}{2}\end{aligned}$$

Cálculo auxiliar

$$\begin{aligned}\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 &= h^2 \\ \Leftrightarrow \overline{AB}^2 + (\sqrt{7})^2 &= h^2 \\ \Leftrightarrow \overline{AB}^2 &= h^2 - 7 \\ \Leftrightarrow \overline{AB} &= \sqrt{h^2 - 7}, \text{ pois } \overline{AB} > 0\end{aligned}$$

Opção (D)

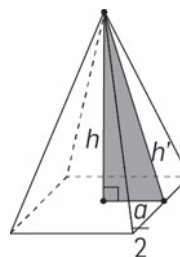
13. Seja $V_{\text{cubo } A} = a^3$ e $V_{\text{cubo } B} = b^3$.

Sabe-se que $V_{\text{cubo } B} = 2 \times V_{\text{cubo } A}$, logo:

$$b^3 = 2 \times a^3 \Leftrightarrow \frac{b^3}{a^3} = 2 \Leftrightarrow \left(\frac{b}{a}\right)^3 = 2 \Leftrightarrow \frac{b}{a} = \sqrt[3]{2}$$

Opção (C)

$$\begin{aligned}14. V_{\text{pirâmide}} &= \frac{1}{3} \times A_{\text{base}} \times h_{\text{pirâmide}} \\&= \frac{1}{3} \times a^2 \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right) \\&= \frac{\sqrt{2}}{6}a^3\end{aligned}$$



Cálculos auxiliares

Determinação da altura h' de cada triângulo (face lateral):

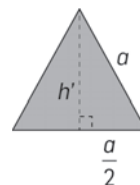
$$(h')^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2 \Leftrightarrow (h')^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} \Leftrightarrow (h')^2 = \frac{3a^2}{4}$$

$$\text{Como } h' > 0, h' = \frac{\sqrt{3}a}{2}.$$

Determinação da altura h da pirâmide:

$$h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = (h')^2 \Leftrightarrow h^2 + \frac{a^2}{4} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2 \Leftrightarrow h^2 = \frac{3a^2}{4} - \frac{a^2}{4} \Leftrightarrow h^2 = \frac{2a^2}{4}$$

$$\text{Como } h > 0, h = \frac{\sqrt{2}a}{2}.$$



Opção (B)

$$15. A = \frac{2\sqrt{x} \times \sqrt[3]{y}}{\sqrt[n]{x} \times \sqrt[n]{y^2}} = \frac{2 \times x^{\frac{1}{2}} \times y^{\frac{1}{3}}}{\sqrt[n]{x} \times \sqrt[n]{y^2}} = \frac{2x^{\frac{1}{2}} \times y^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{n}} \times y^{\frac{2}{n}}} = 2 \times x^{\frac{1}{2} - \frac{1}{n}} \times y^{\frac{1}{3} - \frac{2}{n}}$$

Para que $A = 2\sqrt[3]{x}$, isto é, $A = 2 \times x^{\frac{1}{3}} \times y^0$ terá de verificar-se:

$$\begin{cases} \frac{1}{2} - \frac{1}{n} = \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} - \frac{2}{n} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{6} = \frac{1}{n} \\ \frac{1}{n} = \frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = 6 \\ n = 6 \end{cases}$$

Logo, $n = 6$.

Opção (D)

16.

$$a) \frac{\sqrt{24} \times \sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{48}}{2} = \frac{4\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$$

$$b) \frac{\sqrt{24}}{\sqrt{2}} - 5\sqrt{2} \times \sqrt{6} = \sqrt{12} - 5\sqrt{12} = -4\sqrt{12} = -4 \times 2\sqrt{3} = -8\sqrt{3}$$

$$c) \sqrt{\sqrt{48}} + 10^4\sqrt{3} = \sqrt[4]{48} + 10^4\sqrt{3} \\ = 2^4\sqrt{3} + 10^4\sqrt{3} \\ = 12^4\sqrt{3}$$

$$d) (\sqrt{24} - \sqrt{2})^2 = (\sqrt{24})^2 - 2\sqrt{24} \times \sqrt{2} + (\sqrt{2})^2 = 24 - 2\sqrt{48} + 2 \\ = 26 - 2 \times 4\sqrt{3} \\ = 26 - 8\sqrt{3}$$

$$e) \sqrt{48} + \sqrt{2} - \sqrt{8} - 3\sqrt{12} = 4\sqrt{3} + \sqrt{2} - 2\sqrt{2} - 3 \times 2\sqrt{3} \\ = 4\sqrt{3} - 6\sqrt{3} - \sqrt{2} \\ = -2\sqrt{3} - \sqrt{2}$$

$$f) 1 - (2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3}) = 1 - (2^2 - (\sqrt{3})^2) = 1 - (4 - 3) = 1 - 1 = 0$$

$$\begin{array}{r|l} 48 & 2 \\ 24 & 2 \\ 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \\ \hline \sqrt{48} & = 4\sqrt{3} \\ \sqrt[4]{48} & = 2^4\sqrt{3} \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 \text{g)} \quad & \sqrt{2} + \sqrt{32} + \sqrt{8} - 3\sqrt{98} + 4\sqrt{50} \\
 &= \sqrt{2} + 4\sqrt{2} + 2\sqrt{2} - 3 \times 7\sqrt{2} + 4 \times 5\sqrt{2} \\
 &= 7\sqrt{2} - 21\sqrt{2} + 20\sqrt{2} \\
 &= 6\sqrt{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r|l}
 32 & 2 \\
 16 & 2 \\
 8 & 2 \\
 4 & 2 \\
 2 & 2 \\
 1 &
 \end{array}$$

$$\sqrt{32} = 4\sqrt{2}$$

$$\begin{array}{r|l}
 98 & 2 \\
 49 & 7 \\
 7 & 7 \\
 1 &
 \end{array}$$

$$\sqrt{98} = 7\sqrt{2}$$

$$\begin{array}{r|l}
 50 & 2 \\
 25 & 5 \\
 5 & 5 \\
 1 &
 \end{array}$$

$$\sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

$$\begin{aligned}
 \text{h)} \quad & 7\sqrt{20} - \sqrt{45} + 3\sqrt{5} \\
 &= 7 \times 2\sqrt{5} - 3\sqrt{5} + 3\sqrt{5} \\
 &= 14\sqrt{5}
 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r|l}
 20 & 2 \\
 10 & 2 \\
 5 & 5 \\
 1 &
 \end{array}$$

$$\sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

$$\begin{array}{r|l}
 45 & 3 \\
 15 & 3 \\
 5 & 5 \\
 1 &
 \end{array}$$

$$\sqrt{45} = 3\sqrt{5}$$

$$\begin{aligned}
 \text{i)} \quad & \sqrt{12} - 6\sqrt{3} + \sqrt{27} - \frac{1}{2}\sqrt{48} \\
 &= 2\sqrt{3} - 6\sqrt{3} + 3\sqrt{3} - \frac{1}{2} \times 4\sqrt{3} \\
 &= -\sqrt{3} - 2\sqrt{3} \\
 &= -3\sqrt{3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r|l}
 27 & 3 \\
 9 & 3 \\
 3 & 3 \\
 1 &
 \end{array}$$

$$\sqrt{27} = 3\sqrt{3}$$

$$\begin{aligned}
 \text{j)} \quad & -17\sqrt{5} + \sqrt{245} + 5\sqrt{180} \\
 &= -17\sqrt{5} + 7\sqrt{5} + 5 \times 6\sqrt{5} \\
 &= -10\sqrt{5} + 30\sqrt{5} \\
 &= 20\sqrt{5}
 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r|l}
 245 & 5 \\
 49 & 7 \\
 7 & 7 \\
 1 &
 \end{array}$$

$$\sqrt{245} = 7\sqrt{5}$$

$$\begin{array}{r|l}
 180 & 2 \\
 90 & 2 \\
 45 & 3 \\
 15 & 3 \\
 5 & 5 \\
 1 &
 \end{array}$$

$$\sqrt{180} = 6\sqrt{5}$$

$$\begin{aligned}
 \text{k)} \quad & \sqrt[3]{375} - \sqrt[3]{24} + \sqrt[3]{192} - \sqrt[3]{81} \\
 &= 5\sqrt[3]{3} - 2\sqrt[3]{3} + 4\sqrt[3]{3} - 3\sqrt[3]{3} \\
 &= 4\sqrt[3]{3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r|l}
 375 & 3 \\
 125 & 5 \\
 25 & 5 \\
 5 & 5 \\
 1 &
 \end{array}$$

$$\sqrt[3]{375} = 5\sqrt[3]{3}$$

$$\begin{array}{r|l}
 24 & 2 \\
 12 & 2 \\
 6 & 2 \\
 3 & 3 \\
 1 &
 \end{array}$$

$$\sqrt[3]{24} = 2\sqrt[3]{3}$$

$$\begin{array}{r|l}
 192 & 2 \\
 96 & 2 \\
 48 & 2 \\
 24 & 2 \\
 12 & 2 \\
 6 & 2 \\
 3 & 3 \\
 1 &
 \end{array}$$

$$\sqrt[3]{192} = 4\sqrt[3]{3}$$

$$\begin{array}{r|l}
 81 & 3 \\
 27 & 3 \\
 9 & 3 \\
 3 & 3 \\
 1 &
 \end{array}$$

$$\sqrt[3]{81} = 3\sqrt[3]{3}$$

$$\begin{aligned}
 \text{l)} \quad & 4\sqrt[3]{2048} - 5\sqrt[3]{512} - 6\sqrt[3]{256} \\
 &= 4 \times 8\sqrt[3]{4} - 5 \times 8 - 6 \times 4\sqrt[3]{4} \\
 &= 32\sqrt[3]{4} - 24\sqrt[3]{4} - 40 \\
 &= 8\sqrt[3]{4} - 40
 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r|l}
 2048 & 2 \\
 1024 & 2 \\
 512 & 2 \\
 256 & 2 \\
 128 & 2 \\
 64 & 2 \\
 32 & 2 \\
 16 & 2 \\
 8 & 2 \\
 4 & 2 \\
 2 & 2 \\
 1 &
 \end{array}$$

$$\sqrt[3]{2048} = 8\sqrt[3]{4}; \sqrt[3]{256} = 4\sqrt[3]{4}; \sqrt[3]{512} = 8$$

17.

a) $A \times B = (1 + \sqrt{3}) \times \sqrt{2} = \sqrt{2} + \sqrt{6}$

b) $A^2 - B^2 = (1 + \sqrt{3})^2 - (\sqrt{2})^2 = 1 + 2\sqrt{3} + (\sqrt{3})^2 - 2 = 1 + 2\sqrt{3} + 3 - 2 = 2 + 2\sqrt{3}$

c) $\frac{A}{B} = \frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{(1+\sqrt{3}) \times (\sqrt{2})}{\sqrt{2} \times (\sqrt{2})} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$

d) $\frac{B}{A} = \frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}(1-\sqrt{3})}{(1+\sqrt{3}) \times (1-\sqrt{3})} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{1^2-(\sqrt{3})^2} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{1-3} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{-2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$

e) $\sqrt[3]{B} + 3C = \sqrt[3]{\sqrt{2}} + 3\sqrt[6]{2} = \sqrt[6]{2} + 3\sqrt[6]{2} = 4\sqrt[6]{2}$

f) $A^2 - B^4 + C^6 = (1 + \sqrt{3})^2 - (\sqrt{2})^4 + (\sqrt[6]{2})^6 = 1 + 2\sqrt{3} + (\sqrt{3})^2 - 2^2 + 2$
 $= 1 + 2\sqrt{3} + 3 - 4 + 2 = 2 + 2\sqrt{3}$

18.

a) $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

b) $\frac{5}{\sqrt{10}} = \frac{5\sqrt{10}}{\sqrt{10} \times \sqrt{10}} = \frac{5\sqrt{10}}{10} = \frac{\sqrt{10}}{2}$

c) $\frac{5\sqrt{7}}{2\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{7} \times \sqrt{3}}{2\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{21}}{2 \times 3} = \frac{5\sqrt{21}}{6}$

d) $\frac{4}{\sqrt{13}-\sqrt{11}} = \frac{4(\sqrt{13}+\sqrt{11})}{(\sqrt{13}-\sqrt{11})(\sqrt{13}+\sqrt{11})} = \frac{4(\sqrt{13}+\sqrt{11})}{(\sqrt{13})^2-(\sqrt{11})^2} = \frac{4(\sqrt{13}+\sqrt{11})}{13-11} = \frac{4(\sqrt{13}+\sqrt{11})}{2} = 2(\sqrt{13} + \sqrt{11})$
 $= 2\sqrt{13} + 2\sqrt{11}$

e) $\frac{\sqrt{6}}{1+2\sqrt{3}} = \frac{(\sqrt{6})(1-2\sqrt{3})}{(1+2\sqrt{3})(1-2\sqrt{3})} = \frac{\sqrt{6}-2\sqrt{18}}{1^2-(2\sqrt{3})^2} = \frac{\sqrt{6}-2 \times 3\sqrt{2}}{1-4 \times 3} = \frac{\sqrt{6}-6\sqrt{2}}{-11}$

f) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{10}-2\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{2})(\sqrt{10}+2\sqrt{2})}{(\sqrt{10}-2\sqrt{2})(\sqrt{10}+2\sqrt{2})} = \frac{\sqrt{20}+2\sqrt{4}}{(\sqrt{10})^2-(2\sqrt{2})^2} = \frac{2\sqrt{5}+2 \times 2}{10-4 \times 2} = \frac{2\sqrt{5}+4}{2} = \sqrt{5} + 2$

g) $\frac{3}{\sqrt[3]{5}} = \frac{3\sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5} \times \sqrt[3]{5^2}} = \frac{3\sqrt[3]{25}}{\sqrt[3]{5^3}} = \frac{3\sqrt[3]{25}}{5}$

h) $\frac{1}{\sqrt[4]{6}} = \frac{\sqrt[4]{6^3}}{\sqrt[4]{6} \times \sqrt[4]{6^3}} = \frac{\sqrt[4]{216}}{\sqrt[4]{6^4}} = \frac{\sqrt[4]{216}}{6}$

i) $\frac{2}{\sqrt[5]{2}} = \frac{2 \times \sqrt[5]{2^4}}{\sqrt[5]{2} \times \sqrt[5]{2^4}} = \frac{2\sqrt[5]{2^4}}{\sqrt[5]{2^5}} = \frac{2\sqrt[5]{16}}{2} = \sqrt[5]{16}$

j) $\frac{1}{\sqrt[6]{3}} = \frac{\sqrt[6]{3^5}}{\sqrt[6]{3} \times \sqrt[6]{3^5}} = \frac{\sqrt[6]{3^5}}{\sqrt[6]{3^6}} = \frac{\sqrt[6]{243}}{3}$

19.

a) $\frac{625^{\frac{7}{8}}}{625^{\frac{5}{8}}} = 625^{\frac{7}{8}-\frac{5}{8}} = 625^{\frac{2}{8}}$
 $= 625^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{625}$
 $= 5\sqrt[4]{625} = \sqrt[4]{5^4} = 5$

| | | |
|-----|--|---|
| 625 | | 5 |
| 125 | | 5 |
| 25 | | 5 |
| 5 | | 5 |
| 1 | | |

$$\text{b)} \quad 8^{\frac{1}{3}} \times 8^{-2} = 8^{\frac{1}{3}-2} = 8^{-\frac{5}{3}} = \frac{1}{8^{\frac{5}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{8^5}} = \frac{1}{\sqrt[3]{(2^3)^5}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2^{15}}} = \frac{1}{2^5} = \frac{1}{32}$$

$$\text{c)} \quad (216^{\frac{1}{3}})^4 = (\sqrt[3]{216})^4 = 6^4 = 1296$$

$$\begin{array}{r|l} 216 & 2 \\ 108 & 2 \\ 54 & 2 \\ 27 & 3 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$$\sqrt[3]{216} = 2 \times 3 = 6$$

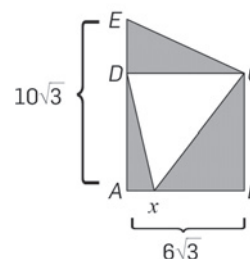
$$\text{d)} \quad (343^{\frac{1}{3}})^{-2} = (\sqrt[3]{343})^{-2} = 7^{-2} = \frac{1}{7^2} = \frac{1}{49}$$

$$\begin{array}{r|l} 343 & 7 \\ 49 & 7 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

$$\sqrt[3]{343} = 7$$

$$20. \text{ Área figura sombreada} = A_{\Delta[CDE]} + A_{[ABCD]} - A_{\Delta[DCX]}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\overline{CD} \times \overline{DE}}{2} + (6\sqrt{3})^2 - \frac{\overline{CD} \times \overline{AD}}{2} \\ &= \frac{6\sqrt{3} \times 4\sqrt{3}}{2} + 36 \times 3 - \frac{6\sqrt{3} \times 6\sqrt{3}}{2} \\ &= \frac{24 \times 3}{2} + 108 - \frac{36 \times 3}{2} \\ &= 36 + 108 - 54 \\ &= 90 \text{ u.a.} \end{aligned}$$



Cálculo auxiliar

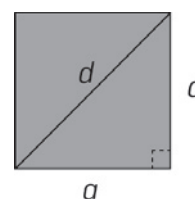
$$\overline{DE} = 10\sqrt{3} - 6\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$$

21. Consideremos um cubo de aresta a .

a) Seja d a diagonal facial do cubo:

$$d^2 = a^2 + a^2 \Leftrightarrow d^2 = 2a^2$$

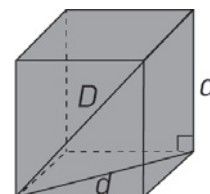
$$\text{Como } d > 0, d = \sqrt{2a^2} \Leftrightarrow d = \sqrt{2}a \quad (a > 0)$$



b) Seja D a diagonal espacial do cubo:

$$D^2 = d^2 + a^2 \Leftrightarrow D^2 = (\sqrt{2}a)^2 + a^2 \Leftrightarrow D^2 = 2a^2 + a^2 \Leftrightarrow D^2 = 3a^2$$

$$\text{Como } D > 0, D = \sqrt{3a^2} \Leftrightarrow D = \sqrt{3}a \quad (a > 0)$$



$$22. x^2 - 4x + 1 = 0$$

• Se $x = 2 + \sqrt{3}$, vem que:

$$(2 + \sqrt{3})^2 - 4(2 + \sqrt{3}) + 1 = 0 \Leftrightarrow 2^2 + 4\sqrt{3} + (\sqrt{3})^2 - 8 - 4\sqrt{3} + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 4 + 4\sqrt{3} + 3 - 8 - 4\sqrt{3} + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 0 = 0$$

Proposição verdadeira, logo $2 + \sqrt{3}$ é solução da equação.

- Se $x = 2 - \sqrt{3}$, vem que:

$$\begin{aligned}(2 - \sqrt{3})^2 - 4(2 - \sqrt{3}) + 1 = 0 &\Leftrightarrow 2^2 - 4\sqrt{3} + (\sqrt{3})^2 - 8 + 4\sqrt{3} + 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow 4 - 4\sqrt{3} + 3 - 8 + 4\sqrt{3} + 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow 0 = 0\end{aligned}$$

Proposição verdadeira, logo $2 - \sqrt{3}$ é solução da equação.

23. $\sqrt{7}x - \sqrt{5} = \sqrt{3}x \Leftrightarrow \sqrt{7}x - \sqrt{3}x = \sqrt{5}$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{7} - \sqrt{3})x = \sqrt{5}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{7} - \sqrt{3}}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{5}(\sqrt{7} + \sqrt{3})}{(\sqrt{7} - \sqrt{3})(\sqrt{7} + \sqrt{3})}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{35} + \sqrt{15}}{(\sqrt{7})^2 - (\sqrt{3})^2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{35} + \sqrt{15}}{7 - 3}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{35} + \sqrt{15}}{4}$$

24.

a) $2^{\frac{1}{6}} + 4^{\frac{1}{12}} = 2^{\frac{1}{6}} + (2^2)^{\frac{1}{12}} = 2^{\frac{1}{6}} + 2^{\frac{2}{12}} = 2^{\frac{1}{6}} + 2^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{2} + \sqrt[6]{2} = 2\sqrt[6]{2}$

b)
$$\left(\frac{\sqrt[5]{8 \times 3^{\frac{1}{2}}}}{\sqrt{6}}\right)^5 = \left(\frac{8^{\frac{1}{5}} \times 3^{\frac{1}{10}}}{6^{\frac{1}{2}}}\right)^5 = \frac{\left(8^{\frac{1}{5}}\right)^5 \times \left(3^{\frac{1}{10}}\right)^5}{\left(6^{\frac{1}{2}}\right)^5} = \frac{8^1 \times 3^{\frac{5}{10}}}{6^{\frac{5}{2}}} = 8 \times \left(\frac{3}{6}\right)^{\frac{5}{2}} = 8 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{5}{2}} = 8 \times \frac{1}{2^{\frac{5}{2}}} = 8 \times \frac{1}{\sqrt{2^5}}$$

$$= 8 \times \frac{1}{2^2 \times \sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

c)
$$(\sqrt{5})^3 \times (\sqrt[3]{5^2})^5 = (5^{\frac{1}{2}})^3 \times (5^{\frac{2}{3}})^5 = 5^{\frac{3}{2}} \times 5^{\frac{10}{3}} = 5^{\frac{3}{2} + \frac{10}{3}} = 5^{\frac{9+20}{6}} = 5^{\frac{29}{6}} = \sqrt[6]{5^{29}} = \sqrt[6]{(5^4)^6 \times 5^5}$$

$$= 5^4 \sqrt[6]{5^5}$$

d)
$$\frac{x^{\frac{5}{4}}}{x^{-1}} + \left(x^{\frac{5}{8}}\right)^2 = x^{\frac{5}{4}+1} + x^{\frac{10}{8}} = x^{\frac{9}{4}} + x^{\frac{5}{4}} = \sqrt[4]{x^9} + \sqrt[4]{x^5} = x^2 \sqrt[4]{x} + x \sqrt[4]{x} = (x^2 + x) \sqrt[4]{x}$$

25.

a)
$$\frac{\sqrt{a}+a}{\sqrt{a}+1} = \frac{(\sqrt{a}+a)(\sqrt{a}-1)}{(\sqrt{a}+1)(\sqrt{a}-1)} = \frac{(\sqrt{a})^2 - \sqrt{a} + a\sqrt{a} - a}{(\sqrt{a})^2 - 1^2} = \frac{a - \sqrt{a} + a\sqrt{a} - a}{a-1} = \frac{a\sqrt{a} - \sqrt{a}}{a-1} = \frac{(a-1)\sqrt{a}}{a-1}$$

$$= \sqrt{a}$$

b)
$$\frac{4a+1}{\sqrt{25a^2-1}+3a} = \frac{(4a+1)(\sqrt{25a^2-1}-3a)}{(\sqrt{25a^2-1}+3a)(\sqrt{25a^2-1}-3a)} = \frac{(4a+1)(\sqrt{25a^2-1}-3a)}{(\sqrt{25a^2-1})^2 - (3a)^2} = \frac{(4a+1)(\sqrt{25a^2-1}-3a)}{25a^2-1-9a^2}$$

$$= \frac{(4a+1)(\sqrt{25a^2-1}-3a)}{16a^2-1} = \frac{(4a+1)(\sqrt{25a^2-1}-3a)}{(4a)^2-1} = \frac{(4a+1)(\sqrt{25a^2-1}-3a)}{(4a+1)(4a-1)} = \frac{\sqrt{25a^2-1}-3a}{4a-1}$$

$$(a \in \mathbb{N})$$

$$c) \frac{\sqrt{d}}{a\sqrt{b}+c\sqrt{d}} = \frac{\sqrt{d}(a\sqrt{b}-c\sqrt{d})}{(a\sqrt{b}+c\sqrt{d})(a\sqrt{b}-c\sqrt{d})} = \frac{\sqrt{d}(a\sqrt{b}-c\sqrt{d})}{(a\sqrt{b})^2-(c\sqrt{d})^2} = \frac{a\sqrt{bd}-c(\sqrt{d})^2}{a^2b-c^2d} = \frac{a\sqrt{bd}-cd}{a^2b-c^2d}$$

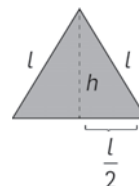
$$d) \sqrt{\frac{a-b}{a+b}} = \frac{\sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b}} = \frac{\sqrt{a-b} \times \sqrt{a+b}}{\sqrt{a+b} \times \sqrt{a+b}} = \frac{\sqrt{(a-b)(a+b)}}{(\sqrt{a+b})^2} = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a+b}$$

\uparrow
 $a > b$
 $a, b \in \mathbb{N}$

26. Consideremos um triângulo equilátero de lado l e seja h a sua altura.

$$h^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 = l^2 \Leftrightarrow h^2 + \frac{l^2}{4} = l^2 \Leftrightarrow h^2 = l^2 - \frac{l^2}{4} \Leftrightarrow h^2 = \frac{3l^2}{4}$$

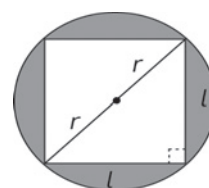
$$\text{Como } h > 0, h = \sqrt{\frac{3l^2}{4}}, \text{ logo } h = \frac{\sqrt{3}l}{2}, l > 0.$$



27. Seja l o lado de um quadrado inscrito numa circunferência de raio r .

$$l^2 + l^2 = (2r)^2 \Leftrightarrow 2l^2 = 4r^2 \Leftrightarrow l^2 = 2r^2$$

$$\text{Como } l > 0, l = \sqrt{2r^2}, \text{ logo, } l = \sqrt{2}r, \text{ com } r > 0.$$



28. Seja a a aresta de um cubo de área total 384 cm^2 . Então, a área de cada face do cubo é

$$\frac{384}{6} = 64 \text{ cm}^2 \text{ e } a^2 = 64, \text{ logo } a = 8 \text{ cm. Seja } l \text{ a aresta da pirâmide quadrangular que tem a}$$

mesma altura e o mesmo volume do cubo:

$$V_{\text{pirâmide}} = V_{\text{cubo}}$$

$$\frac{1}{3} \times l^2 \times 8 = 8^3 \Leftrightarrow l^2 = 192$$

$$\text{Como } l > 0, l = \sqrt{192} \Leftrightarrow l = 8\sqrt{3}.$$

A medida da aresta da base é de $8\sqrt{3} \text{ cm}$.

| | |
|-----|---|
| 192 | 2 |
| 96 | 2 |
| 48 | 2 |
| 24 | 2 |
| 12 | 2 |
| 6 | 2 |
| 3 | 3 |
| 1 | |

29. Seja a a aresta do cubo. Sabe-se que cada face do tetraedro é um triângulo equilátero de

lado $a\sqrt{2}$ (observe-se que cada lado do triângulo corresponde a uma diagonal facial do cubo de aresta a . Sabe-se também que a altura h de um triângulo equilátero de lado l é dada por

$$\frac{\sqrt{3}}{2} l. \text{ Assim, } h = \frac{\sqrt{3}}{2} \times a\sqrt{2}, \text{ isto é, } h = \frac{a\sqrt{6}}{2}. \text{ Logo, a área de cada face do tetraedro é dada}$$

$$\text{por } A = \frac{a\sqrt{2} \times \frac{a\sqrt{6}}{2}}{2} = \frac{a^2\sqrt{12}}{4} = \frac{2a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}a^2}{2}, \text{ como queríamos demonstrar.}$$

30.

$$a) V = a^3 \Leftrightarrow a = \sqrt[3]{V}$$

$$b) \text{ Seja } A \text{ a medida da área da superfície do cubo: } A = 6a^2$$

$$\text{Como } a = \sqrt[3]{V}, \text{ vem que: } A = 6 \times (\sqrt[3]{V})^2 \Leftrightarrow A = 6 \times (V^{\frac{1}{3}})^2 \Leftrightarrow A = 6 \times V^{\frac{2}{3}}$$

31. Consideremos um prisma quadrangular regular em que a área da base mede $b \text{ cm}^2$.

a) Seja a a aresta da base e h a altura do prisma. Temos que $a = \sqrt{b}$ e $h = 4\sqrt{b}$.

$$\text{Logo, } V_{\text{prisma}} = A_{\text{base}} \times h = b \times 4\sqrt{b} = b \times 4 \times b^{\frac{1}{2}} = 4b^{1+\frac{1}{2}} = 4b^{\frac{3}{2}}.$$

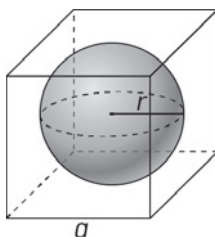
b) $V = 32$

$$4b^{\frac{3}{2}} = 32 \Leftrightarrow b^{\frac{3}{2}} = 8 \Leftrightarrow \sqrt{b^3} = 8$$

$$\text{Logo, } b^3 = 8^2 \Leftrightarrow b^3 = 64 \Leftrightarrow b = \sqrt[3]{64} \Leftrightarrow b = 4 \text{ cm}$$

32.

a) Uma esfera está inscrita num cubo de volume V . Seja a a aresta do cubo e r o raio da esfera.



$$\text{Tem-se que } r = \frac{a}{2}, \text{ e como } V = a^3 \Leftrightarrow a = \sqrt[3]{V}, \text{ vem que } r = \frac{\sqrt[3]{V}}{2}.$$

$$\text{b) } V_{\text{esfera}} = \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{4}{3} \pi \times \left(\frac{\sqrt[3]{V}}{2}\right)^3 = \frac{4}{3} \pi \times \frac{V}{8} = \frac{\pi}{6} V$$

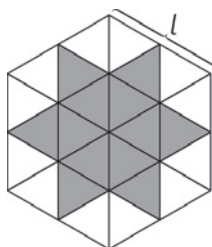
$$\begin{aligned} 33. \text{ Para } x > 0, \sqrt{1 + \sqrt{4x^2 + 4x^3 + x^4}} &= \sqrt{1 + \sqrt{x^2 \times (4 + 4x + x^2)}} = \sqrt{1 + \sqrt{x^2 \times (x+2)^2}} \\ &= \sqrt{1 + \sqrt{x^2} \times \sqrt{(x+2)^2}} \\ &= \sqrt{1 + x \times (x+2)} \\ &\quad \uparrow \\ &\quad x > 0 \\ &= \sqrt{x^2 + 2x + 1} \\ &= \sqrt{(x+1)^2} \\ &= x+1 \\ &\quad \uparrow \\ &\quad x > 0 \end{aligned}$$

34.

$$\begin{aligned} \text{a) } \frac{1}{\sqrt[4]{3}-1} &= \frac{\sqrt[4]{3}+1}{(\sqrt[4]{3}-1)(\sqrt[4]{3}+1)} = \frac{\sqrt[4]{3}+1}{(\sqrt[4]{3})^2-1^2} = \frac{\sqrt[4]{3}+1}{\sqrt[4]{3^2}-1} = \frac{(\sqrt[4]{3}+1) \times (\sqrt[4]{3^2}+1)}{(\sqrt[4]{3^2}-1) \times (\sqrt[4]{3^2}+1)} = \frac{\sqrt[4]{3^3} + \sqrt[4]{3} + \sqrt[4]{3^2} + 1}{(\sqrt[4]{3^2})^2 - 1^2} \\ &= \frac{\sqrt[4]{27} + \sqrt[4]{9} + \sqrt[4]{3} + 1}{\sqrt[4]{3^4} - 1} = \frac{\sqrt[4]{27} + \sqrt[4]{9} + \sqrt[4]{3} + 1}{3 - 1} = \frac{\sqrt[4]{27} + \sqrt[4]{9} + \sqrt[4]{3} + 1}{2} \\ \text{b) } \frac{2}{(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{3})} &= \frac{2((\sqrt[3]{4})^2 + \sqrt[3]{4} \times \sqrt[3]{3} + (\sqrt[3]{3})^2)}{(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{3}) \times ((\sqrt[3]{4})^2 + \sqrt[3]{4} \times \sqrt[3]{3} + (\sqrt[3]{3})^2)} = \frac{2(\sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{12} + \sqrt[3]{9})}{(\sqrt[3]{4})^3 - (\sqrt[3]{3})^3} = \frac{2(2\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{12} + \sqrt[3]{9})}{4-3} \\ &\quad \swarrow \text{Considerando a sugestão} \\ &= 4\sqrt[3]{2} + 2\sqrt[3]{12} + 2\sqrt[3]{9} \end{aligned}$$

35. A estrela da figura 1 pode ser decomposta em 12 triângulos equiláteros de lado $\frac{l}{2}$ e portanto

$$\text{de altura } \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{l}{2} = \frac{\sqrt{3}l}{4}.$$

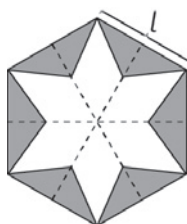


Assim, a área A de cada triângulo pode ser dada em função de l por:

$$A = \frac{\frac{l}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{4}l}{2} = \frac{\sqrt{3}}{16}l^2$$

$$\text{Assim, } A_{\text{estrela figura 1}} = 12A = 12 \times \frac{\sqrt{3}}{16}l^2 = \frac{3\sqrt{3}}{4}l^2.$$

Quanto à estrela representada na figura 2, a sua área pode ser vista como a diferença entre a área do hexágono de lado l e a área ocupada pelos 6 triângulos a sombreado na figura abaixo.



Observe-se que a base de cada um destes triângulos é l e a altura h é metade da altura de cada um dos 6 triângulos equiláteros nos quais o hexágono regular pode ser decomposto.

$$\text{Assim, } h = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}l}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}l.$$

Portanto, a área ocupada pelos 6 triângulos considerados é dada por:

$$A_1 = 6 \times \frac{l \times \frac{\sqrt{3}}{4}l}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4}l^2$$

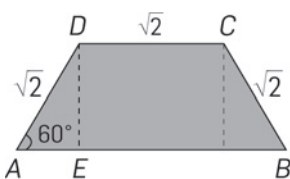
Como a área do hexágono de lado l é dada por:

$$A_2 = 6 \times \frac{l \times \frac{\sqrt{3}}{2}l}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}l^2$$

vem que:

$$A_{\text{estrela figura 2}} = A_2 - A_1 = \frac{3\sqrt{3}}{2}l^2 - \frac{3\sqrt{3}}{4}l^2 = \frac{6\sqrt{3}l^2 - 3\sqrt{3}l^2}{4} = \frac{3\sqrt{3}l^2}{4}$$

36.



Cálculo auxiliar

$$\cos 60^\circ = \frac{\overline{AE}}{\overline{AD}} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{\overline{AE}}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \overline{AE} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{Logo, } \overline{AB} = 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2} = 2\sqrt{2} \text{ cm.}$$

Assim:

- Perímetro:

$$P = 2\sqrt{2} + \sqrt{2} + \sqrt{2} + \sqrt{2} = 5\sqrt{2} \text{ cm, como queríamos demonstrar.}$$

- Área:

$$\begin{aligned} A &= \frac{2\sqrt{2} + \sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{6}}{2} = \frac{3\sqrt{2} \times \sqrt{6}}{4} \\ &= \frac{3\sqrt{12}}{4} \\ &= \frac{3 \times 2\sqrt{3}}{4} \\ &= \frac{3\sqrt{3}}{2} \text{ cm}^2, \text{ como queríamos demonstrar.} \end{aligned}$$

Cálculo auxiliar

$$\text{Sen } 60^\circ \quad \frac{\overline{DE}}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\overline{DE}}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \overline{DE} = \frac{\sqrt{6}}{2} \text{ cm}$$

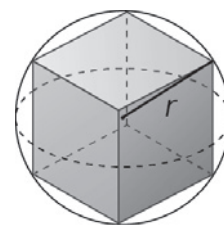
37. Seja um cubo de aresta a inscrito numa superfície esférica de volume V e raio r .

A diagonal espacial D do cubo é dada por $D = \sqrt{3}a$ e tem-se que:

$$r = \frac{D}{2}, \text{ isto é, } r = \frac{\sqrt{3}a}{2}.$$

Sabe-se também que $V = \frac{4}{3}\pi r^3$. Logo, $V = \frac{4}{3}\pi \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^3$. Assim:

$$V = \frac{4}{3}\pi \times \frac{3\sqrt{3} \times a^3}{8} \Leftrightarrow V = \frac{\pi\sqrt{3}a^3}{2} \Leftrightarrow a^3 = \frac{2V}{\pi\sqrt{3}} \Leftrightarrow a = \sqrt[3]{\frac{2V}{\pi\sqrt{3}}}$$



Unidade 3 – Divisão inteira de polinómios

Páginas 114 a 141

32. São polinómios as expressões representadas em (i) $\left(\frac{x}{2}\right)$ e em (iii) $(x^2 + \sqrt{3})$.

33.

- a) $5x - 6x^3 + 7 = -6x^3 + 5x + 7$; grau 3
b) $\frac{1}{2}x^4 - 3x^{10} + 12 + 3x^{10} = \frac{1}{2}x^4 + 12$; grau 4
c) $3 - x = -x + 3$; grau 1
d) $(3 - x)^2 = 9 - 6x + x^2 = x^2 - 6x + 9$; grau 2

34. Por exemplo:

- a) $-x^4 - 2016x$
b) $\sqrt{2}x^3 - \pi x^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}x - \sqrt[3]{5}$

35.

- a) $A(x) + B(x) = \left(\frac{x^2}{3} - 2x + 2\right) + (x^4 - 2x^3 + x^2 - 10)$
 $= x^4 - 2x^3 + \frac{x^2}{3} + x^2 - 2x + 2 - 10$
 $= x^4 - 2x^3 + \frac{4}{3}x^2 - 2x - 8$; grau 4
b) $B(x) + C(x) = (x^4 - 2x^3 + x^2 - 10) + \left(-x^2 + \frac{5}{2}x^3 - x^4\right)$
 $= x^4 - x^4 - 2x^3 + \frac{5}{2}x^3 + x^2 - x^2 - 10$
 $= \frac{1}{2}x^3 - 10$; grau 3

$$\begin{aligned}
 \text{c) } B(x) - C(x) &= (x^4 - 2x^3 + x^2 - 10) - \left(-x^2 + \frac{5}{2}x^3 - x^4\right) \\
 &= x^4 + x^4 - 2x^3 - \frac{5}{2}x^3 + x^2 + x^2 - 10 \\
 &= 2x^4 - \frac{9}{2}x^3 + 2x^2 - 10; \text{ grau 4} \\
 \text{d) } A(x) - (B(x) + C(x)) &= \left(\frac{x^2}{3} - 2x + 2\right) - \left(\frac{\frac{1}{2}x^3 - 10}{\text{alínea b)}}\right) = -\frac{1}{2}x^3 + \frac{x^2}{3} - 2x + 2 + 10 \\
 &= -\frac{x^3}{2} + \frac{x^2}{3} - 2x + 12; \text{ grau 3}
 \end{aligned}$$

36.

$$\begin{aligned}
 \text{a) } A(x) \times B(x) &= (3x^6) \times (x^2 - 2x + 1) = 3x^8 - 6x^7 + 3x^6; \text{ grau 8} \\
 \text{b) } B(x) \times C(x) &= (x^2 - 2x + 1) \times (-x^3 + 2x) = -x^5 + 2x^3 + 2x^4 - 4x^2 - x^3 + 2x \\
 &= -x^5 + 2x^4 + x^3 - 4x^2 + 2x; \text{ grau 5} \\
 \text{c) } A(x) \times (-C(x)) &= (3x^6) \times (x^3 - 2x) = 3x^9 - 6x^7; \text{ grau 9} \\
 \text{d) } B(x) \times B(x) &= (x^2 - 2x + 1) \times (x^2 - 2x + 1) \\
 &= x^4 - 2x^3 + x^2 - 2x^3 + 4x^2 - 2x + x^2 - 2x + 1 \\
 &= x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1; \text{ grau 4} \\
 \text{e) } A(x) \times (B(x) + C(x)) &= (3x^6) \times ((x^2 - 2x + 1)(-x^3 + 2x)) = 3x^6 \times (-x^3 + x^2 + 1) \\
 &= -3x^9 + 3x^8 + 3x^6; \text{ grau 9}
 \end{aligned}$$

37.

$$\begin{aligned}
 \text{a) } A(x) \times B(x) &= (x^3 + 3x^2 - 2) \times (4x^5 - x + 1) \\
 &= x^3 \times (4x^5 - x + 1) + 3x^2(4x^5 - x + 1) - 2(4x^5 - x + 1) \\
 &= 4x^8 - x^4 + x^3 + 12x^7 - 3x^3 + 3x^2 - 8x^5 + 2x - 2 \\
 &= 4x^8 + 12x^7 - 8x^5 - x^4 - 2x^3 + 3x^2 + 2x - 2; \text{ grau 8} \\
 \text{b) } A(x) \times B(x) &= (x^n + 3x^2 - 2) \times (4x^m - x + 1) \\
 &= x^n \times (4x^m - x + 1) + 3x^2(4x^m - x + 1) - 2(4x^m - x + 1) \\
 &= 4x^{n+m} - x^{n+1} + x^n + 12x^{2+m} - 3x^3 + 3x^2 - 8x^m + 2x - 2
 \end{aligned}$$

O grau do polinómio $A(x) \times B(x)$ é $n + m$, que resulta da soma do grau do polinómio $A(x)$, n , com o grau do polinómio $B(x)$, m .

$$\text{38. } (x + 3)(ax + b) + c = ax^2 + bx + 3ax + 3b + c = ax^2 + (b + 3a)x + 3b + c$$

Para que o polinómio $ax^2 + (b + 3a)x + 3b + c$ seja igual ao polinómio $x^2 + x - 2$, tem que se verificar $a = 1 \wedge b + 3a = 1 \wedge 3b + c = -2$.

Assim:

$$\begin{cases} a = 1 \\ b + 3a = 1 \\ 3b + c = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b + 3 = 1 \\ 3b + c = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \\ -6 + c = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \\ c = 4 \end{cases}$$

39.

a)

$$\begin{array}{r} 2x^3 - 3x^2 + 4x - 8 \mid x^3 - 1 \\ -2x^3 + 2 \\ \hline -3x^2 + 4x - 6 \end{array}$$

$$Q = 2$$

$$R(x) = -3x^2 + 4x - 6$$

b)

$$\begin{array}{r} 2x^3 - 3x^2 + 4x - 8 \mid x^2 + 3x + 1 \\ -2x^3 - 6x^2 - 2x \\ \hline -9x^2 + 2x - 8 \\ +9x^2 + 27x + 9 \\ \hline 29x + 1 \end{array}$$

$$Q(x) = 2x - 9$$

$$R(x) = 29x + 1$$

c)

$$\begin{array}{r} 2x^3 - 3x^2 + 4x - 8 \mid -x + 4 \\ -2x^3 + 8x^2 \\ \hline 5x^2 + 4x - 8 \\ -5x^2 + 20x \\ \hline 24x - 8 \\ -24x + 96 \\ \hline 88 \end{array}$$

$$Q(x) = -2x^2 - 5x - 24$$

$$R = 88$$

40.

a) $(2 + 5x + x^2) : (x + 4)$

$$\begin{array}{r} x^2 + 5x + 2 \mid x + 4 \\ -x^2 - 4x x + 1 \\ \hline x + 2 \\ -x - 4 \\ \hline -2 \end{array}$$

$$\text{Assim: } 2 + 5x + x^2 = (x + 4)(x + 1) - 2$$

b) $(3 - 3x^2 + x^4) : (x - x^2)$

$$\begin{array}{r} x^4 + 3 \mid -x^2 + x \\ -x^4 + x^3 -x^2 - x + 2 \\ \hline x^3 - 3x^2 + 3 \\ -x^3 + x^2 \\ \hline -2x^2 + 3 \\ 2x^2 - 2x \\ \hline -2x + 3 \end{array}$$

$$\text{Assim: } 3 - 3x^2 + x^4 = (x - x^2) \times (-x^2 - x + 2) + (-2x + 3)$$

Assim: $x^5 - 1 = (x - 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$

$$\text{Assim: } \frac{1}{2}x^3 + 2x^2 - 20x + 10 = \left(\frac{1}{3}x + 3\right) \times \left(\frac{3}{2}x^2 - \frac{15}{2}x + \frac{15}{2}\right) - \frac{25}{2}$$

Logo: $29 + k = 0 \Leftrightarrow k = -29$

42.

a) $A(x) = x^3 - 4x^2 - 7x + 10$

$B(x) = x - 2$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -4 & -7 & 10 \\ 2 & & 2 & -4 & -22 \\ \hline & 1 & -2 & -11 & -12 \end{array}$$

$Q(x) = x^2 - 2x - 11 \quad R = -12$

b) $A(x) = x^3 - 4x^2 - 7x + 10$

$B(x) = x + 3 = x - (-3)$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -4 & -7 & 10 \\ -3 & & -3 & 21 & -42 \\ \hline & 1 & -7 & 14 & -32 \end{array}$$

$Q(x) = x^2 - 7x + 14 \quad R = -32$

c) $A(x) = x^3 - 4x^2 - 7x + 10$

$B(x) = x - 1$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -4 & -7 & 10 \\ 1 & & 1 & -3 & -10 \\ \hline & 1 & -3 & -10 & 0 \end{array}$$

$Q(x) = x^2 - 3x - 10 \quad R = 0$

d) $A(x) = x^3 - 4x^2 - 7x + 10$

$B(x) = x + \frac{1}{2} = x - \left(-\frac{1}{2}\right)$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -4 & -7 & 10 \\ -\frac{1}{2} & & -\frac{1}{2} & \frac{9}{4} & \frac{19}{8} \\ \hline & 1 & -\frac{9}{2} & -\frac{19}{4} & \frac{99}{8} \end{array}$$

$Q(x) = x^2 - \frac{9}{2}x - \frac{19}{4} \quad R = \frac{99}{8}$

43. $A(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d; a \neq 0; a, b, c, d \in \mathbb{R}$

$B(x) = x - 1$

$$\begin{array}{r|rrrr} & a & b & c & d \\ 1 & & a & a+b & a+b+c \\ \hline & a & a+b & a+b+c & a+b+c+d \end{array}$$

$Q(x) = ax^2 + (a+b)x + (a+b+c) \quad R = a+b+c+d$

Os polinômios $Q(x)$ e R são, de facto, o quociente e o resto, respetivamente, da divisão inteira de $A(x)$ por $B(x)$ se se verificar $A(x) = B(x) \times Q(x) + R$ ou seja, se

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = (x-1) \times (ax^2 + (a+b)x + (a+b+c)) + (a+b+c+d).$$

Calculemos $B(x) \times Q(x) + R$:

$$\begin{aligned} B(x) \times Q(x) + R &= (x-1)(ax^2 + (a+b)x + (a+b+c)) + (a+b+c+d) \\ &= ax^3 + (a+b)x^2 + (a+b+c)x - ax^2 - (a+b)x - (a+b+c) + a+b+c+d \\ &= ax^3 + ax^2 + bx^2 + ax + bx + cx - ax^2 - ax - bx - a - b - c + a+b+c+d \\ &= ax^3 + bx^2 + cx + d \\ &= A(x), \text{ como queríamos demonstrar.} \end{aligned}$$

44.

a) $A(x) = 3x^4 + x^2 + 1$

$$B(x) = x + \frac{2}{3} = x - \left(-\frac{2}{3}\right)$$

| | | | | | |
|----------------|---|----|----------------|-----------------|-----------------|
| $-\frac{2}{3}$ | 3 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| | | -2 | $+\frac{4}{3}$ | $-\frac{14}{9}$ | $\frac{28}{27}$ |
| | 3 | -2 | $\frac{7}{3}$ | $-\frac{14}{9}$ | $\frac{55}{27}$ |

$$Q(x) = 3x^3 - 2x^2 + \frac{7}{3}x - \frac{14}{9} \quad R = \frac{55}{27}$$

b) $A(x) = 3x^4 + x^2 + 1$

$$B(x) = 3x + 2 = 3 \left(x + \frac{2}{3}\right)$$

Como sabemos da alínea anterior, o quociente e o resto da divisão de $A(x)$ por $x + \frac{2}{3}$ são, respetivamente, os polinómios $3x^3 - 2x^2 + \frac{7}{3}x - \frac{14}{9}$ e $R = \frac{55}{27}$

Assim, o quociente e o resto da divisão de $A(x)$ por $3 \left(x + \frac{2}{3}\right)$ são, respetivamente, os polinómios $\frac{Q(x)}{3}$ e R , ou seja, $x^3 - \frac{2}{3}x^2 + \frac{7}{9}x - \frac{14}{27}$ e $\frac{55}{27}$.

45.

a) $(x^2 - x^4 - x^3 + 6) : x = (-x^4 - x^3 + x^2 + 6) : 6$

| | | | | | |
|---|----|----|---|---|---|
| 0 | -1 | -1 | 1 | 0 | 6 |
| | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | -1 | -1 | 1 | 0 | 6 |

$$Q(x) = -x^3 - x^2 + x \quad R = 6$$

b) $(4x^3 - 6) : (2x - 1)$

| | | | | |
|---------------|---|---|---|-----------------|
| $\frac{1}{2}$ | 4 | 0 | 0 | -6 |
| | | 2 | 1 | $\frac{1}{2}$ |
| | 4 | 2 | 1 | $-\frac{11}{2}$ |

Cálculo auxiliar

$$2x - 1 = 2 \left(x - \frac{1}{2}\right)$$

$$Q(x) = \frac{4x^2}{2} + \frac{2x}{2} + \frac{1}{2} = 2x^2 + x + \frac{1}{2} \quad R = -\frac{11}{2}$$

c) $(8x^2 - 5x + 1) : (4x + 1)$

| | | | |
|----------------|---|----|----------------|
| $-\frac{1}{4}$ | 8 | -5 | 1 |
| | | -2 | $\frac{7}{4}$ |
| | 8 | -7 | $\frac{11}{4}$ |

Cálculo auxiliar

$$4x + 1 = 4 \left(x + \frac{1}{4}\right)$$

$$Q(x) = \frac{8x}{4} - \frac{7}{4} = 2x - \frac{7}{4} \quad R = \frac{11}{4}$$

46. $(x^5 + kx + 12) : (x + 2)$

| | | | | | | |
|----|---|----|---|----|----------|----------------|
| -2 | 1 | 0 | 0 | 0 | k | 12 |
| | | -2 | 4 | -8 | 16 | $-32 - 2k$ |
| | 1 | -2 | 4 | -8 | $16 + k$ | $-2k - 20 = R$ |

Para que o polinómio $x^5 + kx + 12$ seja divisível pelo polinómio $x + 2$ tem que $R = 0$.

$$-2k - 20 = 0 \Leftrightarrow -2k = 20 \Leftrightarrow k = -10$$

47. $A(x) = 3x^3 - x^2 - 7x + 6$

$$B(x) = x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 3 & -1 & -7 & 6 \\ 2 & & 6 & 10 & 6 \\ \hline & 3 & 5 & 3 & 12 \end{array}$$

$$A(x) = (x - 2)(3x^2 + 5x + 3) + 12$$

Temos que $Q_1(x) = 3x^2 + 5x + 3$. Vamos dividir $Q_1(x)$ por $x + 2$:

$$\begin{array}{r|rrr} & 3 & 5 & 3 \\ -2 & & -6 & 2 \\ \hline & 3 & -1 & 5 \end{array}$$

$$Q_1(x) = (x + 2)(3x - 1) + 5$$

Assim:

$$\begin{aligned} A(x) &= (x - 2) \times (3x^2 + 5x + 3) + 12 = (x - 2) \times [(x + 2)(3x - 1) + 5] + 12 \\ &= (x - 2) \times (x + 2)(3x - 1) + 5(x - 2) + 12 \\ &= (x^2 - 4)(3x - 1) + 5x - 10 + 12 \\ &= (x^2 - 4) \underbrace{(3x - 1)}_{Q(x)} + \underbrace{(5x + 2)}_{R(x)} \end{aligned}$$

Logo, $Q(x) = 3x - 1$ e $R(x) = 5x + 2$.

48. $A(x) = 3x^3 - x^2 + 2x + 1$

a) O resto da divisão de $A(x)$ por $x - 1$ é $A(1) = 3 \times 1^3 - 1^2 + 2 \times 1 + 1 = 5$.

b) O resto da divisão de $A(x)$ por $x + 2$ é $A(-2) = 3 \times (-2)^3 - (-2)^2 + 2 \times (-2) + 1 = -31$.

c) O resto da divisão de $A(x)$ por x é $A(0) = 3 \times 0^3 - 0^2 + 2 \times 0 + 1 = 1$.

d) O resto da divisão de $A(x)$ por $3x + 1$ é:

$$\begin{aligned} A\left(-\frac{1}{3}\right) &= 3 \times \left(-\frac{1}{3}\right)^3 - \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + 2 \times \left(-\frac{1}{3}\right) + 1 \\ &= -3 \times \frac{1}{27} - \frac{1}{9} - \frac{2}{3} + 1 \\ &\quad (\times 3) (\times 9) \\ &= -\frac{1}{9} - \frac{1}{9} - \frac{6}{9} + \frac{9}{9} = \frac{1}{9} \end{aligned}$$

49. $P(x) = x^4 - 3x^3 - x^2 + 3x$

a) $P(-1) = (-1)^4 - 3 \times (-1)^3 - (-1)^2 + 3 \times (-1) = -1 + 3 - 1 - 3 = 0$

$$P(0) = 0^4 - 3 \times 0^3 - 0^2 + 3 \times 0 = 0$$

$$P(1) = 1^4 - 3 \times 1^3 - 1^2 + 3 \times 1 = 1 - 3 - 1 + 3 = 0$$

$$\begin{aligned} P\left(\frac{1}{2}\right) &= \left(\frac{1}{2}\right)^4 - 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 3 \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{16} - 3 \times \frac{1}{8} - \frac{1}{4} + \frac{3}{2} \\ &\quad (\times 2) (\times 4) (\times 8) \\ &= \frac{1}{16} - \frac{6}{16} - \frac{4}{16} + \frac{24}{16} = \frac{15}{16} \end{aligned}$$

$$P(\sqrt{2}) = (\sqrt{2})^4 - 3 \times (\sqrt{2})^3 - (\sqrt{2})^2 + 3 \times \sqrt{2} = 2^2 - 3 \times 2\sqrt{2} - 2 + 3\sqrt{2} = 2 - 3\sqrt{2}$$

$$P(3) = 3^4 - 3 \times 3^3 - 3^2 + 3 \times 3 = 81 - 81 - 9 + 9$$

Como $P(-1) = 0, P(0) = 0, P(1) = 0, P(3) = 0, P\left(\frac{1}{2}\right) \neq 0$ e $P(\sqrt{2}) \neq 0$, conclui-se, assim, que

dos valores apresentados, as raízes de $P(x)$ são $-1, 0, 1$ e 3 .

- b)** Sabe-se que, dado um polinômio $P(x)$ e um número $a \in \mathbb{R}$, a é uma raiz de $P(x)$ se e só se $P(x)$ for divisível por $x - a$.

Como vimos na alínea anterior, $-1, 0, 1$ e 3 são raízes de $P(x)$, enquanto $\frac{1}{2}$ e $\sqrt{2}$ não o são.

Assim, podemos concluir que $P(x)$ é divisível pelos polinômios $A(x) = x + 1, B(x) = x, C(x) =$

$x - 1$ e $F(x) = x - 3$ não sendo divisível pelos polinômios $D(x) = x - \frac{1}{2}$ e $E(x) = x - \sqrt{2}$.

50.

a) $P(x) = x^4 - kx^2 + x + 3$

Para que o resto da divisão de $P(x)$ por $x - 1$ seja 2, tem-se que $P(1) = 2$, isto é:

$$1^4 - k \times 1^2 + 1 + 3 = 2 \Leftrightarrow 1 - k + 4 = 2 \Leftrightarrow -k = -3 \Leftrightarrow k = 3$$

- b)** $P(x)$ é divisível por $x + 2$ se e só se $P(-2) = 0$.

Assim:

$$(-2)^4 - k \times (-2)^2 + (-2) + 3 = 0 \Leftrightarrow 16 - 4k - 2 + 3 = 0 \Leftrightarrow -4k = -17 \Leftrightarrow k = \frac{17}{4}$$

51. Consideremos o polinômio $A(x) = x^3 - 2x^2 + ax + b$.

$A(x)$ é divisível por $x + 1$ se e só se $A(-1) = 0$ e o resto da divisão de $A(x)$ por $x - 2$ é igual a 6 se $A(2) = 6$.

Logo:

$$\begin{aligned} \begin{cases} A(-1) = 0 \\ A(2) = 6 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} (-1)^3 - 2 \times (-1)^2 + a \times (-1) + b = 0 \\ 2^3 - 2 \times 2^2 + a \times 2 + b = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 - 2 - a + b = 0 \\ 8 - 8 + 2a + b = 6 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} b = 3 + a \\ 2a + (3 + a) = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{---} \\ 3a = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{---} \\ a = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 3 + 1 \\ a = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 4 \\ a = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Assim, $a = 1$ e $b = 4$.

52. $P(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 5$

- a)** $P(1) = 1^3 + 3 \times 1^2 - 9 \times 1 + 5 = 1 + 3 - 9 + 5 = 0$, logo 1 é raiz de $P(x)$.

- b)** 1 é raiz de $P(x)$:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 3 & -9 & 5 \\ 1 & & 1 & 4 & -5 \\ \hline & 1 & 4 & -5 & 0 \end{array}$$

$$P(x) = (x - 1) \underbrace{(x^2 + 4x - 5)}_{Q(x)}$$

Vejamos se 1 é raiz do polinômio quociente $Q(x)$ obtido: $Q(1) = 1^2 + 4 \times 1 - 5 = 0$

Como 1 é raiz de $Q(x)$, vamos dividir $Q(x)$ por $x - 1$:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 4 & -5 & \\ 1 & & 1 & 5 & \\ \hline & 1 & 5 & 0 & \end{array}$$

$$Q(x) = (x - 1)(x + 5)$$

Assim, $P(x) = (x - 1) \times (x^2 + 4x - 5) = (x - 1)(x - 1)(x + 5) = (x - 1)^2(x + 5)$ e como 1 já não é raiz do polinómio $x + 5$, conclui-se que 1 é a raiz de multiplicidade 2 de $P(x)$.

53. $A(x) = 2x^6 - 2x^5 - 10x^4 + 2x^3 + 16x^2 + 8x$

a)

$$\begin{array}{r|rrrrrrrr} & 2 & -2 & -10 & 2 & 16 & 8 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ \hline & 2 & -2 & -10 & 2 & 16 & 8 & 0 & \\ 0 & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & \\ \hline & 2 & -2 & -10 & 2 & 16 & 8 & & \end{array}$$

Verifica-se que 0 é raiz de $A(x)$ e que $A(x) = (x - 0) \times (2x^5 - 2x^4 - 10x^3 + 2x^2 + 16x + 8)$, mas 0 não é raiz do polinómio $2x^5 - 2x^4 - 10x^3 + 2x^2 + 16x + 8$, logo 0 é uma raiz simples de $A(x)$.

b)

$$\begin{array}{r|rrrrrrrr} & 2 & -2 & -10 & 2 & 16 & 8 & 0 & \\ 2 & & 4 & 4 & -12 & -20 & -8 & 0 & \\ \hline & 2 & 2 & -6 & -10 & -4 & 0 & 0 & \\ 2 & & 4 & 12 & 12 & -4 & 0 & & \\ \hline & 2 & 6 & 6 & -2 & 0 & 0 & & \\ 2 & & 4 & 20 & 52 & 100 & & & \\ \hline & 2 & 10 & 26 & 50 & 100 & & & \end{array}$$

$$Q_1(x) = 2x^5 + 2x^4 - 6x^3 - 10x^2 - 4x$$

$$R_1 = 0$$

$$Q_2(x) = 2x^4 + 6x^3 + 6x^2 - 2x$$

$$R_2 = 0$$

Verifica-se que 2 é raiz de $A(x)$ e que também é raiz de $Q_1(x)$, mas já não é raiz de $Q_2(x)$. Conclui-se, assim, que 2 é raiz dupla de $A(x)$.

c)

$$\begin{array}{r|rrrrrrrr} & 2 & -2 & -10 & 2 & 16 & 8 & 0 & \\ -1 & & -2 & 4 & 6 & -8 & -8 & 0 & \\ \hline & 2 & -4 & -6 & 8 & 8 & 0 & 0 & \\ -1 & & -2 & 6 & 0 & -8 & 0 & & \\ \hline & 2 & -6 & 0 & 8 & 0 & 0 & & \\ -1 & & -2 & 8 & -8 & 0 & & & \\ \hline & 2 & -8 & 8 & 0 & 0 & & & \\ -1 & & -2 & 10 & -18 & & & & \\ \hline & 2 & -10 & 18 & -18 & & & & \end{array}$$

$$Q_1(x) = 2x^5 - 4x^4 - 6x^3 + 8x^2 - 8x$$

$$Q_2(x) = 2x^4 - 6x^3 + 8x^2$$

$$Q_3(x) = 2x^3 - 8x^2 + 8x$$

Verifica-se que -1 é raiz de $A(x)$ e também é raiz de $Q_1(x)$ e de $Q_2(x)$, mas já não é de $Q_3(x)$.

Conclui-se assim que -1 é raiz tripla de $A(x)$.

54.

- a) Sabe-se que qualquer raiz do polinómio é um divisor do termo independente do polinómio.

Como o termo independente de $P(x)$ é -4 , então os seus divisores são $1, -1, 2, -2, 4$ e -4 .

$P(1) = 3 \times 1^3 + 1^2 - 4 = 3 + 1 - 4 = 0$, logo 1 é raiz inteira do polinómio.

$P(-1) = 3 \times (-1)^3 + (-1)^2 - 4 = -3 + 1 - 4 = -6$, logo -1 não é raiz inteira do polinómio.

$P(2) = 3 \times 2^3 + 2^2 - 4 = 24 + 4 - 4 = 24$, logo 2 não é raiz inteira do polinómio.

$P(-2) = 3 \times (-2)^3 + (-2)^2 - 4 = -24 + 4 - 4 = -24$, logo -2 não é raiz inteira do polinómio.

$P(4) = 3 \times 4^3 + 4^2 - 4 = 48 + 16 - 4 = 60$, logo 4 não é raiz inteira do polinómio.

$P(-4) = 3 \times (-4)^3 + (-4)^2 - 4 = -48 + 16 - 4 = -36$, logo -4 não é raiz inteira do polinómio.

Assim, a única raiz inteira de $P(x)$ é 1 .

- b) O termo independente de $P(x)$ é 12 , cujos divisores são $1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, 6, -6, 12$ e -12 .

$P(1) = 6$, logo 1 não é raiz inteira do polinómio.

$P(-1) = 4$, logo -1 não é raiz inteira do polinómio.

$P(2) = -8$, logo 2 não é raiz inteira do polinómio.

$P(-2) = 0$, logo -2 é raiz inteira do polinómio.

$P(3) = 0$, logo 3 é raiz inteira do polinómio.

$P(-3) = 42$, logo -3 não é raiz inteira do polinómio.

$P(4) = 84$, logo 4 não é raiz inteira do polinómio.

$P(-4) = 196$, logo -4 não é raiz inteira do polinómio.

$P(6) = 816$, logo 6 não é raiz inteira do polinómio.

$P(-6) = 1224$, logo -6 não é raiz inteira do polinómio.

$P(12) = 17\,892$, logo 12 não é raiz inteira do polinómio.

$P(-12) = 21\,300$, logo -12 não é raiz inteira do polinómio.

Assim, as raízes inteiras de $P(x)$ são -2 e 3 .

55. Como se sabe da questão anterior, 0 é raiz simples de $A(x)$, 2 é uma raiz dupla de $A(x)$ e -1 é uma raiz tripla de $A(x)$, logo $A(x)$ pode ser escrito na forma $A(x) = (x - 0)^1(x + 1)^3(x - 2)^2 \times B(x)$, onde $B(x)$ é um polinómio sem zeros.

Aplicando sucessivas vezes a Regra de Ruffini, obtém-se:

| | | | | | | | |
|----|---|----|-----|----|----|----|---|
| | 2 | -2 | -10 | 2 | 16 | 8 | 0 |
| 0 | | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | 2 | -2 | -10 | 2 | 16 | 8 | 0 |
| -1 | | -2 | 4 | 6 | -8 | -8 | |
| | 2 | -4 | -6 | 8 | 8 | 0 | |
| -1 | | -2 | 6 | 0 | -8 | | |
| | 2 | -6 | 0 | 8 | 0 | | |
| -1 | | -2 | 8 | -8 | | | |
| | 2 | -8 | 8 | 0 | | | |
| 2 | | 4 | -8 | | | | |
| | 2 | -4 | 0 | | | | |
| 2 | | 4 | | | | | |
| | 2 | 0 | | | | | |

Conclui-se que $A(x) = x^1(x + 1)^3(x - 2)^2 \times 2$, isto é, $m = 1, n = 3, p = 2$ e $B(x) = 2$.

56. Seja $P(x)$ o polinómio de segundo grau que admite 5 como zero duplo.

Tem-se que $P(x) = a(x - 5)^2$, onde a é um número real não nulo.

Como $P(x)$ tem resto igual a 8, quando dividido pelo polinómio $x - 3$, então tem-se que $P(3) = 8$, logo:

$$a \times (3 - 5)^2 = 8 \Leftrightarrow a \times 4 = 8 \Leftrightarrow a = 2$$

$$\text{Assim, } P(x) = 2(x - 5)^2 \text{ ou } P(x) = 2x^2 - 20x + 50.$$

57.

a) $x^2 - 16 = x^{2 \setminus 1} - 4^2 = (x - 4) \times (x + 4)$

b) $x^2 - 8x + 16 = x^2 - 2 \times 4x + 4^2 = (x - 4)^2 = (x - 4)(x - 4)$

c) $9 - 16x^2 = 3^2 - (4x)^2 = (3 - 4x)(3 + 4x)$

d) $x^2 - 16x = x(x - 16)$

e) $x^2 + 3x - 10 = (x + 5)(x - 2)$

Cálculo auxiliar

$$x^2 + 3x - 10 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \times 1 \times (-10)}}{2 \times 1} \Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{49}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-3+7}{2} \vee x = \frac{-3-7}{2} \Leftrightarrow x = 2 \vee x = -5$$

f) $2x^2 + 6x - 20 = 2 \underbrace{(x^2 + 3x - 10)}_{\substack{\text{Pela alínea anterior} \\ x^2 + 3x - 10 = (x+5)(x-2)}} = 2(x + 5)(x - 2)$

g) $-x^2 - \frac{8}{3}x + 1 = -(x + 3)\left(x - \frac{1}{3}\right)$

Cálculo auxiliar

$$-x^2 - \frac{8}{3}x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\frac{8}{3} \pm \sqrt{\left(-\frac{8}{3}\right)^2 - 4 \times (-1) \times 1}}{2 \times (-1)} \Leftrightarrow x = \frac{\frac{8}{3} \pm \sqrt{\frac{64}{9} + 4}}{-2} \Leftrightarrow x = \frac{\frac{8}{3} \pm \sqrt{\frac{100}{9}}}{-2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\frac{8}{3} + \frac{10}{3}}{-2} \vee x = \frac{\frac{8}{3} - \frac{10}{3}}{-2} \Leftrightarrow x = -3 \vee x = \frac{1}{3}$$

58.

a) $x^3 + 6x^2 - 7x = x(x^2 + 6x - 7) = x(x - 1)(x + 7)$

Cálculo auxiliar

$$x^2 + 6x - 7 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \times 1 \times (-7)}}{2 \times 1} \Leftrightarrow x = \frac{-6 \pm \sqrt{64}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-6+8}{2} \vee x = \frac{-6-8}{2} \Leftrightarrow x = 1 \vee x = -7$$

b) $4x^3 - 11x^2 - 3x = x(4x^2 - 11x - 3) = x \times 4 \times \left(x + \frac{1}{4}\right)(x - 3) = 4x\left(x + \frac{1}{4}\right)(x - 3)$

Cálculo auxiliar

$$4x^2 - 11x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{11 \pm \sqrt{(-11)^2 - 4 \times 4 \times (-3)}}{2 \times 4} \Leftrightarrow x = \frac{11 \pm \sqrt{169}}{8}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{11+13}{8} \vee x = \frac{11-13}{8} \Leftrightarrow x = 3 \vee x = -\frac{1}{4}$$

c) $x^3 + 5x^2 - 4x - 20 = (x + 5)(x^2 - 4) = (x + 5)(x - 2)(x + 2)$

| | | | | |
|---|---|----|----|-----|
| Cálculo auxiliar | | | | |
| | 1 | 5 | -4 | -20 |
| -5 | | -5 | 0 | 20 |
| | 1 | 0 | -4 | 0 |
| $x^3 + 5x^2 - 4x - 20 = (x + 5)(x^2 - 4)$ | | | | |

d) $8x^3 + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)(8x^2 - 4x + 2)$

| | | | | |
|--|---|----|---|----|
| Cálculos auxiliares | | | | |
| | 8 | 0 | 0 | 1 |
| $-\frac{1}{2}$ | | -4 | 2 | -1 |
| | 8 | -4 | 2 | 0 |
| $8x^2 - 4x + 2 = 0 \Leftrightarrow \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \times 8 \times 2}}{2 \times 8} \Leftrightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{-48}}{16}$ | | | | |

Equação impossível em \mathbb{R} , ou seja, o polinómio $8x^2 - 4x + 2$ não tem raízes reais.

59. $P(x) = 2x^3 - 13x^2 + 25x - 14$

$2x - 7 = 2\left(x - \frac{7}{2}\right)$

| | | | | |
|--|---|-----|-----|-----|
| Cálculos auxiliares | | | | |
| Sabe-se que $\frac{7}{2}$ é uma raiz de $P(x)$. | | | | |
| | 2 | -13 | 25 | -14 |
| $\frac{7}{2}$ | | 7 | -21 | 14 |
| | 2 | -6 | 4 | 0 |
| $P(x) = 2\left(x - \frac{7}{2}\right)(x^2 - 3x + 2)$ | | | | |
| $x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \times 1 \times 2}}{2 \times 1} \Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{1}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{3+1}{2} \vee x = \frac{3-1}{2} \Leftrightarrow x = 2 \vee x = 1$ | | | | |

As raízes de $P(x)$ são $\frac{7}{2}$, 2 e 1 e $P(x)$ pode ser escrito na forma $P(x) = 2\left(x - \frac{7}{2}\right)(x - 2)(x - 1)$.

60.

a) $3x^4 - 6x^2 = 3x^2(x^2 - 2) = 3x^2 \times (x^2 - (\sqrt{2})^2) = 3x^2(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$

b) $x^5 + x^4 - 5x^3 - x^2 + 8x - 4 = (x - 1)(x - 1)(x - 1)(x^2 + 4x + 4)$
 $= (x - 1)(x - 1)(x - 1)(x + 2)(x + 2)$

| | | | | | | |
|----------------------------|---|---|----|----|----|----|
| Cálculos auxiliares | | | | | | |
| | 1 | 1 | -5 | -1 | 8 | -4 |
| 1 | | 1 | 2 | -3 | -4 | 4 |
| | 1 | 2 | -3 | -4 | 4 | 0 |
| 1 | | 1 | 3 | 0 | -4 | |
| | 1 | 3 | 0 | -4 | 0 | |
| 1 | | 1 | 4 | 4 | | |
| | 1 | 4 | 4 | 0 | | |
| $Q(x) = x^2 + 4x + 4$ | | | | | | |
| $x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2$ | | | | | | |

$$\begin{aligned} \text{c) } -4x^4 + 5x^2 - 1 &= (x^2 - 1)(-4x^2 + 1) = (x - 1)(x + 1) \times (-4) \left(x - \frac{1}{2}\right) \left(x + \frac{1}{2}\right) \\ &= -4(x - 1)(x + 1) \left(x - \frac{1}{2}\right) \left(x + \frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

Cálculos auxiliares

$$x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = -1$$

| | | | | | |
|----|----|----|---|----|----|
| 1 | -4 | 0 | 5 | 0 | -1 |
| | -4 | -4 | 1 | 1 | |
| | -4 | -4 | 1 | 1 | 0 |
| -1 | | 4 | 0 | -1 | |
| | -4 | 0 | 1 | | 0 |

$$Q(x) = -4x^2 + 1$$

$$-4x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \vee x = -\frac{1}{2}$$

$$-4x^2 + 1 = -4 \left(x - \frac{1}{2}\right) \left(x + \frac{1}{2}\right)$$

61.

$$\text{a) } x^2 - 6x + 9 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \times 1 \times 9}}{2 \times 1} \Leftrightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{0}}{2} \Leftrightarrow x = 3$$

O polinómio tem um único zero: 3

$$\text{b) } 2x^2 + 3x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \times 2 \times (-4)}}{2 \times 2} \Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 32}}{4} \Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{41}}{4} \vee x = \frac{-3 - \sqrt{41}}{4}$$

O polinómio tem dois zeros: $\frac{-3 + \sqrt{41}}{4}$ e $\frac{-3 - \sqrt{41}}{4}$

$$\text{c) } 2x^2 + 3x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \times 2 \times 4}}{2 \times 2} \Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 32}}{4} \Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{-23}}{4}$$

Equação impossível em \mathbb{R} . O polinómio não tem zeros.

$$\text{d) } 2x^3 + 2x^2 - 12x = 0 \Leftrightarrow 2x(x^2 + x - 6) \Leftrightarrow 2x = 0 \vee x^2 + x - 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \times 1 \times (-6)}}{2 \times 1}$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{-1 + 5}{2} \vee x = \frac{-1 - 5}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2 \vee x = -3$$

O polinómio tem 3 zeros: -3, 0 e 2

$$\text{e) } x^3 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^3 = 1 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{1} \Leftrightarrow x = 1$$

$$62. x^4 - 4x^2 + 3 = 0$$

$$\text{Seja } y = x^2: y^2 - 4y + 3 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \times 1 \times 3}}{2 \times 1}$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2}$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{4 + 2}{2} \vee y = \frac{4 - 2}{2}$$

$$\Leftrightarrow y = 3 \vee y = 1$$

Como $y = x^2$, vem que $x^2 = 3 \vee x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \sqrt{3} \vee x = -\sqrt{3} \vee x = 1 \vee x = -1$.
 C.S. = $\{-\sqrt{3}, -1, 1, \sqrt{3}\}$

63. $P(x) = 6x^3 + x^2 - 31x + 10 = 0$

a) $P(x)$ é divisível por $x - 2$, já que $P(2) = 6 \times 2^3 + 2^2 - 31 \times 2 + 10 = 0$.

b) $P(x) = 0 \Leftrightarrow 6x^3 + x^2 - 31x + 10 = 0$

| Cálculo auxiliar | | | | |
|------------------|---|----|-----|-----|
| | 6 | 1 | -31 | 10 |
| 2 | | 12 | 26 | -10 |
| | 6 | 13 | -5 | 0 |

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow (x - 2)(6x^2 + 13x - 5) &= 0 \\ \Leftrightarrow x - 2 = 0 \vee 6x^2 + 13x - 5 &= 0 \\ \Leftrightarrow x = 2 \vee x = \frac{-13 \pm \sqrt{13^2 - 4 \times 6 \times (-5)}}{2 \times 6} \\ \Leftrightarrow x = 2 \vee x = \frac{-13 \pm \sqrt{289}}{12} \\ \Leftrightarrow x = 2 \vee x = \frac{-13 + 17}{12} \vee x = \frac{-13 - 17}{12} \\ \Leftrightarrow x = 2 \vee x = \frac{4}{12} \vee x = \frac{-30}{12} \\ \Leftrightarrow x = 2 \vee x = \frac{1}{3} \vee x = -\frac{5}{2} \end{aligned}$$

C.S. $\left\{2, \frac{1}{3}, -\frac{5}{2}\right\}$

64. $A(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 + 5x^2 + x - 15 = 0$

| Cálculo auxiliar | | | | |
|------------------|---|----|----|-----|
| | 1 | 5 | 1 | -15 |
| -3 | | -3 | -6 | 15 |
| | 1 | 2 | -5 | 0 |


$$\begin{aligned} \Leftrightarrow (x + 3)(x^2 + 2x - 5) &= 0 \\ \Leftrightarrow x + 3 = 0 \vee x^2 + 2x - 5 &= 0 \\ \Leftrightarrow x = -3 \vee x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \times 1 \times (-5)}}{2 \times 1} \\ \Leftrightarrow x = -3 \vee x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 20}}{2} \\ \Leftrightarrow x = -3 \vee x = \frac{-2 + \sqrt{24}}{2} \vee x = \frac{-2 - \sqrt{24}}{2} \\ \Leftrightarrow x = -3 \vee x = \frac{-2 + 2\sqrt{6}}{2} \vee x = \frac{-2 - 2\sqrt{6}}{2} \\ \Leftrightarrow x = -3 \vee x = -1 + \sqrt{6} \vee x = -1 - \sqrt{6} \end{aligned}$$

C.S. $\{-3, -1 + \sqrt{6}, -1 - \sqrt{6}\}$

| Cálculo auxiliar | |
|-------------------------|---|
| 24 | 2 |
| 12 | 2 |
| 6 | 2 |
| 3 | 3 |
| 1 | |
| $\sqrt{24} = 2\sqrt{6}$ | |

65.

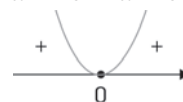
a) $x^3 - 4x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2(x - 4) \geq 0$

| Cálculos auxiliares | | | | | |
|---|-----------|---|---|---|-----------|
| $x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ | | | | | |
|  | | | | | |
| $x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 4$ | | | | | |
| | $-\infty$ | 0 | | 4 | $+\infty$ |
| Sinal de x^2 | + | 0 | + | + | + |
| Sinal de $x - 4$ | - | - | - | 0 | + |
| Sinal de $x^2(x - 4)$ | - | 0 | - | 0 | + |

Assim, $x^3 - 4x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x \geq 4$.

C.S. = $\{0\} \cup [4, +\infty[$

b) $x^2 < x^3 \Leftrightarrow x^2 - x^3 < 0 \Leftrightarrow x^2(1 - x) < 0$

| Cálculos auxiliares | | | | | |
|---|-----------|---|---|---|-----------|
| $x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ | | | | | |
|  | | | | | |
| $1 - x = 0 \Leftrightarrow x = 1$ | | | | | |
| | $-\infty$ | 0 | | 1 | $+\infty$ |
| Sinal de x^2 | + | 0 | + | + | + |
| Sinal de $1 - x$ | + | + | + | 0 | - |
| Sinal de $x^2(1 - x)$ | + | 0 | + | 0 | - |

Assim, $x^2 < x^3 \Leftrightarrow x^2 - x^3 < 0 \Leftrightarrow x > 1$.

C.S. = $]1, +\infty[$

c) $x^3 - 5x^2 - x \geq -5 \Leftrightarrow x^3 - 5x^2 - x + 5 \geq 0$

$\Leftrightarrow (x - 1)(x^2 - 4x - 5) \geq 0$

$\Leftrightarrow (x - 1)((x + 1)(x + 5)) \geq 0$

| Cálculos auxiliares | | | | | | | |
|--|-----------|----|---|---|---|---|-----------|
| Observa-se que 1 é raiz do polinómio $A(x) = x^3 - 5x^2 - x + 5$, pois $A(1) = 1^3 - 5 \times 1^2 - 1 + 5 = 0$, logo $A(x)$ é divisível por $x - 1$: | | | | | | | |
| $\begin{array}{r rrrr} & 1 & -5 & -1 & 5 \\ 1 & & 1 & -4 & -5 \\ \hline & 1 & -4 & -5 & 0 \end{array}$ | | | | | | | |
| $A(x) = (x - 1)(x^2 - 4x - 5)$ | | | | | | | |
| $x^2 - 4x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \times 1 \times (-5)}}{2 \times 1} \Leftrightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{36}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{4 \pm 6}{2} \Leftrightarrow x = 5 \vee x = -1$ | | | | | | | |
| Logo, $A(x) = (x - 1)(x^2 - 4x - 5) = (x - 1)(x + 1)(x - 5)$. | | | | | | | |
| | $-\infty$ | -1 | | 1 | | 5 | $+\infty$ |
| Sinal de $x - 1$ | - | - | - | 0 | + | + | + |
| Sinal de $x + 1$ | - | 0 | + | + | + | + | + |
| Sinal de $x - 5$ | - | - | - | - | - | 0 | + |
| Sinal de $(x - 1)(x + 1) \times (x - 5)$ | - | 0 | + | 0 | - | 0 | + |

Assim, $x^3 - 5x^2 - x + 5 \geq 0 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1 \vee x \geq 5$.

C.S. = $[-1, 1] \cup [5, +\infty[$

$$\text{d)} -3x^3 + 20x^2 - 27x + 10 < 0 \Leftrightarrow (x-1)(-3x^2 + 17x - 10) < 0$$

$$\Leftrightarrow -3(x-1)\left(x - \frac{2}{3}\right)(x-5) < 0$$

Cálculos auxiliares

Observa-se que 1 é raiz do polinômio $B(x) = -3x^3 + 20x^2 - 27x + 10$, pois

$B(1) = -3 \times 1^3 + 20 \times 1^2 - 27 + 10 = 0$, logo $B(x)$ é divisível por $x - 1$:

| | | | | |
|---|----|----|-----|----|
| | -3 | 20 | -27 | 10 |
| 1 | -3 | 17 | -10 | |
| | -3 | 17 | -10 | 0 |

$$B(x) = (x-1)(-3x^2 + 17x - 10)$$

$$-3x^2 + 17x - 10 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-17 \pm \sqrt{17^2 - 4 \times (-3) \times (-10)}}{2 \times (-3)} \Leftrightarrow x = \frac{-17 \pm \sqrt{169}}{-6} \Leftrightarrow x = \frac{-17 \pm 13}{-6}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-4}{-6} \vee x = \frac{-30}{-6} \Leftrightarrow x = \frac{2}{3} \vee x = 5$$

$$\text{Logo, } B(x) = (x-1)(-3x^2 + 17x - 10) = (x-1) \times (-3) \left(x - \frac{2}{3}\right)(x-5) = -3(x-1) \left(x - \frac{2}{3}\right)(x-5).$$

| | | | | | | | |
|---|-----------|---------------|---|---|---|---|-----------|
| | $-\infty$ | $\frac{2}{3}$ | | 1 | | 5 | $+\infty$ |
| Sinal de $-3(x-1)$ | + | + | + | 0 | - | - | - |
| Sinal de $x - \frac{2}{3}$ | - | 0 | + | + | + | + | + |
| Sinal de $x-5$ | - | - | - | - | - | 0 | + |
| Sinal de $-3(x-1) \times$ $\times \left(x - \frac{2}{3}\right)(x-5)$ | + | 0 | - | 0 | + | 0 | - |

$$\text{Assim, } -3x^3 + 20x^2 - 27x + 10 < 0 \Leftrightarrow \frac{2}{3} < x < 1 \vee x > 5.$$

$$\text{C.S.} = \left] \frac{2}{3}, 1 \right[\cup] 5, +\infty[$$

66.

$$\text{a)} B(-1) = (-1)^4 + 2 \times (-1)^3 - 16 \times (-1)^2 - 2 \times (-1) + 15 = 1 - 2 - 16 + 2 + 15 = 0$$

Logo, -1 é zero de $B(x)$.

$$B(3) = 3^4 + 2 \times 3^3 - 16 \times 3^2 - 2 \times 3 + 15 = 81 + 54 - 144 - 6 + 15 = 0$$

Logo, 3 é zero de $B(x)$.

$$\text{b)} B(x) = 0 \Leftrightarrow x^4 + 2x^3 - 16x^2 - 2x + 15 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)(x-3)(x^2 + 4x - 5) = 0$$

$$\Leftrightarrow x+1=0 \vee x-3=0 \vee x^2 + 4x - 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -1 \vee x = 3 \vee x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \times 1 \times (-5)}}{2 \times 1}$$

$$\Leftrightarrow x = -1 \vee x = 3 \vee x = \frac{-4 \pm \sqrt{36}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = -1 \vee x = 3 \vee x = \frac{-4+6}{2} \vee x = \frac{-4-6}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = -1 \vee x = 3 \vee x = 1 \vee x = -5$$

$$\text{C.S.} = \{-5, -1, 1, 3\}$$

c) $B(x) \leq 0 \Leftrightarrow x^4 + 2x^3 - 16x^2 - 2x + 15 \leq 0$

Cálculo auxiliar

Como -1 e 3 são zeros de $B(x)$, então $B(x)$ é divisível por $x + 1$ e por $x - 3$.

| | | | | | |
|----|---|----|-----|-----|-----|
| | 1 | 2 | -16 | -2 | 15 |
| -1 | | -1 | -1 | 17 | -15 |
| | 1 | 1 | -17 | 15 | 0 |
| 3 | | 3 | 12 | -15 | |
| | 1 | 4 | -5 | 0 | |

$$\Leftrightarrow (x + 1)(x - 3)(x^2 + 4x - 5) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (x + 1)(x - 3)(x + 5)(x - 1) \leq 0$$

| | $-\infty$ | -5 | -1 | 1 | 3 | $+\infty$ |
|------------------|-----------|------|------|-----|-----|-----------|
| Sinal de $x + 1$ | - | - | - | 0 | + | + |
| Sinal de $x - 3$ | - | - | - | - | - | 0 |
| Sinal de $x + 5$ | - | 0 | + | + | + | + |
| Sinal de $x - 1$ | - | - | - | - | 0 | + |
| Sinal de $B(x)$ | + | 0 | - | 0 | - | 0 |

$$B(x) \leq 0 \Leftrightarrow -5 \leq x \leq 1 \vee 1 \leq x \leq 3$$

$$C.S. = [-5, -1] \cup [1, 3]$$

Aprende Fazendo

Páginas 142 a 150

1. Das expressões apresentadas, são polinômios $A(x) = \frac{1}{2}x^3 - 5x$ e $C(x) = \frac{3x^2 - 5x}{2} = \frac{3}{2}x^2 - \frac{5}{2}x$.

Opção (D)

2. $V(x) = (12 - x) \times x \times (x + 4) = 12x^2 + 48x - x^3 - 4x^2 = -x^3 + 8x^2 + 48x$

Opção (A)

3. O grau do polinômio produto de um polinômio de grau 1 por um polinômio de grau 4 é $1 + 4 = 5$.

Opção (C)

4.

- Averiguemos o valor lógico da afirmação (I):

| | | | | | |
|----|---|-----|-----|-----|---------------------------------------|
| | 3 | -9 | -27 | -15 | -1 é raiz de $A(x)$ |
| -1 | | -3 | 12 | 15 | -1 é raiz de $3x^2 - 12x - 15 = Q(x)$ |
| | 3 | -12 | -15 | 0 | -1 não é raiz de $3x - 15$ |
| -1 | | -3 | 15 | | |
| | 3 | -15 | 0 | | |
| -1 | | -3 | | | |
| | 3 | -18 | | | |

Observa-se que -1 é raiz dupla de $A(x)$ e não de multiplicidade 3, logo a afirmação (I) é falsa.

- Averiguemos o valor lógico da afirmação (II):

$$\begin{array}{r}
 3x^2 - 9x^2 - 27x - 15 \quad | \quad x^2 - x \\
 \underline{-3x^2 + 3x^2} \qquad \qquad \underline{3x - 6} \\
 -6x^2 - 27x - 15 \\
 \underline{6x^2 - 6x} \\
 -33x - 15
 \end{array}$$

A afirmação (II) é verdadeira.

Opção (D)

5. Seja $P(x) = 2x^3 + kx^2 + 3x + 1$.

7 é o resto da divisão de $P(x)$ por $x - 2$ se $P(2) = 7$.

Assim, $2 \times 2^3 + k \times 2^2 + 3 \times 2 + 1 = 7 \Leftrightarrow 16 + 4k + 6 + 1 = 7 \Leftrightarrow 4k = -16 \Leftrightarrow k = -4$.

Opção (B)

6. Seja $P(x) = x^5 - 3x + x^2 + 2(m - 1)$. $P(x)$ é divisível por $x + 1$ se $P(-1) = 0$. Assim:

$$(-1)^5 - 3 \times (-1) + (-1)^2 + 2(m - 1) = 0 \Leftrightarrow -1 + 3 + 1 + 2m - 2 = 0 \Leftrightarrow 2m = -1 \Leftrightarrow m = -\frac{1}{2}$$

Opção (D)

7. $(2x^3 - 4x + 1) : (2x - 3)$

$$\begin{array}{r|rrrr}
 2 & 0 & -4 & 1 \\
 \frac{3}{2} & & 3 & \frac{9}{2} & \frac{3}{4} \\
 \hline
 & 2 & 3 & \frac{1}{2} & \frac{7}{4}
 \end{array}$$

$$2x - 3 = 2\left(x - \frac{3}{2}\right)$$

$$\text{Assim, } Q(x) = \frac{2x^2}{2} + \frac{3x}{2} + \frac{\frac{1}{2}}{2} = x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{1}{4} \text{ e } R = \frac{7}{4}.$$

Opção (A)

8. Observe-se que $(x - 1)^2 \geq 0 \wedge (x - 3)^4 \geq 0 \wedge (x - 5)^6 \geq 0$.

Logo, $(x - 1)^2 \times (x - 3)^4 \times (x - 5)^6 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Assim, o conjunto-solução da inequação

$$(x - 1)^2 \times (x - 3)^4 \times (x - 5)^6 < 0 \text{ é } \emptyset.$$

Opção (D)

9. $-x^2 - 2x + 3 = -(x - 1)(x + 3)$

Cálculo auxiliar

$$-x^2 - 2x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \times (-1) \times 3}}{2 \times (-1)} \Leftrightarrow x = 1 \vee x = -3$$

| x | $-\infty$ | -3 | | 1 | | 4 | $+\infty$ |
|-------------------------------|-----------|------|---|-----|---|-----|-----------|
| $-(x - 1)$ | + | + | + | 0 | - | - | - |
| $x + 3$ | - | 0 | + | + | + | + | + |
| $A(x)$ | | | | | | | |
| $(-x^2 - 2x + 3) \times A(x)$ | + | 0 | - | 0 | + | 0 | - |

$$\text{C.S.} =]-\infty, -3] \cup [1, 4]$$

Observe-se que, nestas condições, $A(x)$ terá de ser um polinómio tal que:

| | | | | | |
|--------|-----------|------|-----|-----|-----------|
| x | $-\infty$ | -3 | 1 | 4 | $+\infty$ |
| $A(x)$ | | | | | |

Assim, das hipóteses apresentadas, tem-se que $A(x) = x - 4$.

Opção (B)

10.

| | | | | |
|---|---|-------|----------|---------|
| | 1 | $-k$ | m | 3 |
| 1 | | 1 | $1-k$ | $1-k+m$ |
| | 1 | $1-k$ | $1-k+m$ | $4-k+m$ |
| 1 | | 1 | $2-k$ | |
| | 1 | $2-k$ | $3-2k+m$ | |

Para que 1 seja raiz dupla de $P(x)$ tem que verificar-se:

$$\begin{cases} 4 - k + m = 0 \\ 3 - 2k + m = 0 \end{cases}$$

Assim:

$$\begin{cases} m = k - 4 \\ 3 - 2k + k - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = k - 4 \\ -k = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -5 \\ k = -1 \end{cases}$$

Opção (C)

11. Seja $P(x) = x^n + 1$, $n \in \mathbb{N}$.

O resto da divisão de $P(x)$ por $x + 1$ é $P(-1)$.

Assim, $P(-1) = (-1)^n + 1$:

- se n é ímpar, $P(-1) = -1 + 1 = 0$.
- se n é par, $P(-1) = 1 + 1 = 2$.

Opção (B)

12. Sabe-se que, dado um polinómio $P(x)$ de coeficientes inteiros, o respetivo termo de grau zero é múltiplo inteiro de qualquer raiz inteira desse polinómio. Assim, se 2 é o termo independente de $P(x)$, das opções apresentadas, apenas 4 não é seu divisor.

Opção (D)

13.

- Se $P(x)$ é divisível por $x - 4$, então $P(4) = 0$.
- Se dividindo $P(x)$ por $x - 1$ se obtém um quociente $Q(x)$ e resto igual a -21 , então

$$P(x) = (x - 1) \times Q(x) - 21.$$

Pretende-se saber o resto da divisão de $Q(x)$ por $x - 4$, ou seja, $Q(4)$.

Como $P(x) = (x - 1) \times Q(x) - 21$, então:

$$P(4) = (4 - 1) \times Q(4) - 21 \Leftrightarrow 0 = 3 \times Q(4) - 21$$

$$\Leftrightarrow Q(4) = \frac{21}{3}$$

$$\Leftrightarrow Q(4) = 7$$

Opção (C)

14.

a) $x^3 - 5x^2 + \frac{x}{2} + \sqrt{2}$

Grau: 3

Coeficientes: 1; -5; $\frac{1}{2}$; $\sqrt{2}$

O polinómio é completo.

b) $4x^5 + \frac{5}{4}x^3 + 3x^2 - 11x$

Grau: 5

Coeficientes: 4; 0; $\frac{5}{4}$; 3; -11; 0

O polinómio é incompleto.

15.

$$\begin{aligned} \text{a) } \left(x^3 - \frac{x^2}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(-2x^3 + \frac{5x^2}{6} + x - \frac{1}{2}\right) &= x^3 - \frac{x^2}{3} + \frac{1}{4} - 2x^3 + \frac{5x^2}{6} + x - \frac{1}{2} \\ &= x^3 - 2x^3 - \frac{x^2}{3} + \frac{5x^2}{6} + x + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \\ &= -x^3 - \frac{2x^2}{6} + \frac{5x^2}{6} + x + \frac{1}{4} - \frac{2}{4} \\ &= -x^3 + \frac{3x^2}{6} + x - \frac{1}{4} \\ &= -x^3 + \frac{x^2}{2} + x - \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \left(x^3 - \frac{x^2}{3} + \frac{1}{4}\right) - \left(-2x^3 + \frac{5x^2}{6} + x - \frac{1}{2}\right) &= x^3 - \frac{x^2}{3} + \frac{1}{4} + 2x^3 - \frac{5x^2}{6} - x + \frac{1}{2} \\ &= x^3 + 2x^3 - \frac{x^2}{3} - \frac{5x^2}{6} - x + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \\ &= 3x^3 - \frac{2x^2}{6} - \frac{5x^2}{6} - x + \frac{1}{4} + \frac{2}{4} \\ &= 3x^3 - \frac{7x^2}{6} - x + \frac{3}{4} \end{aligned}$$

c) $(2x - 1)(2x + 1) = (2x)^2 - 1^2 = 4x^2 - 1$

d) $(x - x^2)(-2x + 4) = -2x^2 + 4x + 2x^3 - 4x^2 = 2x^3 - 6x^2 + 4x$

e) $(x - 2)(x + 1)(x + 4) = (x^2 + x - 2x - 2)(x + 4) = (x^2 - x - 2)(x + 4)$
 $= x^3 + 4x^2 - x^2 - 4x - 2x - 8 = x^3 + 3x^2 - 6x - 8$

f) $(x^2 - x - 2)(x^3 + x + 1) = x^5 + x^3 + x^2 - x^4 - x^2 - x - 2x^3 - 2x - 2$
 $= x^5 - x^4 + x^3 - 2x^3 - x - 2x - 2$
 $= x^5 - x^4 - x^3 - 3x - 2$

16.

a) $A(x) = 2x^2 + 2x + 3$ e $B(x) = x^2 + x + 2$

$$\begin{array}{r} 2x^2 + 2x + 3 \mid x^2 + x + 2 \\ -2x^2 - 2x - 4 \quad 2 \\ \hline -1 \end{array}$$

$$2x^2 + 2x + 3 = (x^2 + x + 2) \times 2 + (-1)$$

$$Q = 2 \text{ e } R = -1$$

$$\frac{2x^2}{x^2} =$$

b) $A(x) = x^3 - 1$ e $B(x) = x^2 - 1$

$$\begin{array}{r} x^3 + 0x^2 + 0x - 1 \mid x^2 - 1 \\ -x^3 \quad \quad + x \quad \quad x \\ \hline x - 1 \end{array}$$

$$x^3 - 1 = (x^2 - 1)x + (x - 1)$$

$$Q(x) = x \text{ e } R(x) = x - 1$$

$$\frac{x^3}{x^2} = x$$

c) $A(x) = x^3 - 3x^2 - 6$ e $B(x) = x - 3$

$$\begin{array}{r} x^3 - 3x^2 + 0x - 6 \mid x - 3 \\ -x^3 + 3x^2 \quad \quad x^2 \\ \hline -6 \end{array}$$

$$x^3 - 3x^2 - 6 = (x - 3)x^2 - 6$$

$$Q(x) = x^2 \text{ e } R = -6$$

$$\frac{x^3}{x} = x^2$$

d) $A(x) = x^3 - 3x^2 - 6$ e $B(x) = x^2 + 2$

$$\begin{array}{r} x^3 - 3x^2 + 0x - 6 \mid x^2 + 2 \\ -x^3 \quad \quad - 2x \quad \quad x - 3 \\ \hline -3x^2 - 2x - 6 \\ 3x^2 \quad \quad + 6 \\ \hline -2x \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \frac{x^3}{x^2} = x \\ -\frac{3x^2}{x^2} = -3 \end{array}$$

$$x^3 - 3x^2 - 6 = (x^2 + 2)(x - 3) + (-2x)$$

$$Q(x) = x - 3 \text{ e } R(x) = -2x$$

e) $A(x) = x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 3$ e $B(x) = x^2 + x + 1$

$$\begin{array}{r} x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 3 \mid x^2 + x + 1 \\ -x^4 - x^3 - x^2 \quad \quad x^2 + 1 \\ \hline x^2 + x + 3 \\ -x^2 - x - 1 \\ \hline 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \frac{x^4}{x^2} = x^2 \\ \frac{x^2}{x^2} = 1 \end{array}$$

$$x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 3 = (x^2 + x + 1)(x^2 + 1) + 2$$

$$Q(x) = x^2 + 1 \text{ e } R = 2$$

f) $A(x) = 2x^6 - x^5 + 4x^4 + x^2 + 8x - 4$ e $B(x) = x^3 + 2x - 1$

$$\begin{array}{r}
 2x^6 - x^5 + 4x^4 + 0x^3 + x^2 + 8x - 4 \quad | \quad x^3 + 2x - 1 \\
 \underline{-2x^6 \quad -4x^4 + 2x^3} \quad 2x^3 - x^2 + 4 \\
 -x^5 + 0x^4 + 2x^3 + x^2 + 8x - 4 \\
 \underline{+ x^5 + 2x^3 - x^2} \\
 4x^2 + 0x^2 + 8x - 4 \\
 \underline{-4x^2 - 8x + 4} \\
 0
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 \frac{2x^6}{x^3} = 2x^3 \\
 \frac{-x^5}{x^3} = -x^2 \\
 \frac{4x^3}{x^3} = 4
 \end{array}$$

$$2x^6 - x^5 + 4x^4 + x^2 + 8x - 4 = (x^3 + 2x - 1)(2x^3 - x^2 + 4) + 0$$

$$Q(x) = 2x^3 - x^2 + 4 \text{ e } R = 0$$

g) $A(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{15}{4} + \frac{13}{12}x + \frac{13}{8}x^2$ e $B(x) = \frac{2}{3}x - \frac{3}{4}$

$$\begin{array}{r}
 \frac{x^3}{3} + \frac{13}{8}x^2 + \frac{13}{12}x - \frac{15}{4} \quad | \quad \frac{2}{3}x - \frac{3}{4} \\
 \underline{-\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{8}} \phantom{+ \frac{13}{12}x - \frac{15}{4}} \quad \frac{x^2}{2} + 3x + 5 \\
 \phantom{\frac{x^3}{3} + } 2x^2 + \frac{13}{12}x - \frac{15}{4} \\
 \phantom{\frac{x^3}{3} + } \underline{-2x^2 + \frac{9}{4}x} \\
 \phantom{\frac{x^3}{3} + } \frac{10}{3}x - \frac{15}{4} \\
 \phantom{\frac{x^3}{3} + } \underline{-\frac{10}{3}x + \frac{15}{4}} \\
 \phantom{\frac{x^3}{3} + } 0
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 \frac{\frac{x^3}{3}}{\frac{2}{3}x} = \frac{3x^3}{6x} = \frac{x^2}{2} \\
 \frac{\frac{2x^2}{3}}{\frac{2}{3}x} = \frac{6x^2}{2x} = 3x \\
 \frac{\frac{10x}{3}}{\frac{2}{3}x} = \frac{10x}{2x} = 5
 \end{array}$$

$$\frac{x^3}{3} + \frac{13}{8}x^2 + \frac{13}{12}x - \frac{15}{4} = \left(\frac{2}{3}x - \frac{3}{4}\right)\left(\frac{x^2}{2} + 3x + 5\right) + 0$$

$$Q(x) = \frac{x^2}{2} + 3x + 5 \text{ e } R = 0$$

17.

a) $A(x) = 5x^2 + 3x - 1$ e $B(x) = x + 1$

$$\begin{array}{r|rr}
 & 5 & 3 & -1 \\
 -1 & & -5 & 2 \\
 \hline
 & 5 & -2 & 1
 \end{array}$$

$$x + 1 = x - (-1)$$

$$5x^2 + 3x - 1 = (x + 1)(5x - 2) + 1$$

$$Q(x) = 5x - 2 \text{ e } R = 1$$

b) $A(x) = 2x^2 - 4$ e $B(x) = x - \sqrt{2}$

$$\begin{array}{r|rr}
 & 2 & 0 & -4 \\
 \sqrt{2} & & 2\sqrt{2} & 4 \\
 \hline
 & 2 & 2\sqrt{2} & 0
 \end{array}$$

$$2x^2 - 4 = (x - \sqrt{2})(2x + 2\sqrt{2})$$

$$Q(x) = 2x + 2\sqrt{2} \text{ e } R = 0$$

c) $A(x) = 2x^3 - 4x^2 - 10x + 24$ e $B(x) = x - 2$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & -4 & -10 & 24 \\ 2 & & 4 & 0 & -20 \\ \hline & 2 & 0 & -10 & 4 \end{array}$$

$$2x^3 - 4x^2 - 10x + 24 = (x - 2)(2x^2 - 10) + 4$$

$$Q(x) = 2x^2 - 10 \text{ e } R = 4$$

d) $A(x) = -2x^3 + 4x + 5$ e $B(x) = x + \frac{1}{2}$

$$\begin{array}{r|rrrr} & -2 & 0 & 4 & 5 \\ -\frac{1}{2} & & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{7}{4} \\ \hline & -2 & 1 & \frac{7}{2} & \frac{13}{4} \end{array}$$

$$x + \frac{1}{2} = x - \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$-2x^3 + 4x + 5 = \left(x + \frac{1}{2}\right)\left(-2x^2 + x + \frac{7}{2}\right) + \frac{13}{4}$$

$$Q(x) = -2x^2 + x + \frac{7}{2} \text{ e } R = \frac{13}{4}$$

e) $A(x) = 4x^4 - x^3 + 5x^2 - 4x + 5$ e $B(x) = x$

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 4 & -1 & 5 & -4 & 5 \\ 0 & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline & 4 & -1 & 5 & -4 & 5 \end{array}$$

$$x = x - 0$$

$$4x^4 - x^3 + 5x^2 - 4x + 5 = x(4x^3 - x^2 + 5x - 4) + 5$$

$$Q(x) = 4x^3 - x^2 + 5x - 4 \text{ e } R = 5$$

f) $A(x) = x^5 + 6x^4 + 2x^2 + 36x - 5$ e $B(x) = x + 2$

$$\begin{array}{r|rrrrrr} & 1 & 6 & 0 & 2 & 36 & -5 \\ -2 & & -2 & -8 & 16 & -36 & 0 \\ \hline & 1 & 4 & -8 & 18 & 0 & -5 \end{array}$$

$$x + 2 = x - (-2)$$

$$x^5 + 6x^4 + 2x^2 + 36x - 5 = (x + 2)(x^4 + 4x^3 - 8x^2 + 18x) + (-5)$$

$$Q(x) = x^4 + 4x^3 - 8x^2 + 18x \text{ e } R = -5$$

18.

a) $A(1) = 2 \times 1^4 - 1^2 - 4 \times 1 + 3 = 2 - 1 - 4 + 3 = 0$

b) $A(-1) = 2 \times (-1)^4 - (-1)^2 - 4 \times (-1) + 3 = 2 - 1 + 4 + 3 = 8$

c) $A(0) = 2 \times 0^4 - 0^2 - 4 \times 0 + 3 = 0 - 0 - 0 + 3 = 3$

d) $A(\sqrt{3}) = 2 \times (\sqrt{3})^4 - (\sqrt{3})^2 - 4(\sqrt{3}) + 3 = 2 \times 9 - 3 - 4\sqrt{3} + 3 = 18 - 4\sqrt{3}$

19.

a) $x^2 + x - 12 = (x + 4)(x - 3)$

Cálculo auxiliar

$$x^2 + x - 12 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \times (-12)}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{49}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm 7}{2} \Leftrightarrow x = -4 \vee x = 3$$

b) $3x^2 + 5x - 22 = 3\left(x + \frac{11}{3}\right)(x - 2)$

Cálculo auxiliar

$$3x^2 + 5x - 22 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 4 \times 3 \times (-22)}}{6} \Leftrightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{289}}{6}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-5 \pm 17}{6} \Leftrightarrow x = -\frac{11}{3} \vee x = 2$$

c) $2x^2 - x - 15 = 2\left(x - 3\right)\left(x + \frac{5}{2}\right)$

Cálculo auxiliar

$$2x^2 - x - 15 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \times 2 \times (-15)}}{4} \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{121}}{4}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1 \pm 11}{4} \Leftrightarrow x = 3 \vee x = -\frac{5}{2}$$

d) $x^3 - 9x = x(x^2 - 9) = x(x - 3)(x + 3)$

e) $x^3 + 10x^2 + 25x = x(x^2 + 10x + 25) = x(x + 5)^2 = x(x + 5)(x + 5)$

f) $x^3 - x^2 - 5x - 3 = (x + 1)(x^2 - 2x - 3) = (x + 1)(x - 3)(x + 1)$

Cálculos auxiliares

| | | | | |
|----|---|----|----|----|
| | 1 | -1 | -5 | -3 |
| -1 | | -1 | 2 | 3 |
| | 1 | -2 | -3 | 0 |

$$x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \times (-3)}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2 \pm 4}{2} \Leftrightarrow x = 3 \vee x = -1$$

g) $3x^3 + 4x^2 + 5x - 6 = \left(x - \frac{2}{3}\right)(3x^2 + 6x + 9) = 3\left(x - \frac{2}{3}\right)(x^2 + 2x + 3)$

Cálculo auxiliar

| | | | | |
|---------------|---|---|---|----|
| $\frac{2}{3}$ | 3 | 4 | 5 | -6 |
| | | 2 | 4 | 6 |
| | 3 | 6 | 9 | 0 |

$$x^2 + 2x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4 \times 1 \times 3}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{-8}}{2}$$

Equação impossível em \mathbb{R} .

O polinómio $x^2 + 2x + 3$ não admite raízes reais, logo não pode ser decomposto em fatores.

$$\begin{aligned}
 \text{h)} \quad 2x^3 + 7x^2 - 5x - 4 &= (x-1)(2x^2 + 9x + 4) \\
 &= (x-1)2(x+4)\left(x + \frac{1}{2}\right) \\
 &= 2(x-1)(x+4)\left(x + \frac{1}{2}\right)
 \end{aligned}$$

Cálculos auxiliares

| | | | | |
|---|---|---|----|----|
| | 2 | 7 | -5 | -4 |
| 1 | 2 | 9 | 4 | |
| | 2 | 9 | 4 | 0 |

$$\begin{aligned}
 2x^2 + 9x + 4 = 0 &\Leftrightarrow x = \frac{-9 \pm \sqrt{81 - 4 \times 2 \times 4}}{4} \Leftrightarrow x = \frac{-9 \pm \sqrt{49}}{4} \\
 &\Leftrightarrow x = \frac{-9 \pm 7}{4} \Leftrightarrow x = -4 \vee x = -\frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{i)} \quad x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6 &= (x+1)(x-1)(x^2 - x - 6) \\
 &= (x+1)(x-1)(x+2)(x-3)
 \end{aligned}$$

Cálculos auxiliares

| | | | | | |
|----|----|----|----|----|---|
| | 1 | -1 | -7 | 1 | 6 |
| -1 | -1 | 2 | 5 | -6 | |
| | 1 | -2 | -5 | 6 | 0 |
| 1 | | 1 | -1 | -6 | |
| | 1 | -1 | -6 | 0 | |

$$\begin{aligned}
 x^2 - x - 6 = 0 &\Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \times (-6)}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{2} \\
 &\Leftrightarrow x = \frac{1 \pm 5}{2} \Leftrightarrow x = 3 \vee x = -2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{j)} \quad 2x^4 - 3x^3 - 12x^2 + 7x + 6 &= (x-1)(x-3)(2x^2 + 5x + 2) \\
 &= (x-1)(x-3)2(x+2)\left(x + \frac{1}{2}\right) \\
 &= 2(x-1)(x-3)(x+2)\left(x + \frac{1}{2}\right)
 \end{aligned}$$

Cálculos auxiliares

| | | | | | |
|---|---|----|-----|----|---|
| | 2 | -3 | -12 | 7 | 6 |
| 1 | 2 | -1 | -13 | -6 | |
| | 2 | -1 | -13 | -6 | 0 |
| 3 | 6 | 15 | 6 | | |
| | 2 | 5 | 2 | 0 | |

$$\begin{aligned}
 2x^2 + 5x + 2 = 0 &\Leftrightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 4 \times 2 \times 2}}{4} \Leftrightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{9}}{4} \\
 &\Leftrightarrow x = \frac{-5 \pm 3}{4} \Leftrightarrow x = -2 \vee x = -\frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{k)} \quad x^4 - 2x^3 + 2x - 1 &= (x-1)(x+1)(x^2 - 2x + 1) \\
 &= (x-1)(x+1)(x-1)^2 \\
 &= (x+1)(x-1)(x-1)(x-1)
 \end{aligned}$$

Cálculo auxiliarOs divisores inteiros de -1 são: 1 e -1

| | | | | | |
|----|---|----|----|----|----|
| | 1 | -2 | 0 | 2 | -1 |
| 1 | | 1 | -1 | -1 | 1 |
| | 1 | -1 | -1 | 1 | 0 |
| -1 | | -1 | 2 | -1 | |
| | 1 | -2 | 1 | 0 | |

$$\begin{aligned}
 \text{I)} \quad 3x^5 - 12x^4 + 9x^3 + 12x^2 - 12x &= (x-2)(x-2)(3x^3 - 3x) \\
 &= (x-2)(x-2)3x(x^2 - 1) \\
 &= (x-2)(x-2)3x(x-1)(x+1) \\
 &= 3x(x-2)(x-2)(x-1)(x+1)
 \end{aligned}$$

Cálculo auxiliar

| | | | | | | |
|---|---|-----|-----|----|-----|---|
| | 3 | -12 | 9 | 12 | -12 | 0 |
| 2 | | 6 | -12 | -6 | 12 | 0 |
| | 3 | -6 | -3 | 6 | 0 | 0 |
| 2 | | 6 | 0 | -6 | 0 | |
| | 3 | 0 | -3 | 0 | 0 | |

20.a) -2 e -1 são raízes do polinômio de $2.^\circ$ grau $P(x)$. Então, $P(x) = a(x+2)(x+1)$, $a \neq 0$.Como o resto da divisão de $P(x)$ por $x-1$ é 18 , vem que $P(1) = 18$, ou seja:

$$a(1+2)(1+1) = 18 \Leftrightarrow a \times 3 \times 2 = 18 \Leftrightarrow a \times 6 = 18 \Leftrightarrow a = \frac{18}{6} \Leftrightarrow a = 3$$

$$\text{Logo, } P(x) = 3(x+2)(x+1) = 3(x^2 + 2x + x + 2) = 3(x^2 + 3x + 2) = 3x^2 + 9x + 6.$$

b) 5 é raiz dupla e 0 é raiz simples do polinômio de $3.^\circ$ grau $P(x)$. Então:

$$P(x) = a(x-5)(x-5)(x-0) \quad (a \neq 0) = ax(x-5)(x-5)$$

Como o resto da divisão de $P(x)$ por $x-4$ é 8 :

$$P(4) = 8 \Leftrightarrow a \times 4 \times (4-5) \times (4-5) = 8 \Leftrightarrow 4a \times (-1) \times (-1) = 8 \Leftrightarrow 4a = 8 \Leftrightarrow a = 2$$

$$\text{Logo, } P(x) = 2x(x-5)(x-5) = 2x(x^2 - 10x + 25) = 2x^3 - 20x^2 + 50x.$$

21.

$$\text{a)} \quad P(-3) = (-3)^3 - 3 \times (-3)^2 - 9 \times (-3) + 27 = -27 - 3 \times 9 + 27 + 27 = 0$$

Como $P(-3) = 0$, -3 é uma raiz de $P(x)$.

b)

| | | | | |
|----|---|----|----|-----|
| | 1 | -3 | -9 | 27 |
| -3 | | -3 | 18 | -27 |
| | 1 | -6 | 9 | 0 |

$$x^3 - 3x^2 - 9x + 27 = (x+3)(x^2 - 6x + 9) = (x+3)(x-3)^2 = (x+3)(x-3)(x-3)$$

 3 é uma raiz dupla de $P(x)$.

$$\text{c)} \quad P(x) = 0 \Leftrightarrow (x+3)(x-3)(x-3) = 0$$

$$\Leftrightarrow x+3=0 \vee x-3=0 \vee x-3=0$$

$$\Leftrightarrow x=-3 \vee x=3 \vee x=3$$

$$\text{C.S.} = \{-3, 3\}$$

d) $P(x) \geq 0 \Leftrightarrow (x+3)(x-3)(x-3) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -3$

| x | $-\infty$ | -3 | | 3 | $+\infty$ |
|--------|-----------|------|---|-----|-----------|
| $x+3$ | - | 0 | + | + | + |
| $x-3$ | - | - | - | 0 | + |
| $x-3$ | - | - | - | 0 | + |
| $P(x)$ | - | 0 | + | 0 | + |

Cálculos auxiliares

$$x+3=0 \Leftrightarrow x=-3$$

$$x-3=0 \Leftrightarrow x=3$$

C.S. = $[-3, +\infty[$

22.

a) $B(x) = 2x + 6 = 2(x+3)$

$$x+3 = x - (-3)$$

| | | | | |
|----|---|----|----|---|
| | 2 | 4 | -8 | 0 |
| -3 | | -6 | 6 | 6 |
| | 2 | -2 | -2 | 6 |

$$Q_1(x) = 2x^2 - 2x - 2 \quad R = 6$$

$$2x^3 + 4x^2 - 8x = (x+3)(2x^2 - 2x - 2) + 6 \Leftrightarrow 2x^3 + 4x^2 - 8x = 2(x+3) \frac{(2x^2 - 2x - 2)}{2} + 6$$

Assim, o quociente e o resto da divisão de $A(x)$ por $B(x)$ são:

$$Q(x) = x^2 - x - 1 \quad \text{e} \quad R = 6$$

b) $B(x) = 3x + 1 = 3\left(x + \frac{1}{3}\right)$

$$x + \frac{1}{3} = x - \left(-\frac{1}{3}\right)$$

| | | | | | |
|----------------|---|----|----------------|----------------|------------------|
| | 6 | 0 | $-\frac{1}{3}$ | $\frac{5}{3}$ | 1 |
| $-\frac{1}{3}$ | | -2 | $\frac{2}{3}$ | $-\frac{1}{9}$ | $-\frac{14}{27}$ |
| | 6 | -2 | $\frac{1}{3}$ | $\frac{14}{9}$ | $\frac{13}{27}$ |

$$Q_1(x) = 6x^3 - 2x^2 + \frac{1}{3}x + \frac{14}{9} \quad R = \frac{13}{27}$$

$$6x^4 - \frac{1}{3}x^2 + \frac{5}{3}x + 1 = \left(x + \frac{1}{3}\right) \left(6x^3 - 2x^2 + \frac{1}{3}x + \frac{14}{9}\right) + \frac{13}{27}$$

$$\Leftrightarrow 6x^4 - \frac{1}{3}x^2 + \frac{5}{3}x + 1 = 3\left(x + \frac{1}{3}\right) \frac{\left(6x^3 - 2x^2 + \frac{1}{3}x + \frac{14}{9}\right)}{3} + \frac{13}{27}$$

Assim, o quociente e o resto da divisão de $A(x)$ por $B(x)$ são:

$$Q(x) = 2x^3 - \frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{9}x + \frac{14}{27} \quad \text{e} \quad R = \frac{13}{27}$$

c) $B(x) = 2x - 2\sqrt{2} = 2(x - \sqrt{2})$

| | | | | | |
|------------|------------|----|-------------|----|-------------|
| | $\sqrt{2}$ | -1 | $-\sqrt{8}$ | 3 | $-\sqrt{2}$ |
| $\sqrt{2}$ | | 2 | $\sqrt{2}$ | -2 | $\sqrt{2}$ |
| | $\sqrt{2}$ | 1 | $-\sqrt{2}$ | 1 | 0 |

Cálculo auxiliar

$$-\sqrt{8} + \sqrt{2} = -2\sqrt{2} + \sqrt{2} = -\sqrt{2}$$

$$Q_1(x) = \sqrt{2}x^3 + x^2 - \sqrt{2}x + 1 \quad R = 0$$

$$\sqrt{2}x^4 - x^3 - \sqrt{8}x^2 + 3x - \sqrt{2} = (x - \sqrt{2})(\sqrt{2}x^3 + x^2 - \sqrt{2}x + 1)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}x^4 - x^3 - \sqrt{8}x^2 + 3x - \sqrt{2} = 2(x - \sqrt{2}) \frac{(\sqrt{2}x^3 + x^2 - \sqrt{2}x + 1)}{2}$$

Assim, o quociente e o resto da divisão de $A(x)$ por $B(x)$ são:

$$Q(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{1}{2} \text{ e } R = 0$$

23.

- a)** Sejam n_1 , n_2 e n_3 as ordens de multiplicidade de x_1 , x_2 e x_3 , respetivamente. Sabemos que $n_1 + n_2 + n_3 \leq 7$, isto é, $2 + 3 + n_3 \leq 7 \Leftrightarrow n_3 \leq 2$. Logo, x_3 não pode ter multiplicidade superior a 2.
- b)** A multiplicidade de x_3 é 2, pois se fosse 1 teríamos que $A(x) = (x - x_1)^2(x - x_2)^3(x - x_3)Q(x)$, sendo $Q(x)$ um polinómio de grau igual a 1 e, como todo o polinómio de grau um admite uma raiz, o polinómio $A(x)$ admitiria 4 raízes e não 3 raízes, o que não acontece.

24. Como 1 e -1 são raízes simples e -2 é uma raiz dupla do polinómio de quarto grau, então

$$P(x) = a(x - 1)(x + 1)(x + 2)(x + 2) \quad (a \neq 0).$$

Como o resto da divisão de $P(x)$ por $x + \frac{1}{2}$ é 27, vem:

$$P\left(-\frac{1}{2}\right) = 27 \Leftrightarrow a\left(-\frac{1}{2} - 1\right)\left(-\frac{1}{2} + 1\right)\left(-\frac{1}{2} + 2\right)\left(-\frac{1}{2} + 2\right) = 27$$

$$\Leftrightarrow a \times \left(-\frac{3}{2}\right) \times \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} \times \frac{3}{2} = 27$$

$$\Leftrightarrow -\frac{27}{16}a = 27$$

$$\Leftrightarrow a = -\frac{16 \times 27}{27}$$

$$\Leftrightarrow a = -16$$

$$\begin{aligned} \text{Logo: } P(x) &= -16(x - 1)(x + 1)(x + 2)(x + 2) \\ &= -16(x^2 - 1)(x^2 + 4x + 4) \\ &= -16(x^4 + 4x^3 + 4x^2 - x^2 - 4x - 4) \\ &= -16(x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 4x - 4) \\ &= -16x^4 - 64x^3 - 48x^2 + 64x + 64 \end{aligned}$$

25.

a) $B(x) = 4x - 8 = 4(x - 2)$

O resto da divisão de $A(x)$ por $B(x)$ é $A(2)$:

$$A(2) = -2^3 + 3 \times 2^2 - 5 \times 2 + 4 = -8 + 12 - 10 + 4 = -2$$

b) $B(x) = 3x - 2 = 3\left(x - \frac{2}{3}\right)$

O resto da divisão de $A(x)$ por $B(x)$ é $A\left(\frac{2}{3}\right)$:

$$\begin{aligned} A\left(\frac{2}{3}\right) &= -\left(\frac{2}{3}\right)^3 + 3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 - 5 \times \left(\frac{2}{3}\right) + 4 \\ &= -\frac{8}{27} + \frac{4}{3} - \frac{10}{3} + 4 \\ &= -\frac{8}{27} + \frac{36}{27} - \frac{90}{27} + \frac{108}{27} \\ &= \frac{46}{27} \end{aligned}$$

$$\text{c) } B(x) = 4x + 2 = 4\left(x + \frac{2}{4}\right) = 4\left(x + \frac{1}{2}\right)$$

$$x + \frac{1}{2} = x - \left(-\frac{1}{2}\right)$$

O resto da divisão de $A(x)$ por $B(x)$ é $A\left(-\frac{1}{2}\right)$:

$$\begin{aligned} A\left(-\frac{1}{2}\right) &= -\left(-\frac{1}{2}\right)^3 + 3 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 5 \times \left(-\frac{1}{2}\right) + 4 \\ &= -\left(-\frac{1}{8}\right) + 3 \times \frac{1}{4} + \frac{5}{2} + 4 \\ &= \frac{1}{8} + \frac{3}{4} + \frac{5}{2} + \frac{4}{1} = \frac{1}{8} + \frac{6}{8} + \frac{20}{8} + \frac{32}{8} = \frac{59}{8} \end{aligned}$$

26. $P(x)$ é divisível por $x + 1$ se e só se -1 é uma raiz de $P(x)$, isto é, $P(-1) = 0$.

O resto da divisão de $P(x)$ por $x - 3$ é 40 se $P(3) = 40$.

Assim:

$$\begin{aligned} \begin{cases} P(-1) = 0 \\ P(3) = 40 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} a \times (-1)^3 + 2 \times (-1)^2 + c \times (-1) + 2 = 0 \\ a \times (3)^3 + 2 \times (3)^2 + c \times 3 + 2 = 40 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -a + 2 - c + 2 = 0 \\ 27a + 18 + 3c + 2 = 40 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -a - c = -4 \\ 27a + 3c = 20 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a + c = 4 \\ 27a + 3c = 20 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} c = 4 - a \\ 27a + 3(4 - a) = 20 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 27a + 12 - 3a = 20 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 24a = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{8}{24} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 4 - \frac{1}{3} \\ a = \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = \frac{11}{3} \\ a = \frac{1}{3} \end{cases} \\ a = \frac{1}{3} \text{ e } c = \frac{11}{3} \end{aligned}$$

$$\text{27. } 2x - 5 = 2\left(x - \frac{5}{2}\right)$$

Se $P(x)$ é divisível por $2x - 5$, então é divisível por $x - \frac{5}{2}$. Logo, $P\left(\frac{5}{2}\right) = 0$.

$$\begin{aligned} 6x^3 - 21x^2 + 3x + 30 &= \left(x - \frac{5}{2}\right)(6x^2 - 6x - 12) \\ &= \left(x - \frac{5}{2}\right)6(x - 2)(x - (-1)) \\ &= 6\left(x - \frac{5}{2}\right)(x - 2)(x - (-1)) \end{aligned}$$

Cálculos auxiliares

| | | | | |
|---------------|---|-----|-----|-----|
| | 6 | -21 | 3 | 30 |
| $\frac{5}{2}$ | | 15 | -15 | -30 |
| | 6 | -6 | -12 | 0 |

$$6x^2 - 6x - 12 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4 \times 6 \times (-12)}}{12}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{36 + 288}}{12}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{324}}{12}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{6 \pm 18}{12}$$

$$\Leftrightarrow x = 2 \vee x = -1$$

28.

a) $P(1) = 6 \times 1^3 - 7 \times 1^2 - 14 \times 1 + 15 = 6 - 7 - 14 + 15 = 0$

Como $P(1) = 0$, 1 é raiz de $P(x)$.

b) $P(x) = 6x^3 - 7x^2 - 14x + 15 = (x - 1)(6x^2 - x - 15) = (x - 1)6\left(x - \frac{5}{3}\right)\left(x + \frac{3}{2}\right)$
 $= 6(x - 1)\left(x - \frac{5}{3}\right)\left(x + \frac{3}{2}\right)$

Cálculos auxiliares

| | | | | |
|---|---|----|-----|-----|
| | 6 | -7 | -14 | 15 |
| 1 | | 6 | -1 | -15 |
| | 6 | -1 | -15 | 0 |

$$6x^2 - x - 15 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \times 6 \times (-15)}}{12} \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 360}}{12} \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm 19}{12}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{20}{12} \vee x = -\frac{18}{12} \Leftrightarrow x = \frac{5}{3} \vee x = -\frac{3}{2}$$

c) $P(x) = 0 \Leftrightarrow 6(x - 1)\left(x - \frac{5}{3}\right)\left(x + \frac{3}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0 \vee x - \frac{5}{3} = 0 \vee x + \frac{3}{2} = 0$

$$\Leftrightarrow x = 1 \vee x = \frac{5}{3} \vee x = -\frac{3}{2}$$

$$\text{C.S.} = \left\{\frac{5}{3}, 1, -\frac{3}{2}\right\}$$

d) $P(x) < 0 \Leftrightarrow 6(x - 1)\left(x - \frac{5}{3}\right)\left(x + \frac{3}{2}\right) < 0 \Leftrightarrow (x - 1)\left(x - \frac{5}{3}\right)\left(x + \frac{3}{2}\right) < 0$

$$\Leftrightarrow x < -\frac{3}{2} \vee 1 < x < \frac{5}{3}$$

Cálculos auxiliares

$x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

$x - \frac{5}{3} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5}{3}$

$x + \frac{3}{2} \Leftrightarrow x = -.$

| x | $-\infty$ | $-\frac{3}{2}$ | 1 | | $\frac{5}{3}$ | | $+\infty$ |
|-----------------|-----------|----------------|-----|---|---------------|---|-----------|
| $x-1$ | - | - | - | 0 | + | + | + |
| $x-\frac{5}{3}$ | - | - | - | - | 0 | + | + |
| $x+\frac{3}{2}$ | - | 0 | + | + | + | + | + |
| $P(x)$ | - | 0 | + | 0 | - | 0 | + |

$$\text{C.S.} =]-\infty, -\frac{3}{2}[\cup]1, \frac{5}{3}[$$

29.

a) Começemos por fatorizar o polinômio $P(x) = 2x^3 - 6x + 4$.

Cálculos auxiliares

| | | | | |
|---|---|---|----|----|
| | 2 | 0 | -6 | 4 |
| 1 | | 2 | 2 | -4 |
| | 2 | 2 | -4 | 0 |

$$2x^2 + 2x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4 \times 2 \times (-4)}}{4} \Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{36}}{4} \Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm 6}{4} \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 1$$

$$\begin{aligned} P(x) = 2x^3 - 6x + 4 &= (x - 1)(2x^2 + 2x - 4) = (x - 1)2(x + 2)(x - 1) \\ &= 2(x - 1)(x - 1)(x + 2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2x^3 - 6x + 4 &= 0 \Leftrightarrow 2x^3 - 6x + 4 = 0 \Leftrightarrow 2(x - 1)(x - 1)(x + 2) = 0 \\ &\Leftrightarrow x - 1 = 0 \vee x - 1 = 0 \vee x + 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 1 \vee x = 1 \vee x = -2 \end{aligned}$$

$$\text{C.S.} = \{1, -2\}$$

b) Começemos por fatorizar o polinômio $P(x) = 2x^3 - 7x^2 + 9$.

Cálculos auxiliares

| | | | | |
|---|---|----|----|----|
| | 2 | -7 | 0 | 9 |
| 3 | | 6 | -3 | -9 |
| | 2 | -1 | -3 | 0 |

$$2x^2 - x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \times 2 \times (-3)}}{4} \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{4} \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm 5}{4} \Leftrightarrow x = \frac{3}{2} \vee x = -1$$

$$\begin{aligned} P(x) = 2x^3 - 7x^2 + 9 &= (x - 3)(2x^2 - x - 3) = (x - 3)2(x - \frac{3}{2})(x + 1) \\ &= 2(x - 3)(x - \frac{3}{2})(x + 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2x^3 - 7x^2 + 9 &= 0 \Leftrightarrow 2(x - 3)(x - \frac{3}{2})(x + 1) = 0 \Leftrightarrow x - 3 = 0 \vee x - \frac{3}{2} = 0 \vee x + 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 3 \vee x = \frac{3}{2} \vee x = -1 \end{aligned}$$

$$\text{C.S.} = \{-1, \frac{3}{2}, 3\}$$

- c) Começemos por fatorizar o polinómio $P(x) = x^4 - 2x^3 + 2x - 1$.

$$\begin{aligned} P(x) &= x^4 - 2x^3 + 2x - 1 = (x+1)(x-1)(x^2 - 2x + 1) \\ &= (x+1)(x-1)(x-1)^2 \\ &= (x+1)(x-1)(x-1)(x-1) \end{aligned}$$

$$x^4 - 2x^3 + 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow (x+1)(x-1)(x-1)(x-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x+1=0 \vee x-1=0 \vee x-1=0 \vee x-1=0$$

$$\Leftrightarrow x=-1 \vee x=1 \vee x=1 \vee x=1$$

$$\text{C.S.} = \{-1, 1\}$$

- d) Começemos por fatorizar o polinómio $P(x) = 4x^4 - 12x^3 + x^2 + 12x + 4$.

$$\begin{aligned} P(x) &= 4x^4 - 12x^3 + x^2 + 12x + 4 \\ &= (x-2)(x-2)(4x^2 + 4x + 1) \\ &= (x-2)(x-2)(2x+1)(2x+1) \end{aligned}$$

$$4x^4 - 12x^3 + x^2 + 12x + 4 = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x-2)(2x+1)(2x+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x-2=0 \vee x-2=0 \vee 2x+1=0 \vee 2x+1=0$$

$$\Leftrightarrow x=2 \vee x=2 \vee x=-\frac{1}{2} \vee x=-\frac{1}{2}$$

$$\text{C.S.} = \left\{-\frac{1}{2}, 2\right\}$$

- e) Começemos por fatorizar o polinómio $P(x) = x^4 + 5x^3 + 4x^2$.

$$\begin{aligned} P(x) &= x^4 + 5x^3 + 4x^2 = x^2(x^2 + 5x + 4) \\ &= x^2(x+4)(x+1) \\ &= x \times x (x+4)(x+1) \end{aligned}$$

$$x^4 + 5x^3 + 4x^2 = 0 \Leftrightarrow x \times x (x+4)(x+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x=0 \vee x=0 \vee x+4=0 \vee x+1=0$$

$$\Leftrightarrow x=0 \vee x=0 \vee x=-4 \vee x=-1$$

$$\text{C.S.} = \{0, -4, -1\}$$

30.

- a) Começemos por fatorizar o polinómio $P(x) = x^3 - x^2$.

$$\begin{aligned} P(x) &= x^3 - x^2 = x^2(x-1) = x \times x(x-1) \\ x^3 < x^2 &\Leftrightarrow x^3 - x^2 < 0 \Leftrightarrow x \times x(x-1) < 0 \\ &\Leftrightarrow x < 0 \vee 0 < x < 1 \end{aligned}$$

| x | $-\infty$ | 0 | 1 | $+\infty$ |
|---------------------------|-----------|-----|-----|-----------|
| x | - | 0 | + | + |
| x | - | 0 | + | + |
| $x-1$ | - | - | 0 | + |
| $x \times x \times (x-1)$ | - | 0 | - | + |

$$\text{C.S.} =]-\infty, 0[\cup]0, 1[$$

Cálculo auxiliar

| | | | | | |
|----|---|----|----|----|----|
| | 1 | -2 | 0 | 2 | -1 |
| -1 | | -1 | 3 | -3 | 1 |
| | 1 | -3 | 3 | -1 | 0 |
| 1 | | 1 | -2 | 1 | |
| | 1 | -2 | 1 | 0 | |

Cálculo auxiliar

| | | | | | |
|---|---|-----|----|-----|----|
| | 4 | -12 | 1 | 12 | 4 |
| 2 | | 8 | -8 | -14 | -4 |
| | 4 | -4 | -7 | -2 | 0 |
| 2 | | 8 | 8 | 2 | |
| | 4 | 4 | 1 | 0 | |

Cálculo auxiliar

$$\begin{aligned} x^2 + 5x + 4 = 0 &\Leftrightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 4 \times 1 \times 4}}{2} \\ &\Leftrightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{9}}{2} \\ &\Leftrightarrow x = \frac{-5 \pm 3}{2} \\ &\Leftrightarrow x = -4 \vee x = -1 \end{aligned}$$

Cálculos auxiliares

$$\begin{aligned} x &= 0 \\ x-1 &= 0 \Leftrightarrow x=1 \end{aligned}$$

- b) Começemos por fatorizar o polinômio $P(x) = 3x^3 + 2x - 5$.

$$P(x) = 3x^3 + 2x - 5 = (x - 1)(3x^2 + 3x + 5)$$

Cálculos auxiliares

| | | | | |
|---|---|---|---|----|
| | 3 | 0 | 2 | -5 |
| 1 | | 3 | 3 | 5 |
| | 3 | 3 | 5 | 0 |

$$3x^2 + 3x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4 \times 3 \times 5}}{6} \Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{-51}}{6}$$

Equação impossível em \mathbb{R} .

$$3x^3 + 2x - 5 < 0 \Leftrightarrow x - 1 < 0 \Leftrightarrow x < 1$$

$$\text{C.S.} =] - \infty, 1[$$

- c) $P(x) = x^4 + 4x^3 - x^2 - 16x - 12 = (x + 3)(x + 2)(x^2 - x - 2)$
 $= (x + 3)(x + 2)(x - 2)(x + 1)$

Cálculos auxiliares

| | | | | | |
|----|---|----|----|-----|-----|
| | 1 | 4 | -1 | -16 | -12 |
| -3 | | -3 | -3 | 12 | 12 |
| | 1 | 1 | -4 | -4 | 0 |
| -2 | | -2 | 2 | 4 | |
| | 1 | -1 | -2 | 0 | |

$$x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \times (-2)}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm 3}{2} \Leftrightarrow x = 2 \vee x = -1$$

$$x^4 + 4x^3 - x^2 - 16x - 12 \geq 0 \Leftrightarrow (x + 3)(x + 2)(x - 2)(x + 1) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x \leq -3 \vee -2 \leq x \leq -1 \vee x \geq 2$$

| x | $-\infty$ | -3 | | -2 | | -1 | | 2 | $+\infty$ |
|--|-----------|----|---|----|---|----|---|---|-----------|
| $x+3$ | - | 0 | + | + | + | + | + | + | + |
| $x+2$ | - | - | - | 0 | + | + | + | + | + |
| $x-2$ | - | - | - | - | - | - | - | 0 | + |
| $x+1$ | - | - | - | - | - | 0 | + | + | + |
| $(x+3) \times$ $\times (x+2) \times$ $\times (x-2) \times$ $\times (x+1)$ | + | 0 | - | 0 | + | 0 | - | 0 | + |

$$\text{C.S.} =] - \infty, -3] \cup [-2, -1] \cup [2, +\infty[$$

- d) $P(x) = x^4 - 5x^3 + 6x^2 = x^2(x^2 - 5x + 6) = x \times x \times (x - 3)(x - 2)$

Cálculo auxiliar

$$x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \times 6}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{5 \pm 1}{2} \Leftrightarrow x = 3 \vee x = 2$$

$$x^4 - 5x^3 + 6x^2 > 0 \Leftrightarrow x \times x \times (x - 3)(x - 2) > 0$$

$$\Leftrightarrow x < 0 \vee 0 < x < 2 \vee x > 3$$

| x | $-\infty$ | 0 | | 2 | | 3 | $+\infty$ |
|---|-----------|---|---|---|---|---|-----------|
| x | - | 0 | + | + | + | + | + |
| x | - | 0 | + | + | + | + | + |
| $x-3$ | - | - | - | - | - | 0 | + |
| $x-2$ | - | - | - | 0 | + | + | + |
| $\frac{x \times x \times}{\times (x-3)(x-2)}$ | + | 0 | + | 0 | - | 0 | + |

$$\text{C.S.} =] - \infty, 0[\cup] 0, 2[\cup] 3, +\infty[$$

$$\begin{aligned}
 \text{e) } P(x) &= -x^4 + 3x^3 - 4x = x(-x^3 + 3x^2 - 4) \\
 &= x(x+1)(-x^2 + 4x - 4) \\
 &= -x(x+1)(x^2 - 4x + 4) \\
 &= -x(x+1)(x-2)^2 \\
 &= -x(x+1)(x-2)(x-2)
 \end{aligned}$$

Cálculo auxiliar

| | | | | |
|----|----|---|----|----|
| | -1 | 3 | 0 | -4 |
| -1 | | 1 | -4 | 4 |
| | -1 | 4 | -4 | 0 |

$$\begin{aligned}
 -x^4 + 3x^3 - 4x < 0 &\Leftrightarrow -x(x+1)(x-2)(x-2) < 0 \\
 &\Leftrightarrow x(x+1)(x-2)(x-2) > 0 \\
 &\Leftrightarrow x < -1 \vee 0 < x < 2 \vee x > 2
 \end{aligned}$$

| | | | | | | | |
|--|-----------|------|---|-----|---|-----|-----------|
| x | $-\infty$ | -1 | | 0 | | 2 | $+\infty$ |
| x | - | - | - | 0 | + | + | + |
| $x+1$ | - | 0 | + | + | + | + | + |
| $x-2$ | - | - | - | - | - | 0 | + |
| $x-2$ | - | - | - | - | - | 0 | + |
| $x(x+1)(x-2) \times$ $\times (x-2)$ | + | 0 | - | 0 | + | 0 | + |

$$\text{C.S.} =]-\infty, -1[\cup]0, 2[\cup]3, +\infty[$$

31.

$$\text{a) } (2x-3)(1-2x)B(x) < 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} < x < 1 \vee \frac{3}{2} < x < 2$$

| | | | | | | | | | |
|--|-----------|-----|---------------|---|-----|---------------|---|-----|-----------|
| x | $-\infty$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | | 1 | $\frac{3}{2}$ | | 2 | $+\infty$ |
| $2x-3$ | - | - | - | - | - | 0 | + | + | + |
| $1-2x$ | + | + | + | 0 | - | - | - | - | - |
| $B(x)$ | - | 0 | - | - | 0 | + | + | 0 | - |
| $(2x-3) \times$ $\times (1-2x) \times$ $\times B(x)$ | + | 0 | + | 0 | - | 0 | + | 0 | + |

Cálculos auxiliares

$$2x-3=0 \Leftrightarrow 2x=3 \Leftrightarrow x=\frac{3}{2}$$

$$1-2x=0 \Leftrightarrow 1=2x \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$$

$$\text{C.S.} = \left] \frac{1}{2}, 1[\cup \left] \frac{3}{2}, 2[\right.$$

$$\text{b) } (-x^2+2x)B(x) \geq 0 \Leftrightarrow x(-x+2)B(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 0 \vee x \geq 1$$

| | | | | | | | |
|---------------|-----------|-----|---|-----|---|-----|-----------|
| x | $-\infty$ | 0 | | 1 | | 2 | $+\infty$ |
| x | - | 0 | + | + | + | + | + |
| $-x+2$ | + | + | + | + | + | 0 | - |
| $B(x)$ | - | 0 | - | 0 | + | 0 | - |
| $x(-x+2)B(x)$ | + | 0 | - | 0 | + | 0 | + |

Cálculos auxiliares

$$x=0$$

$$-x+2=0 \Leftrightarrow -x=-2 \Leftrightarrow x=2$$

$$\text{C.S.} =]-\infty, 0] \cup [1, +\infty[$$

$$\text{c) } (-x^2+6x-9)B(x) \leq 0 \Leftrightarrow -(x^2-6x+9)B(x) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow -(x-3)^2 B(x) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (x-3)(x-3)B(x) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 1 \leq x \leq 2 \vee x=0 \vee x=3$$

| | | | | | | | | | |
|--|-----------|-----|---|-----|---|-----|---|-----|-----------|
| x | $-\infty$ | 0 | | 1 | | 2 | | 3 | $+\infty$ |
| $x-3$ | - | - | - | - | - | - | - | 0 | + |
| $x-3$ | - | - | - | - | - | - | - | 0 | + |
| $B(x)$ | - | 0 | - | 0 | + | 0 | - | - | - |
| $(x-3) \times$ $\times (x-3) \times$ $\times B(x)$ | - | 0 | - | 0 | + | 0 | - | 0 | - |

$$\text{C.S.} = \{0, 3\} \cup [1, 2]$$

32. Seja $P(x)$ um polinômio e $sx - t$ um polinômio de grau 1. Seja $Q(x)$ e R os polinômios quociente e resto da divisão inteira de $P(x)$ por $sx - t$. Então, $P(x) = (sx - t) \times Q(x) + R$.

Substituindo x por $\frac{t}{s}$ nesta igualdade, vem que:

$$P\left(\frac{t}{s}\right) = \left(s \times \frac{t}{s} - t\right) \times Q\left(\frac{t}{s}\right) + R \Leftrightarrow P\left(\frac{t}{s}\right) = 0 \times Q\left(\frac{t}{s}\right) + R \Leftrightarrow P\left(\frac{t}{s}\right) = R$$

Fica provado que o resto da divisão de $P(x)$ por $sx - t$ é $P\left(\frac{t}{s}\right)$.

33.

a) Seja $P(x)$ um polinômio e $sx - t$ um polinômio de grau 1. Suponhamos que $P(x)$ é divisível por $sx - t$. Então, $P(x) = (sx - t) \times Q(x)$, sendo $Q(x)$ um polinômio.

Substituindo x por $\frac{t}{s}$ na igualdade anterior, vem que:

$$P\left(\frac{t}{s}\right) = \left(s \times \frac{t}{s} - t\right) \times Q\left(\frac{t}{s}\right) \Leftrightarrow P\left(\frac{t}{s}\right) = 0 \times Q\left(\frac{t}{s}\right) \Leftrightarrow P\left(\frac{t}{s}\right) = 0$$

Fica provado que se $P(x)$ é divisível por $sx - t$, então $P\left(\frac{t}{s}\right) = 0$.

b) Seja $P(x)$ um polinômio e $sx - t$ um polinômio de grau 1. Suponhamos que $P\left(\frac{t}{s}\right) = 0$. Seja

$Q(x)$ e R os polinômios quociente e resto, respectivamente, da divisão inteira de $P(x)$ por $sx - t$.

Então, $P(x) = (sx - t) \times Q(x) + R$. Substituindo x por $\frac{t}{s}$ nesta última igualdade, vem que:

$$P\left(\frac{t}{s}\right) = \left(s \times \frac{t}{s} - t\right) \times Q\left(\frac{t}{s}\right) + R \Leftrightarrow P\left(\frac{t}{s}\right) = 0 \times Q\left(\frac{t}{s}\right) + R \Leftrightarrow P\left(\frac{t}{s}\right) = R$$

Ou seja, o resto da divisão de $P(x)$ por $sx - t$ é $P\left(\frac{t}{s}\right)$. Então, $P(x) = (sx - t) \times Q(x) + P\left(\frac{t}{s}\right)$.

Uma vez que $P\left(\frac{t}{s}\right) = 0$, vem que $P(x) = (sx - t) \times Q(x)$, ou seja, $P(x)$ é divisível por t .

34.

a) $x^n - a^n$ é divisível por $x - a$ se e só se a é uma raiz de $x^n - a^n$. Se substituirmos x por a no polinômio $x^n - a^n$ vem $a^n - a^n = 0$, ou seja, a é uma raiz de $x^n - a^n$. Fica provado que $x^n - a^n$ é divisível por $x - a$.

b) (\Rightarrow) Começemos por provar que se $x^n - a^n$ é divisível por $x + a$, então n é par. Seja $x^n - a^n$ divisível por $x + a$. Então, $-a$ é uma raiz de $x^n - a^n$. Ou seja:

$$\begin{aligned} (-a)^n - a^n = 0 &\Leftrightarrow (-a)^n = a^n \Leftrightarrow (-1)^n \times a^n = a^n \Leftrightarrow (-1)^n = \frac{a^n}{a^n} \quad (a \neq 0) \\ &\Leftrightarrow (-1)^n = 1 \end{aligned}$$

Se n for ímpar, $(-1)^n = -1$, logo n tem que ser par.

(\Leftarrow) Vamos provar que se n é par, então $x^n - a^n$ é divisível por $x + a$. Seja n par.

$-a$ é raiz de $x^n - a^n$, pois $(-a)^n - a^n = (-1)^n \times a^n - a^n$

$$\stackrel{n \text{ é par}}{=} 1 \times a^n - a^n = a^n - a^n = 0$$

Logo, $x^n - a^n$ é divisível por $x + a$.

Fica provado que $x^n - a^n$ é divisível por $x + a$ se e só se n é par.

c) (\Rightarrow) Começemos por provar que se $x^n + a^n$ é divisível por $x + a$, então n é ímpar.

Seja $x^n + a^n$ divisível por $x + a$. Então, $-a$ é raiz de $x^n + a^n$, isto é:

$$(-a)^n + a^n = 0 \Leftrightarrow (-1)^n \times a^n = -a^n \Leftrightarrow (-1)^n = -\frac{a^n}{a^n} \quad (a \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow (-1)^n = -1$$

Se n for par $(-1)^n = 1$, então n é ímpar.

(\Leftarrow) Vamos provar que se n é ímpar, então $x^n + a^n$ é divisível por $x + a$. Seja n ímpar.

$-a$ é raiz de $x^n + a^n$, pois $(-a)^n + a^n = (-1)^n \times a^n + a^n$

$$\stackrel{n \text{ é ímpar}}{=} -1 \times a^n + a^n = -a^n + a^n = 0$$

Logo, $x^n + a^n$ é divisível por $x + a$.

Fica provado que $x^n + a^n$ é divisível por $x + a$ se e só se n é ímpar.

35.

$$\begin{aligned} \text{a) } P(a) + P(-a) &= a^{2n+1} - a^{2n} - a + 1 + (-a)^{2n+1} - (-a)^{2n} + a + 1 \\ &= a^{2n+1} - a^{2n} - a + 1 + (-1)^{2n+1} \times a^{2n+1} - (-1)^{2n} \times a^{2n} + a + 1 \\ &= a^{2n+1} - a^{2n} - a + 1 + (-1) \times a^{2n+1} - 1 \times a^{2n} + a + 1 \\ &= a^{2n+1} - a^{2n} - a + 1 - a^{2n+1} - a^{2n} + a + 1 \\ &= 2 - 2a^{2n}, \text{ como queríamos demonstrar.} \end{aligned}$$

Nota:

$2n + 1, n \in \mathbb{N}$ representa um número ímpar.

$2n, n \in \mathbb{N}$ representa um número par.

b) -1 e 1 são zeros de P , pois:

- se n é par, $P(-1) = -2 \times (1 - 1) \times (1 + 1) = 0$ e $P(1) = 0 \times 0 \times (1 + 1) = 0$.
- se n é ímpar, $P(-1) = -2 \times (-1 - 1) \times (-1 + 1) = 0$ e $P(1) = 0 \times 0 \times (1 + 1) = 0$.

Provemos que o grau de multiplicidade da raiz 1 é 2 . Através da regra de Ruffini, prova-se que:

$$x^n - 1 = (x - 1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1)$$

$x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1$ não é divisível por $x - 1$, pois $1^{n-1} + 1^{n-2} + \dots + 1 + 1 = n \times 1 = n$

Tem-se, então, que 1 é zero simples de $x^n - 1$.

$x^n + 1$ também não é divisível por $x - 1$, pois $1^n + 1 = 2$.

Concluimos que $P(x) = (x - 1)(x - 1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1)(x^n + 1)$

$$= (x - 1)^2(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1)(x^n + 1)$$

isto é, 1 é zero duplo de P .

36.

$$\text{a) } x^4 - 19x^2 + 48 = 0 \Leftrightarrow (x^2)^2 - 19x^2 + 48 = 0$$

Substituindo x^2 por y , vem que:

$$y^2 - 19y + 48 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{19 \pm \sqrt{361 - 4 \times 48}}{2} \Leftrightarrow y = \frac{19 \pm \sqrt{169}}{2} \Leftrightarrow y = \frac{19 \pm 13}{2} \Leftrightarrow y = 16 \vee y = 3$$

b) Substituindo y por x^2 , temos: $x^2 = 16 \vee x^2 = 3 \Leftrightarrow x = 4 \vee x = -4 \vee x = -\sqrt{3} \vee x = \sqrt{3}$

$$\text{C.S.} = \{4, -4, -\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$$

37.

a) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0 \Leftrightarrow (x^2)^2 - 13x^2 + 36 = 0$

Substituindo x^2 por y , vem que:

$$y^2 - 13y + 36 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{13 \pm \sqrt{169 - 4 \times 36}}{2} \Leftrightarrow y = \frac{13 \pm \sqrt{25}}{2} \Leftrightarrow y = \frac{13 \pm 5}{2} \Leftrightarrow y = 9 \vee y = 4$$

Substituindo y por x^2 , temos: $x^2 = 9 \vee x^2 = 4 \Leftrightarrow x = 3 \vee x = -3 \vee x = 2 \vee x = -2$

C.S. = $\{3, -3, 2, -2\}$

b) $x^4 - 26x^2 + 25 = 0 \Leftrightarrow (x^2)^2 - 26x^2 + 25 = 0$

Substituindo x^2 por y , vem que:

$$y^2 - 26y + 25 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{26 \pm \sqrt{676 - 4 \times 25}}{2} \Leftrightarrow y = \frac{26 \pm \sqrt{576}}{2} \Leftrightarrow y = \frac{26 \pm 24}{2} \Leftrightarrow y = 25 \vee y = 1$$

Substituindo y por x^2 , temos: $x^2 = 25 \vee x^2 = 1 \Leftrightarrow x = 5 \vee x = -5 \vee x = 1 \vee x = -1$

C.S. = $\{5, -5, 1, -1\}$

c) $2x^4 - 26x^2 + 80 = 0 \Leftrightarrow 2(x^2)^2 - 26x^2 + 80 = 0$

Substituindo x^2 por y , vem que:

$$2y^2 - 26y + 80 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{26 \pm \sqrt{676 - 4 \times 2 \times 80}}{4} \Leftrightarrow y = \frac{26 \pm \sqrt{36}}{4} \Leftrightarrow y = \frac{26 \pm 6}{4} \Leftrightarrow y = 8 \vee y = 5$$

Substituindo y por x^2 , temos:

$$x^2 = 8 \vee x^2 = 5 \Leftrightarrow x = \sqrt{8} \vee x = -\sqrt{8} \vee x = \sqrt{5} \vee x = -\sqrt{5} \\ \Leftrightarrow x = 2\sqrt{2} \vee x = -2\sqrt{2} \vee x = \sqrt{5} \vee x = -\sqrt{5}$$

C.S. = $\{-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, -\sqrt{5}, \sqrt{5}\}$

d) $x^4 - 3x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow (x^2)^2 - 3x^2 - 4 = 0$

Substituindo x^2 por y , vem que:

$$y^2 - 3y - 4 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4 \times (-4)}}{2} \Leftrightarrow y = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{2} \Leftrightarrow y = \frac{3 \pm 5}{2} \Leftrightarrow y = 4 \vee y = -1$$

Substituindo y por x^2 , temos: $x^2 = 4 \vee \underbrace{x^2 = -1}_{\text{impossível em } \mathbb{R}} \Leftrightarrow x = 2 \vee x = -2$

C.S. = $\{2, -2\}$

Desafios

Página 151

1.

- a) Seguindo o exemplo descrito, podemos considerar o polinómio, $P(x) = x(x-1)(x-2)$.
b) O grau do polinómio produto é igual à soma dos graus dos polinómios multiplicados, logo o grau de $P(x)$ é 3.

2.

- a) Seguindo o exemplo anterior, podemos considerar $B(x) = \frac{x(x-2)}{-1}$.

- b) De forma análoga, podemos considerar $C(x) = \frac{(x-1)(x-2)}{2}$.

c) Podemos confirmar que:

$$P(0) = 2C(0) + 1B(0) + 6A(0) = 2 \times 1 + 1 \times 0 + 6 \times 0 = 2$$

$$P(1) = 2C(1) + 1B(1) + 6A(1) = 2 \times 0 + 1 \times 1 + 6 \times 0 = 1$$

$$P(2) = 2C(2) + 1B(2) + 6A(2) = 2 \times 0 + 1 \times 0 + 6 \times 1 = 6$$

Logo, este é o polinómio procurado.

- d) $P(x) = 2C(x) + B(x) + 6A(x) = (x-1)(x-2) - x(x-2) + 3x(x-1) = 3x^2 - 4x + 2$

3. Seguindo o exemplo anterior, começamos por definir polinómios que tenham o valor 1 em cada um dos pontos -1, 0, 1, 2 e o valor 0 nos restantes, depois é só multiplicar cada um destes polinómios pelos valores 1, 1, -1 e 13.

Obtemos:

$$f(x) = \frac{x(x-1)(x-2)}{-6} + \frac{(x+1)(x-1)(x-2)}{2} - \frac{(x+1)x(x-2)}{-2} + 13 \frac{(x+1)x(x-1)}{6}$$

Tema III – Geometria analítica

Unidade 1 – Geometria analítica no plano

Páginas 154 a 181

1.

a) $A(1, -2)$ $B(-3, 1)$

$$d(A, B) = \sqrt{(-3 - 1)^2 + (1 - (-2))^2} = \sqrt{(-4)^2 + 3^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$$

b) $C\left(\frac{3}{2}, -3\right)$ $O(0, 0)$

$$d(C, O) = \sqrt{\left(0 - \frac{3}{2}\right)^2 + (0 - (-3))^2} = \sqrt{\left(-\frac{3}{2}\right)^2 + 3^2} = \sqrt{\frac{9}{4} + 9} = \sqrt{\frac{45}{4}} = \frac{3\sqrt{5}}{2}$$

c) $D(2016, 5)$ $E(2016, 4)$

$$d(D, E) = \sqrt{(2016 - 2016)^2 + (4 - 5)^2} = \sqrt{0^2 + (-1)^2} = \sqrt{0 + 1} = \sqrt{1} = 1$$

d) $F(0, \sqrt{2})$ $G(1, \sqrt{2} - 3)$

$$d(F, G) = \sqrt{(1 - 0)^2 + (\sqrt{2} - 3 - \sqrt{2})^2} = \sqrt{1^2 + (-3)^2} = \sqrt{1 + 9} = \sqrt{10}$$

e) $H(\sqrt{5}, 3)$ $I(-\sqrt{3}, 0)$

$$\begin{aligned} d(H, I) &= \sqrt{(\sqrt{5} - (-\sqrt{3}))^2 + (3 - 0)^2} = \sqrt{(\sqrt{5} + \sqrt{3})^2 + 9} = \sqrt{(\sqrt{5})^2 + 2\sqrt{5} \times \sqrt{3} + (\sqrt{3})^2 + 9} \\ &= \sqrt{5 + 2\sqrt{15} + 3 + 9} = \sqrt{17 + 2\sqrt{15}} \end{aligned}$$

f) $J(a, b)$ $K(b, a)$

$$d(J, K) = \sqrt{(b - a)^2 + (a - b)^2} = \sqrt{2(a - b)^2} = |a - b|\sqrt{2}$$

2. $A(5, 3)$ $B(3, 0)$ $C(-1, -2)$ $D(1, 1)$

$$\overline{AB} = \sqrt{(3 - 5)^2 + (0 - 3)^2} = \sqrt{(-2)^2 + (-3)^2} = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}$$

$$\overline{BC} = \sqrt{(-2 - 0)^2 + (-1 - 3)^2} = \sqrt{(-2)^2 + (-4)^2} = \sqrt{4 + 16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

$$\overline{CD} = \sqrt{(1 - (-2))^2 + (1 - (-1))^2} = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13}$$

$$\overline{DA} = \sqrt{(5 - 1)^2 + (3 - 1)^2} = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{16 + 4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

Assim, $\overline{AB} = \overline{CD}$ e $\overline{BC} = \overline{DA}$ e, portanto, os pontos A, B, C e D são vértices de um paralelogramo.

3. $\overline{AM} = \left| \frac{a+b}{2} - a \right| = \left| \frac{a+b-2a}{2} \right| = \left| \frac{b-a}{2} \right| = \frac{|b-a|}{2}$

$$\overline{MB} = \left| b - \frac{a+b}{2} \right| = \left| \frac{2b-a-b}{2} \right| = \left| \frac{b-a}{2} \right| = \frac{|b-a|}{2}$$

Logo, $\overline{AM} = \overline{MB}$, como queríamos demonstrar.

4.

a) $A(2, 7)$ $B(6, 11)$

As coordenadas do ponto médio de $[AB]$ são: $\left(\frac{2+6}{2}, \frac{7+11}{2}\right) = \left(\frac{8}{2}, \frac{18}{2}\right) = (4, 9)$

b) $A(1, \sqrt{5}) \quad B(-2, 3\sqrt{5})$

As coordenadas do ponto médio de $[AB]$ são: $\left(\frac{1+(-2)}{2}, \frac{\sqrt{5}+3\sqrt{5}}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{4\sqrt{5}}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}, 2\sqrt{5}\right)$

c) $A(a+2, 3a-1) \quad B(5a+4, a-3)$

As coordenadas do ponto médio de $[AB]$ são:

$$\left(\frac{a+2+5a+4}{2}, \frac{3a-1+a-3}{2}\right) = \left(\frac{6a+6}{2}, \frac{4a-4}{2}\right) = (3a+3, 2a-2)$$

5. $A(-3, 4) \quad B(1, 5)$

O centro da circunferência é o ponto médio de $[AB]$: $\left(\frac{-3+1}{2}, \frac{4+5}{2}\right) = \left(-\frac{2}{2}, \frac{9}{2}\right) = \left(-1, \frac{9}{2}\right)$

6. $P(2, 4)$

a) $y = x$

Substituindo y por 4 e x por 2 obtém-se $4 = 2$, que é uma proposição falsa. Logo, P não pertence ao conjunto dos pontos definido por $y = x$.

b) $y = 4$

Substituindo y por 4 obtém-se $4 = 4$, que é uma proposição verdadeira. Logo, P pertence ao conjunto dos pontos definido por $y = 4$.

c) $x = 0$

Substituindo x por 0 obtém-se $2 = 0$, que é uma proposição falsa. Logo, P não pertence ao conjunto dos pontos definido por $x = 0$.

d) $y = x^2$

Substituindo y por 4 e x por 2 obtém-se $4 = 2^2$, que é uma proposição verdadeira. Logo, P pertence ao conjunto dos pontos definido por $y = x^2$.

7. $P(-3, -1)$

a) $y \leq 0$

Substituindo y por -1 obtém-se $-1 \leq 0$, que é uma proposição verdadeira. Logo, P pertence ao conjunto dos pontos definido por $y \leq 0$.

b) $x > -3$

Substituindo x por -3 obtém-se $-3 > -3$, que é uma proposição falsa. Logo, P não pertence ao conjunto dos pontos definido por $x > -3$.

c) $x \geq -3$

Substituindo x por -3 obtém-se $-3 \geq -3$, que é uma proposição verdadeira. Logo, P pertence ao conjunto dos pontos definido por $x \geq -3$.

d) $x > y$

Substituindo x por -3 e y por -1 obtém-se $-3 > -1$, que é uma proposição falsa. Logo, P não pertence ao conjunto dos pontos definido por $x > y$.

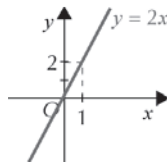
8.

a) O conjunto dos pontos do plano cuja abscissa é igual a -4 é uma reta vertical de equação $x = -4$.

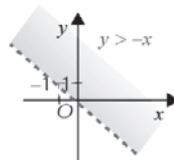
- b) O conjunto dos pontos do plano cuja abscissa é maior que 0 é um semiplano aberto à direita da reta de equação $x = 0$; $x > 0$.
- c) O conjunto dos pontos do plano cuja abscissa é não superior a 5 é um semiplano fechado à esquerda da reta de equação $x = 5$; $x \leq 5$.

9.

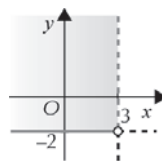
- a) O conjunto dos pontos do plano cuja ordenada é igual ao dobro da abscissa é a reta de equação $y = 2x$.



- b) O conjunto dos pontos do plano cuja ordenada é superior ao simétrico da abscissa é o semiplano aberto superior à reta de equação $y = -x$.

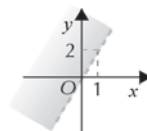


- c) O conjunto dos pontos do plano cuja abscissa é inferior a 3 e cuja ordenada é superior ou igual a -2 é a interseção do semiplano definido pela condição $x < 3$ com o semiplano definido pela condição $y \geq -2$.

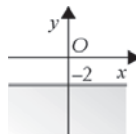


10.

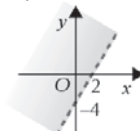
- a) $y > 2x$



- b) $y \leq -2$

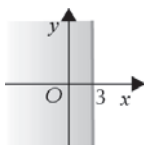


- c) $2x - y < 4 \Leftrightarrow -y < -2x + 4 \Leftrightarrow y > 2x - 4$

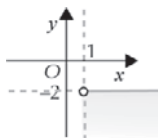


| x | $y = 2x - 4$ |
|-----|--------------|
| 0 | -4 |
| 1 | -2 |

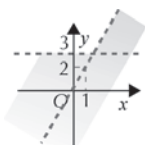
d) $3 - x \geq 0 \Leftrightarrow -x \geq -3 \Leftrightarrow x \leq 3$



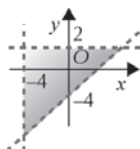
e) $y \leq -2 \wedge x > 1$



f) $y < 2x \vee y < 3$

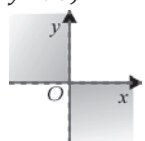


g) $2x - y < 4 \wedge x > -4 \wedge 2 - y > 0 \Leftrightarrow -y < -2x + 4 \wedge x > -4 \wedge -y > -2$
 $\Leftrightarrow y > 2x - 4 \wedge x > -4 \wedge y < 2$

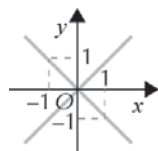


| x | $y = 2x - 4$ |
|-----|--------------|
| 0 | -4 |
| 1 | -2 |

h) $xy < 0 \Leftrightarrow (x < 0 \wedge y > 0) \vee (x > 0 \wedge y < 0)$



i) $x^2 - y^2 = 0 \Leftrightarrow (x - y)(x + y) = 0 \Leftrightarrow x - y = 0 \vee x + y = 0 \Leftrightarrow x = y \vee x = -y$



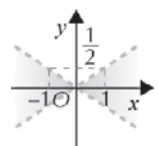
j) $x^2 - 4y^2 > 0 \Leftrightarrow (x - 2y)(x + 2y) > 0$

$\Leftrightarrow (x - 2y > 0 \wedge x + 2y > 0) \vee (x - 2y < 0 \wedge x + 2y < 0)$

$\Leftrightarrow (-2y > -x \wedge 2y > -x) \vee (-2y < -x \wedge 2y < -x)$

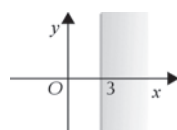
$\Leftrightarrow (2y < x \wedge 2y > -x) \vee (2y > x \wedge 2y < -x)$

$\Leftrightarrow \left(y < \frac{1}{2}x \wedge y > -\frac{1}{2}x\right) \vee \left(y > \frac{1}{2}x \wedge y < -\frac{1}{2}x\right)$

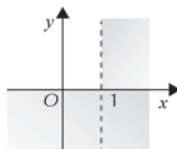


11.

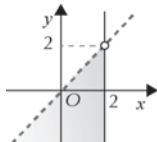
a) $\sim(x < 3) \Leftrightarrow x \geq 3$



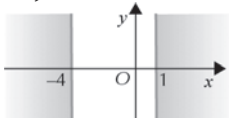
b) $\sim(x \leq 1 \wedge y > 0) \Leftrightarrow x > 1 \vee y \leq 0$



c) $\sim(x > 2 \vee y \geq x) \Leftrightarrow x \leq 2 \wedge y < x$



d) $\sim(-4 < x < 1) \Leftrightarrow \sim(x > -4 \wedge x < 1) \Leftrightarrow x \leq -4 \vee x \geq 1$



12.

a) $x \leq -2 \vee x > 1$

b) $-1 < y < 1$

c) $-1 \leq x \leq 1 \wedge -2 \leq y \leq 3$

d) $-4 < y < 4 \vee y \leq x$

13. $A(1, -3) \quad B(-4, 2) \quad C(2, k), k \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \overline{CA} = \overline{CB} &\Leftrightarrow \sqrt{(2-1)^2 + (k-(-3))^2} = \sqrt{(2-(-4))^2 + (k-2)^2} \\ &\Leftrightarrow 1^2 + (k+3)^2 = 6^2 + (k-2)^2 \\ &\Leftrightarrow 1 + k^2 + 6k + 9 = 36 + k^2 - 4k + 4 \\ &\Leftrightarrow 10k = 30 \\ &\Leftrightarrow k = 3 \end{aligned}$$

14.

a) $A(-3, 2) \quad B(1, 0)$

$$\begin{aligned} (x - (-3))^2 + (y - 2)^2 &= (x - 1)^2 + (y - 0)^2 \Leftrightarrow x^2 + 6x + 9 + y^2 - 4y + 4 = x^2 - 2x + 1 + y^2 \\ &\Leftrightarrow -4y = -8x - 12 \\ &\Leftrightarrow y = 2x + 3 \end{aligned}$$

Assim, uma equação da mediatriz de $[AB]$ é $y = 2x + 3$.

b) $A(1, 7) \quad B(4, 7)$

A e B pertencem à reta de equação $y = 7$, logo a mediatriz de $[AB]$ é a reta vertical que intersesta $[AB]$ no seu ponto médio.

As coordenadas do ponto médio de $[AB]$ são $\left(\frac{1+4}{2}, \frac{7+7}{2}\right) = \left(\frac{5}{2}, 7\right)$.

Assim, uma equação da mediatriz de $[AB]$ é $x = \frac{5}{2}$.

15. $P(2, 0) \quad Q(-5, 1)$

a) $(x - 2)^2 + (y - 0)^2 = (x + 5)^2 + (y - 1)^2 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 = x^2 + 10x + 25 + y^2 - 2y + 1$
 $\Leftrightarrow 2y = 14x + 22$
 $\Leftrightarrow y = 7x + 11$

Assim, uma equação da mediatriz de $[PQ]$ é $y = 7x + 11$.

- b) Para que um ponto pertença à mediatriz de $[PQ]$, a distância entre esse ponto e P tem de ser igual à distância entre esse ponto e Q .

Assim:

$$\begin{aligned} \sqrt{(1 - 2)^2 + (11 - 0)^2} &= \sqrt{(1 + 5)^2 + (11 - 1)^2} \Leftrightarrow \sqrt{(-1)^2 + 11^2} = \sqrt{6^2 + 10^2} \\ &\Leftrightarrow \sqrt{1 + 121} = \sqrt{36 + 100} \\ &\Leftrightarrow \sqrt{122} = \sqrt{136}, \text{ que é uma proposição falsa.} \end{aligned}$$

Logo, o ponto não pertence à mediatriz de $[PQ]$.

- c) Da alínea a) vem que $y = 7x + 11$ é uma equação da mediatriz de $[PQ]$.

Se, por exemplo, $x = 0$, então $y = 7 \times 0 + 11 = 11$ e obtém-se o ponto de coordenadas $(0, 11)$, que pertence à mediatriz de $[PQ]$.

Se, por exemplo, $x = 1$, então $y = 7 \times 1 + 11 = 18$ e obtém-se o ponto de coordenadas $(1, 18)$, que pertence à mediatriz de $[PQ]$.

Se, por exemplo, $x = 2$, então $y = 7 \times 2 + 11 = 25$ e obtém-se o ponto de coordenadas $(2, 25)$, que pertence à mediatriz de $[PQ]$.

16. $A(2, 3) \quad B(0, 5) \quad C(-1, 4)$

a)

i. $\overline{BC} = \sqrt{(-1 - 0)^2 + (4 - 5)^2} = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$

Assim, uma equação da circunferência de centro A e raio \overline{BC} é $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 2$.

- ii. Uma circunferência de centro B e que passe em A tem raio igual a \overline{BA} .

$$\overline{BA} = \sqrt{(2 - 0)^2 + (3 - 5)^2} = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = \sqrt{4 + 4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

Assim, uma equação da circunferência de centro B e que passe em A é $x^2 + (y - 5)^2 = 8$.

- iii. Se a circunferência tem centro em C e é tangente ao eixo das abcissas, então o seu raio vai ser a distância entre C e o eixo das abcissas, que é 4.

Assim, uma equação da circunferência de centro C e que é tangente ao eixo das abcissas é $(x + 1)^2 + (y - 4)^2 = 16$.

b) $P(1, 2)$

Substituindo em cada uma das circunferências da alínea anterior x e y pela abcissa e pela ordenada de P , obtemos:

- i. $(1 - 2)^2 + (2 - 3)^2 = 2 \Leftrightarrow (-1)^2 + (-1)^2 = 2 \Leftrightarrow 1 + 1 = 2 \Leftrightarrow 2 = 2$, que é uma proposição verdadeira. Logo, P pertence à circunferência de centro A e raio \overline{BC} .
- ii. $1^2 + (2 - 5)^2 = 8 \Leftrightarrow 1^2 + (-3)^2 = 8 \Leftrightarrow 1 + 9 = 8 \Leftrightarrow 10 = 8$, que é uma proposição falsa. Logo, P não pertence à circunferência de centro B e que passa em A .

- iii. $(1+1)^2 + (2-4)^2 = 16 \Leftrightarrow 2^2 + (-2)^2 = 16 \Leftrightarrow 4+4 = 16 \Leftrightarrow 8 = 16$, que é uma proposição falsa. Logo, P não pertence à circunferência de centro C e que é tangente ao eixo das abscissas.

17.

a) $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 9$

Centro $(1, 2)$

Raio $= \sqrt{9} = 3$

b) $\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 + (y - \sqrt{3})^2 = 2$

Centro $\left(-\frac{1}{3}, \sqrt{3}\right)$

Raio $= \sqrt{2}$

c) $x^2 + y^2 = 1$

Centro $(0, 0)$

Raio $= \sqrt{1} = 1$

d) $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 = 4 + 1 + 4$
 $\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-2)^2 = 9$

Centro $(1, 2)$

Raio $= \sqrt{9} = 3$

e) $2x^2 + 2y^2 + 8x - 12y + 16 = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 4x - 6y + 8 = 0$
 $\Leftrightarrow x^2 + 4x + 4 + y^2 - 6y + 9 = -8 + 4 + 9$
 $\Leftrightarrow (x+2)^2 + (y-3)^2 = 5$

Centro $(-2, 3)$

Raio $= \sqrt{5}$

f) $x^2 + y^2 + y - \frac{1}{4} = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + y + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$
 $\Leftrightarrow x^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$

Centro $\left(0, -\frac{1}{2}\right)$

Raio $= \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

18.

a) $(x-1)^2 + (y+2)^2 \leq 9$ define o círculo de centro $C(1, -2)$ e raio 3.

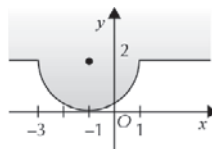
b) Substitui-se, na equação obtida na alínea anterior, x e y pelas coordenadas respectivas de cada ponto.

- $(0-1)^2 + (3+2)^2 \leq 9 \Leftrightarrow (-1)^2 + 5^2 \leq 9 \Leftrightarrow 1 + 25 \leq 9 \Leftrightarrow 26 \leq 9$, que é uma proposição falsa. Logo, o ponto A não pertence ao círculo definido na alínea anterior.
- $(1-1)^2 + (1+2)^2 \leq 9 \Leftrightarrow 0^2 + 3^2 \leq 9 \Leftrightarrow 9 \leq 9$, que é uma proposição verdadeira. Logo, o ponto B pertence ao círculo definido na alínea anterior.

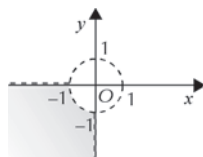
• $\left(\frac{1}{2} - 1\right)^2 + \left(-\frac{2}{3} + 2\right)^2 \leq 9 \Leftrightarrow \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{4}{3}\right)^2 \leq 9 \Leftrightarrow \frac{1}{4} + \frac{16}{9} \leq 9 \Leftrightarrow \frac{73}{36} \leq 9$, que é uma proposição verdadeira. Logo, o ponto D pertence ao círculo definido na alínea anterior.

19.

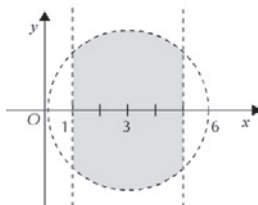
a) $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 \leq 4 \vee y \geq 2$



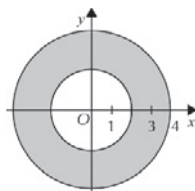
b) $x^2 + y^2 > 1 \wedge x < 0 \wedge y < 0$



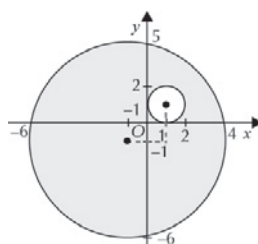
c) $(x - 3)^2 + y^2 < 9 \wedge 1 < x < 5$



d) $4 \leq x^2 + y^2 \leq 16$



e) $(x + 1)^2 + (y + 1)^2 \leq 25 \wedge (x - 1)^2 + (y - 1)^2 \geq 1$



20.

a) $1 < x^2 + y^2 < 4 \wedge y \leq -x$

b) $(x - 2)^2 + (y - 4)^2 \geq 4 \wedge y \leq 5$

c) $(x^2 + y^2 \leq 36 \wedge x \geq 0 \wedge y \geq 0) \vee (x^2 + y^2 \leq 36 \wedge x \leq -3)$

21.

- a)** O conjunto dos pontos do plano que distam igualmente de $A(-3, 5)$ e de $B(1, 1)$ é a mediatriz de $[AB]$:

$$\begin{aligned}(x+3)^2 + (y-5)^2 &= (x-1)^2 + (y-1)^2 \\ \Leftrightarrow x^2 + 6x + 9 + y^2 - 10y + 25 &= x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 \\ \Leftrightarrow -8y &= -8x - 32 \\ \Leftrightarrow y &= x + 4\end{aligned}$$

- b)** O conjunto dos pontos do plano cuja distância ao ponto $C(2, -3)$ não excede 4 unidades é o círculo de centro C e raio 4: $(x-2)^2 + (y+3)^2 \leq 16$

- c)** Procura-se o conjunto dos pontos $P(x, y)$ do plano tais que:

$$\begin{aligned}d(P, D) = 2d(P, E) &\Leftrightarrow \sqrt{(x+5)^2 + (y-4)^2} = 2\sqrt{(x-1)^2 + (y-4)^2} \\ \Leftrightarrow (x+5)^2 + (y-4)^2 &= 4((x-1)^2 + (y-4)^2) \\ \Leftrightarrow x^2 + 10x + 25 + y^2 - 8y + 16 &= 4(x^2 - 2x + 1 + y^2 - 8y + 16) \\ \Leftrightarrow x^2 + 10x + 25 + y^2 - 8y + 16 &= 4x^2 - 8x + 4 + 4y^2 - 32y + 64 \\ \Leftrightarrow -3x^2 + 18x - 3y^2 + 24y - 27 &= 0 \\ \Leftrightarrow x^2 - 6x + y^2 - 8y + 9 &= 0 \\ \Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 + y^2 - 8y + 16 &= 16 \\ \Leftrightarrow (x-3)^2 + (y-4)^2 &= 16\end{aligned}$$

O conjunto dos pontos cuja medida da distância ao ponto $D(-5, 4)$ é o dobro da medida da distância ao ponto $E(1, 4)$ é a circunferência de centro $C(3, 4)$ e raio 4.

22.

a) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$

Como $a^2 = 25$ e $b^2 = 9$, então $a = 5$ e $b = 3$, ou seja, $2a = 10$ e $2b = 6$. Por outro lado, $c = \sqrt{25-9} = \sqrt{16} = 4$, pelo que $2c = 8$. Assim, a equação dada define uma elipse de eixo maior 10, eixo menor 6, distância focal 8 e focos $(4, 0)$ e $(-4, 0)$.

b) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{3} = 1$

Como $a^2 = 16$ e $b^2 = 3$, então $a = 4$ e $b = \sqrt{3}$, ou seja, $2a = 8$ e $2b = 2\sqrt{3}$.

Por outro lado, $c = \sqrt{16-3} = \sqrt{13}$, pelo que $2c = 2\sqrt{13}$.

Assim, a equação dada define uma elipse de eixo maior 8, eixo menor $2\sqrt{3}$, distância focal $2\sqrt{13}$ e focos $(\sqrt{13}, 0)$ e $(-\sqrt{13}, 0)$.

23.

- a)** Como os extremos do eixo maior da elipse, $(-4, 0)$ e $(4, 0)$, pertencem ao eixo Ox , então os focos da elipse vão pertencer ao eixo Ox .

Uma vez que a distância focal é $2\sqrt{7}$, então $c = \sqrt{7}$.

Assim, os focos da elipse são os pontos de coordenadas $A(-\sqrt{7}, 0)$ e $B(\sqrt{7}, 0)$.

- b) Da alínea anterior vem que $c = \sqrt{7}$.

Além disso, tendo em atenção as coordenadas dos extremos do eixo maior da elipse, tem-se que $a = 4$.

$$\text{Portanto, } b = \sqrt{4^2 - (\sqrt{7})^2} = \sqrt{16 - 7} = \sqrt{9} = 3.$$

Logo, a equação reduzida da elipse é $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$.

24. O conjunto dos pontos do plano cuja soma das medidas das distâncias aos pontos $A(-2, 0)$ e $B(2, 0)$ é igual a 7 é a elipse de focos $(-2, 0)$ e $(2, 0)$ e eixo maior 7.

Ou seja, $2a = 7 \Leftrightarrow a = \frac{7}{2}$ e, portanto, $a^2 = \frac{49}{4}$.

$$\text{Então, } b = \sqrt{\frac{49}{4} - 4} = \sqrt{\frac{33}{4}} \text{ e, portanto, } b^2 = \frac{33}{4}.$$

Assim, a equação reduzida da elipse é $\frac{x^2}{\frac{49}{4}} + \frac{y^2}{\frac{33}{4}} = 1$.

25.

- a) $x^2 + y^2 = 1$ é uma equação da circunferência de centro $(0, 0)$ e raio 1.

- b) $\frac{x^2}{9} + y^2 = 1$ é uma equação da elipse de eixo maior 6 (porque $a^2 = 9$, logo $a = 3$ e $2a = 6$), eixo menor 2 (porque $b^2 = 1$, logo $b = 1$ e $2b = 2$) e focos $(2\sqrt{2}, 0)$ e $(-2\sqrt{2}, 0)$ (porque $c = \sqrt{9 - 1} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$).

- c) $6x^2 + 9y^2 = 18 \Leftrightarrow \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1$ é uma equação da elipse de eixo maior $2\sqrt{3}$ (porque $a^2 = 3$, logo $a = \sqrt{3}$ e $2a = 2\sqrt{3}$), eixo menor $2\sqrt{2}$ (porque $b^2 = 2$, logo $b = \sqrt{2}$ e $2b = 2\sqrt{2}$) e focos $(1, 0)$ e $(-1, 0)$ (porque $c = \sqrt{3 - 2} = 1$).

- d) $25x^2 + 4y^2 = 100 \Leftrightarrow \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{25} = 1$ é uma equação da elipse de eixo maior 10 (porque $b^2 = 25$, logo $b = 5$ e $2b = 10$), eixo menor 4 (porque $a^2 = 4$, logo $a = 2$ e $2a = 4$) e focos $(0, \sqrt{21})$ e $(0, -\sqrt{21})$ (porque $c = \sqrt{25 - 4} = \sqrt{21}$).

- e) $4x^2 + 4y^2 = 24 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 6$ é uma equação da circunferência de centro $(0, 0)$ e raio $\sqrt{6}$.

Aprende Fazendo

Páginas 182 a 189

1. $A(4, 4)$ $B(-1, 5)$ $C(-2, 0)$

$$d(A, B) = \sqrt{(4 - (-1))^2 + (4 - 5)^2} = \sqrt{5^2 + (-1)^2} = \sqrt{25 + 1} = \sqrt{26}$$

$$d(A, C) = \sqrt{(4 - (-2))^2 + (4 - 0)^2} = \sqrt{6^2 + 4^2} = \sqrt{36 + 16} = \sqrt{52}$$

$$d(B, C) = \sqrt{(-1 - (-2))^2 + (5 - 0)^2} = \sqrt{1^2 + 5^2} = \sqrt{1 + 25} = \sqrt{26}$$

Como $d(A, B) = d(B, C) \neq d(A, C)$, então o triângulo $[ABC]$ é isósceles e, portanto, a proposição (I) é verdadeira.

$$(d(A, C))^2 = (\sqrt{52})^2 = 52$$

$$(d(A, B))^2 + (d(B, C))^2 = (\sqrt{26})^2 + (\sqrt{26})^2 = 26 + 26 = 52$$

Como $(d(A, C))^2 = (d(A, B))^2 + (d(B, C))^2$, então, pelo Teorema de Pitágoras, o triângulo $[ABC]$ é retângulo, ou seja, a proposição (II) é verdadeira. Pode então concluir-se que ambas as proposições são verdadeiras.

Opção (A)

2. Os pontos $(-3, 3)$ e $(3, -3)$ pertencem à reta de equação $y = -x$. Como se trata de um segmento de reta em que as ordenadas assumem valores entre -3 e 3 , inclusive, tem-se que $-3 \leq y \leq 3$. Logo, o conjunto de pontos da figura pode ser definido pela condição $-3 \leq y \leq 3 \wedge y = -x$.

Opção (B)

3. $A(2, 5)$ $B(-2, 3)$

Seja $P(0, 8)$, então:

$$d(A, P) = \sqrt{(0-2)^2 + (8-5)^2} = \sqrt{(-2)^2 + 3^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$$

$$d(B, P) = \sqrt{(0+2)^2 + (8-3)^2} = \sqrt{2^2 + 5^2} = \sqrt{4+25} = \sqrt{29}$$

Logo, P não pertence à mediatriz de $[AB]$ porque $d(A, P) \neq d(B, P)$.

Seja $Q\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$, então:

$$d(A, Q) = \sqrt{\left(\frac{1}{2}-2\right)^2 + \left(\frac{3}{2}-5\right)^2} = \sqrt{\left(-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(-\frac{7}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{49}{4}} = \sqrt{\frac{58}{4}} = \frac{\sqrt{58}}{2}$$

$$d(B, Q) = \sqrt{\left(\frac{1}{2}+2\right)^2 + \left(\frac{3}{2}-3\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 + \left(-\frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{25}{4} + \frac{9}{4}} = \sqrt{\frac{34}{4}} = \frac{\sqrt{34}}{2}$$

Logo, Q não pertence à mediatriz de $[AB]$ porque $d(A, Q) \neq d(B, Q)$.

Seja $R(5, 2)$, então:

$$d(A, R) = \sqrt{(5-2)^2 + (2-5)^2} = \sqrt{3^2 + (-3)^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18}$$

$$d(B, R) = \sqrt{(5+2)^2 + (2-3)^2} = \sqrt{7^2 + (-1)^2} = \sqrt{49+1} = \sqrt{50}$$

Logo, R não pertence à mediatriz de $[AB]$ porque $d(A, R) \neq d(B, R)$.

Seja $S(0, 4)$, então:

$$d(A, S) = \sqrt{(0-2)^2 + (4-5)^2} = \sqrt{(-2)^2 + (-1)^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$$

$$d(B, S) = \sqrt{(0+2)^2 + (4-3)^2} = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$$

Logo, S pertence à mediatriz de $[AB]$ porque $d(A, S) = d(B, S)$.

Opção (D)

4. $(x + \sqrt{2})^2 + (y - \pi)^2 = \frac{1}{2}$ é uma equação da circunferência de centro $(-\sqrt{2}, \pi)$ e raio

$$r = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Opção (A)

5. Uma vez que a ordenada de A é 3 , este ponto pertence à reta de equação $y = 3$.

Opção (D)

6. $A(3, -2 - k) \quad B(1, -5)$

$$d(A, B) = \sqrt{13} \Leftrightarrow \sqrt{(3-1)^2 + (-2-k+5)^2} = \sqrt{13}$$

$$\Leftrightarrow 2^2 + (3-k)^2 = 13$$

$$\Leftrightarrow (3-k)^2 = 9$$

$$\Leftrightarrow 3-k = 3 \vee 3-k = -3$$

$$\Leftrightarrow k = 0 \vee k = 6$$

Opção (B)

7. $(x+3)^2 + (y-2)^2 = 9 \wedge x = -1 \Leftrightarrow (-1+3)^2 + (y-2)^2 = 9$

$$\Leftrightarrow 2^2 + (y-2)^2 = 9$$

$$\Leftrightarrow (y-2)^2 = 5$$

$$\Leftrightarrow y-2 = \sqrt{5} \vee y-2 = -\sqrt{5}$$

$$\Leftrightarrow y = 2 + \sqrt{5} \vee y = 2 - \sqrt{5}$$

A interseção do plano definido por $x = -1$ com a circunferência definida por

$(x+3)^2 + (y-2)^2 = 9$ tem como resultados os pontos de coordenadas $(-1, 2 + \sqrt{5})$ e $(-1, 2 - \sqrt{5})$.

Opção (B)

8. A bissetriz dos quadrantes ímpares é definida pela equação $y = x$. Assim, para que A pertença à bissetriz dos quadrantes ímpares:

$$2k^2 + 9k = 5 \Leftrightarrow 2k^2 + 9k - 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow k = \frac{-9 \pm \sqrt{9^2 - 4 \times 2 \times (-5)}}{4}$$

$$\Leftrightarrow k = \frac{-9 \pm \sqrt{121}}{4}$$

$$\Leftrightarrow k = \frac{-9 \pm 11}{4}$$

$$\Leftrightarrow k = -5 \vee k = \frac{1}{2}$$

Opção (C)

9. A circunferência da figura tem centro $(0, 0)$ e raio 3. Como a região sombreada é uma parte do interior da circunferência incluindo a fronteira, a expressão que se procura vai conter a expressão $x^2 + y^2 \leq 9$. Por outro lado, a região sombreada é superior à reta de equação $y = x$ e é superior à reta de equação $y = -x$.

Assim, a expressão que pode definir a região sombreada é $x^2 + y^2 \leq 9 \wedge y \geq x \wedge y \geq -x$.

Opção (C)

10. Tendo em conta que os focos pertencem ao eixo Oy , e como o eixo menor é 16, tem-se que $2a = 16 \Leftrightarrow a = 8$ e então $a^2 = 64$. Além disso, de acordo com as coordenadas dos focos, $c = 6$.

Logo, $b = \sqrt{8^2 + 6^2} = \sqrt{100} = 10$ e, portanto, $b^2 = 100$. Assim, uma equação da elipse

referida é $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{100} = 1$.

Opção (D)

11. $x^2 + y^2 = 16$ define a circunferência de centro $(0, 0)$ e raio 4.

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1 \text{ define a elipse de eixo maior } 2a = 2\sqrt{25} = 10 \text{ e eixo menor } 2b = 2\sqrt{16} = 8.$$

Ambas contêm os pontos $(0, 4)$ e $(0, -4)$.

Opção (D)

12. $x^2 + y^2 + 6y + 9 = 0 \Leftrightarrow x^2 + (y + 3)^2 = 0$, que representa o ponto $(0, -3)$.

Opção (B)

13. O conjunto dos pontos P do plano que verificam a condição $\overline{PA} + \overline{PB} = 14$ é uma elipse de focos A e B e eixo maior 14, de acordo com a definição de elipse.

Opção (C)

14.

a) $A(2, 4)$ $B(6, 15)$

$$d(A, B) = \sqrt{(2 - 6)^2 + (4 - 15)^2} = \sqrt{(-4)^2 + (-11)^2} = \sqrt{16 + 121} = \sqrt{137}$$

b) $A(-2, 3)$ $B(6, -5)$

$$d(A, B) = \sqrt{(-2 - 6)^2 + (3 - (-5))^2} = \sqrt{(-8)^2 + 8^2} = \sqrt{64 + 64} = \sqrt{128}$$

c) $A(1, -4)$ $B(-2, 0)$

$$d(A, B) = \sqrt{(1 - (-2))^2 + (-4 - 0)^2} = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

d) $A(-2, -2)$ $B(-6, 5)$

$$d(A, B) = \sqrt{(-2 - (-6))^2 + (-2 - 5)^2} = \sqrt{4^2 + (-7)^2} = \sqrt{16 + 49} = \sqrt{65}$$

15.

a) $A(-2, -1)$ $B(-3, 1)$

$$\overline{AB} = \sqrt{(-2 - (-3))^2 + (-1 - 1)^2} = \sqrt{1^2 + (-2)^2} = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5}$$

b) $A(2, 2)$ $B(0, -5)$

$$\overline{AB} = \sqrt{(2 - 0)^2 + (2 - (-5))^2} = \sqrt{2^2 + 7^2} = \sqrt{4 + 49} = \sqrt{53}$$

16. Sejam $A(1, -2)$, $B(6, -1)$, $C(9, 3)$ e $D(4, 2)$.

$$\overline{AB} = \sqrt{(1 - 6)^2 + (-2 - (-1))^2} = \sqrt{(-5)^2 + (-1)^2} = \sqrt{25 + 1} = \sqrt{26}$$

$$\overline{BC} = \sqrt{(6 - 9)^2 + (-1 - 3)^2} = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

$$\overline{CD} = \sqrt{(9 - 4)^2 + (3 - 2)^2} = \sqrt{5^2 + 1} = \sqrt{25 + 1} = \sqrt{26}$$

$$\overline{DA} = \sqrt{(4 - 1)^2 + (2 - (-2))^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

Assim, como $\overline{AB} = \overline{CD}$ e $\overline{BC} = \overline{DA}$, então o quadrilátero $[ABCD]$ é um paralelogramo.

17.

a) $A(2, 4)$ $B(2, 15)$

Como A e B têm abscissa 2, então a mediatriz de $[AB]$ é a reta perpendicular à reta de equação $x = 2$ e que contém o ponto médio de $[AB]$, M .

$$M = \left(\frac{2+2}{2}, \frac{4+15}{2} \right) = \left(2, \frac{19}{2} \right)$$

Logo, a mediatriz de $[AB]$ é a reta de equação $y = \frac{19}{2}$.

b) $A(-2, 3)$ $B(6, 3)$

Como A e B têm ordenada 3, então a mediatriz de $[AB]$ é a reta perpendicular à reta de equação $y = 3$ e que contém o ponto médio de $[AB]$, M .

$$M = \left(\frac{-2+6}{2}, \frac{3+3}{2} \right) = (2, 3)$$

Logo, a mediatriz de $[AB]$ é a reta de equação $x = 2$.

c) $A(1, -2)$ $B(-2, 0)$

$$(x-1)^2 + (y+2)^2 = (x+2)^2 + y^2 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 + 4y + 4 = x^2 + 4x + 4 + y^2$$

$$\Leftrightarrow 4y = 6x - 1$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{3}{2}x - \frac{1}{4} \text{ é uma equação da mediatriz de } [AB].$$

d) $A(-2, -2)$ $B(-1, 3)$

$$(x+2)^2 + (y+2)^2 = (x+1)^2 + (y-3)^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 4x + 4 + y^2 + 4y + 4 = x^2 + 2x + 1 + y^2 - 6y + 9$$

$$\Leftrightarrow 10y = -2x + 2$$

$$\Leftrightarrow y = -\frac{1}{5}x + \frac{1}{5} \text{ é uma equação da mediatriz de } [AB].$$

18. Sejam $A(1, \sqrt{3})$, $B(2, 2)$, $D(0, 0)$ e $C(2, 0)$.

$$d(A, C) = \sqrt{(1-2)^2 + (\sqrt{3}-0)^2} = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$$

$$d(B, C) = \sqrt{(2-2)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{0^2 + 2^2} = \sqrt{0+4} = \sqrt{4} = 2$$

$$d(D, C) = \sqrt{(0-2)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{(-2)^2 + 0^2} = \sqrt{4+0} = \sqrt{4} = 2$$

Assim, A , B e D encontram-se à mesma distância do ponto C , pelo que pertencem a uma circunferência de centro C .

19.

a) $O(0, 0)$, $B(4, 0)$, $C(4, 2)$ e $D(2, 2)$ são os vértices do trapézio.

O ponto médio de $[OB]$ é o ponto de coordenadas $(2, 0)$.

O ponto médio de $[BC]$ é o ponto de coordenadas $(4, 1)$.

O ponto médio de $[CO]$ é o ponto de coordenadas $(3, 2)$.

O ponto médio de $[DO]$ é o ponto de coordenadas $(1, 1)$.

b) (i) $y = 2 \wedge 2 \leq x \leq 4$

(ii) $x = 3$

(iii) $(x-4)^2 + (y-2)^2 = 9$

(iv) $0 \leq x \leq 4 \wedge 0 \leq y \leq 2 \wedge y \leq x$

20.

- a) $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 4$ é uma equação da circunferência de centro $(1, -1)$ e raio $2 (= \sqrt{4})$.
- b) $x^2 + (y + 3)^2 = 8$ é uma equação da circunferência de centro $(0, -3)$ e raio $2\sqrt{2} (= \sqrt{8})$.
- c) $(x + 4)^2 + (y - 3)^2 \leq \frac{1}{4}$ é uma equação do círculo de centro $(-4, 3)$ e raio $\frac{1}{2} \left(= \sqrt{\frac{1}{4}} \right)$.
- d) $(x - 5)^2 + y^2 > 20$ é uma equação do exterior da circunferência de centro $(5, 0)$ e raio $2\sqrt{5} (= \sqrt{20})$.
- e) $(x + 3)^2 + (y + 5)^2 < 9$ é uma equação do interior da circunferência de centro $(-3, -5)$ e raio $3 (= \sqrt{9})$.
- f) $2 \leq (x - 2)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 \leq 4$ é uma equação da coroa circular de centro $\left(2, \frac{1}{2}\right)$, sendo 2 o raio da circunferência externa e $\sqrt{2}$ o raio da circunferência interna.

21.

- a) De acordo com a figura, $P(-2, -3)$ e $Q(3, 3)$.

$$\begin{aligned} d(P, Q) &= \sqrt{(-2 - 3)^2 + (-3 - 3)^2} \\ &= \sqrt{(-5)^2 + (-6)^2} \\ &= \sqrt{25 + 36} \\ &= \sqrt{61} \end{aligned}$$

- b) As coordenadas do ponto médio de $[PQ]$ são $\left(\frac{-2+3}{2}, \frac{-3+3}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, 0\right)$.
- c) Se o diâmetro da circunferência é $[PQ]$, então o ponto médio de $[PQ]$ é o centro da circunferência e o seu raio é igual a metade da distância entre P e Q . Assim, de acordo com as alíneas anteriores, uma equação da circunferência de diâmetro $[PQ]$ é $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{61}{4}$.
- e) $(x + 2)^2 + (y + 3)^2 = (x - 3)^2 + (y - 3)^2$
 $\Leftrightarrow x^2 + 4x + 4 + y^2 + 6y + 9 = x^2 - 6x + 9 + y^2 - 6y + 9$
 $\Leftrightarrow 12y = -10x + 5$
 $\Leftrightarrow y = -\frac{5}{6}x + \frac{5}{12}$, que é uma equação da mediatriz de $[PQ]$.
- f) $(-2 \leq x \leq -1 \wedge -3 \leq y \leq 3) \vee (x \leq 3 \wedge y \geq 0 \wedge y \leq x)$

22.

- a) $a = 4$, logo $a^2 = 16$.

$$b = 3, \text{ logo } b^2 = 9.$$

$$\text{Assim, uma equação da elipse é } \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

- b) $a = 5$, logo $a^2 = 25$.

$$b = 1, \text{ logo } b^2 = 1.$$

$$\text{Assim, uma equação da elipse é } \frac{x^2}{25} + y^2 = 1.$$

c) $a = 2$, logo $a^2 = 4$.

$b = 7$, logo $b^2 = 49$.

Assim, uma equação da elipse é $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{49} = 1$.

23.

a) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$

Como $a^2 = 16$, então $a = 4$ e $2a = 8$. Como $b^2 = 9$, então $b = 3$ e $2b = 6$.

Logo, $c = \sqrt{16 - 9} = \sqrt{7}$. Assim, a condição dada define a elipse de eixo maior 8, eixo menor 6 e focos $(-\sqrt{7}, 0)$ e $(\sqrt{7}, 0)$.

b) $\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{11} = 1$

Como $a^2 = 20$, então $a = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$ e $2a = 4\sqrt{5}$. Como $b^2 = 11$, então $b = \sqrt{11}$ e $2b = 2\sqrt{11}$.

Logo, $c = \sqrt{20 - 11} = \sqrt{9} = 3$. Assim, a condição dada define a elipse de eixo maior $4\sqrt{5}$, eixo menor $2\sqrt{11}$ e focos $(-3, 0)$ e $(3, 0)$.

24. $\overline{AB} = \overline{AC} = \overline{BC}$, uma vez que A, B e C são os vértices de um triângulo equilátero. Assim:

$$\begin{aligned}\overline{AB} = \overline{AC} &\Leftrightarrow \sqrt{(-5 - (-3))^2 + (1 - (1 + 2\sqrt{3}))^2} = \sqrt{(-5 - (-1))^2 + (1 - y)^2} \\ &\Leftrightarrow (-2)^2 + (-2\sqrt{3})^2 = (-4)^2 + (1 - y)^2 \\ &\Leftrightarrow 4 + 12 = 16 + (1 - y)^2 \\ &\Leftrightarrow (1 - y)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow 1 - y = 0 \\ &\Leftrightarrow y = 1\end{aligned}$$

Logo, a ordenada de C é 1.

25.

a) $x \leq 0 \wedge y \leq 5 \wedge y \geq -x$

b) $(-1 \leq x \leq 0 \wedge -1 \leq y \leq 0) \vee (0 \leq x \leq 1 \wedge 0 \leq y \leq 1)$

c) $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 \leq 4 \wedge x \leq 1 \wedge y \leq x$

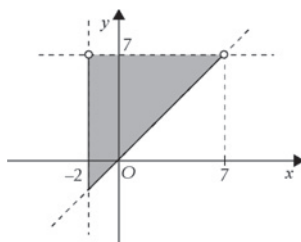
d) $(y > x \wedge x \geq 0) \vee (y < -x \wedge y \geq 0) \vee (y < x \wedge x \leq 0) \vee (y > -x \wedge y \leq 0)$

e) $x^2 + (y - 1)^2 \geq 1 \wedge x^2 + (y - 2)^2 \leq 4$

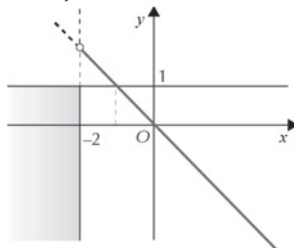
f) $(x + 6)^2 + y^2 = 1 \vee \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1 \vee (x - 6)^2 + y^2 = 1$

26.

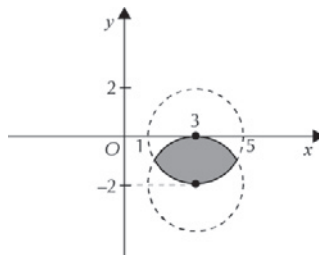
a) $y < 7 \wedge x \geq -2 \wedge y \geq x$



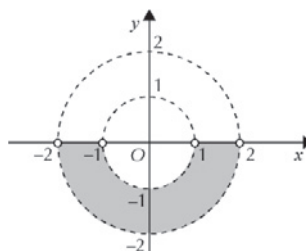
b) $(x \leq -2 \wedge y \leq 1) \vee (y = -x \wedge x > -2)$



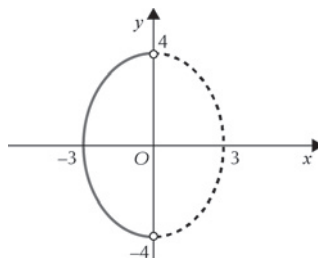
c) $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 \leq 4 \wedge (x - 3)^2 + y^2 \leq 4$



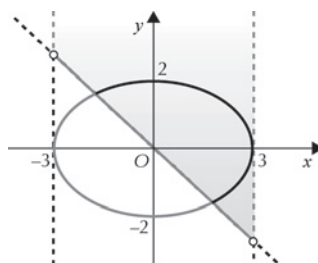
d) $x^2 + y^2 > 1 \wedge x^2 + y^2 < 4 \wedge y \leq 0$



e) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1 \wedge x < 0$



f) $(-3 < x < 3 \wedge y \geq -x) \vee \frac{4x^2}{9} + y^2 = 4$



27.

a) $x^2 + y^2 + 2x - 10y + 14 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 + y^2 - 10y + 25 = -14 + 1 + 25$
 $\Leftrightarrow (x + 1)^2 + (y - 5)^2 = 12$

Assim, o centro da circunferência é o ponto de coordenadas $(-1, 5)$ e o raio é $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$.

b) Se, por exemplo, $x = 1$, então:

$$(1 + 1)^2 + (y - 5)^2 = 12 \Leftrightarrow (y - 5)^2 = 8 \Leftrightarrow y - 5 = \sqrt{8} \vee y - 5 = -\sqrt{8} \\ \Leftrightarrow y = 5 + 2\sqrt{2} \vee y = 5 - 2\sqrt{2}$$

Logo, os pontos de coordenadas $(1, 5 + 2\sqrt{2})$ e $(1, 5 - 2\sqrt{2})$ pertencem à circunferência.

c) Substituindo x e y pelas coordenadas de A no primeiro membro da equação da circunferência obtida na alínea a): $(2 + 1)^2 + (3 - 5)^2 = 3^2 + (-2)^2 = 9 + 4 = 13$

Ora, $13 > 12$, logo o ponto A encontra-se no exterior da circunferência.

Procedendo de forma análoga em relação a B , obtém-se:

$$(-1 + 1)^2 + (4 - 5)^2 = 0^2 + (-1)^2 = 0 + 1 = 1$$

Ora, $1 < 12$, logo o ponto B encontra-se no interior da circunferência.

d) Os pontos de interseção com o eixo Ox são da forma $(x, 0)$, onde x é um número real.

Assim, se $y = 0$:

$$(x + 1)^2 + (0 - 5)^2 = 12 \Leftrightarrow (x + 1)^2 + 25 = 12 \\ \Leftrightarrow (x + 1)^2 = -13, \text{ que é uma condição impossível em } \mathbb{R}.$$

Logo, a circunferência não intersesta o eixo das abcissas.

Os pontos de interseção com o eixo Oy são da forma $(0, y)$, onde y é um número real.

Assim, se $x = 0$:

$$(0 + 1)^2 + (y - 5)^2 = 12 \Leftrightarrow 1 + (y - 5)^2 = 12 \\ \Leftrightarrow (y - 5)^2 = 11 \\ \Leftrightarrow y - 5 = \sqrt{11} \vee y - 5 = -\sqrt{11} \\ \Leftrightarrow y = 5 + \sqrt{11} \vee y = 5 - \sqrt{11}$$

Logo, os pontos de coordenadas $(0, 5 + \sqrt{11})$ e $(0, 5 - \sqrt{11})$ são os pontos de interseção da circunferência com o eixo das ordenadas.

e) $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = (x + 1)^2 + (y - 4)^2$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 - 6y + 9 = x^2 + 2x + 1 + y^2 - 8y + 16$$

$$\Leftrightarrow 2y = 6x + 4$$

$\Leftrightarrow y = 3x + 2$ é uma equação da mediatriz de $[AB]$.

f) Substituindo, na equação obtida na alínea anterior, x e y pelas coordenadas do ponto, obtém-se $5 = 3 \times 1 + 2 \Leftrightarrow 5 = 3 + 2$, que é uma proposição verdadeira. Logo, o ponto de coordenadas $(1, 5)$ pertence à mediatriz de $[AB]$.

28.

a) $x^2 - 2x + y^2 + 8y = -8 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 + 8y + 16 = -8 + 1 + 16$
 $\Leftrightarrow (x - 1)^2 + (y + 4)^2 = 9$

A condição define a circunferência de centro $(1, -4)$ e raio 3.

b) $2x^2 - 2x + 2y^2 + 2y = 7 \Leftrightarrow x^2 - x + y^2 + y = \frac{7}{2} \Leftrightarrow x^2 - x + \frac{1}{4} + y^2 + y + \frac{1}{4} = \frac{7}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$
 $\Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = 4$

A condição define a circunferência de centro $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ e raio 2.

$$\text{c)} \quad x^2 + y^2 - \frac{2}{3}y \leq \frac{80}{9} \Leftrightarrow x^2 + y^2 - \frac{2}{3}y + \frac{1}{9} \leq \frac{80}{9} + \frac{1}{9} \Leftrightarrow x^2 + \left(y - \frac{1}{3}\right)^2 \leq 9$$

A condição define o círculo de centro $\left(0, \frac{1}{3}\right)$ e raio 3.

$$\text{d)} \quad x^2 + 12x + y^2 + 28 > 0 \Leftrightarrow x^2 + 12x + 36 + y^2 > -28 + 36 \Leftrightarrow (x + 6)^2 + y^2 > 8$$

A condição define o exterior da circunferência de centro $(-6, 0)$ e raio $2\sqrt{2}$.

$$\text{e)} \quad 25x^2 + 36y^2 = 900 \Leftrightarrow \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{25} = 1$$

A condição define a elipse de eixo maior 12 ($= 2 \times \sqrt{36}$), de eixo menor 10 ($= 2 \times \sqrt{25}$) e com focos de coordenadas $(-\sqrt{11}, 0)$ e $(\sqrt{11}, 0)$.

Cálculo auxiliar

$$c = \sqrt{36 - 25} = \sqrt{11}$$

$$\text{f)} \quad 4x^2 + 8y^2 = 32 \Leftrightarrow \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$$

A condição define a elipse de eixo maior $4\sqrt{2}$ ($= 2 \times \sqrt{8}$), de eixo menor 4 ($= 2 \times \sqrt{4}$) e com focos de coordenadas $(-2, 0)$ e $(2, 0)$.

Cálculo auxiliar

$$c = \sqrt{8 - 4} = \sqrt{4} = 2$$

29.

$$\text{a)} \quad 2c = 6 \Leftrightarrow c = 3$$

$$2a = 12 \Leftrightarrow a = 6$$

$$b = \sqrt{6^2 - 3^2} = \sqrt{36 - 9} = \sqrt{27}$$

Logo, uma equação da elipse é $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{27} = 1$.

$$\text{b)} \quad 2b = 10 \Leftrightarrow b = 5 \text{ (considerando uma elipse cujo eixo menor está contido no eixo } Oy\text{).}$$

Assim, uma equação da elipse é da forma $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{25} = 1$.

Substituindo x e y pelas coordenadas do ponto $(8, 3)$ que pertence à elipse:

$$\frac{8^2}{a^2} + \frac{3^2}{25} = 1 \Leftrightarrow \frac{64}{a^2} + \frac{9}{25} = 1 \Leftrightarrow 1600 + 9a^2 = 25a^2 \Leftrightarrow 16a^2 = 1600 \Leftrightarrow a^2 = 100$$

Logo, uma equação da elipse é $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{25} = 1$.

$$\text{c)} \quad c = 8, \text{ de acordo com as coordenadas dos focos.}$$

$$\frac{8}{a} = \frac{4}{5} \Leftrightarrow a = 10, \text{ logo } a^2 = 100.$$

$$b = \sqrt{100 - 64} = \sqrt{36} = 6, \text{ logo } b^2 = 36.$$

Assim, uma equação da elipse é $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1$.

- d) A equação da elipse é da forma $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Substituindo x e y pelas coordenadas de cada um dos pontos, obtém-se:

$$\begin{aligned} \begin{cases} \frac{(-1)^2}{a^2} + \frac{2^2}{b^2} = 1 \\ \frac{2^2}{a^2} + \frac{0^2}{b^2} = 1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{a^2} + \frac{4}{b^2} = 1 \\ \frac{4}{a^2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{4} + \frac{4}{b^2} = 1 \\ a^2 = 4 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{4}{b^2} = \frac{3}{4} \\ a^2 = 4 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} b^2 = \frac{16}{3} \\ a^2 = 4 \end{cases} \end{aligned}$$

Assim, uma equação da elipse é $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{\frac{16}{3}} = 1$.

29.

- a) O conjunto dos pontos do plano que distam igualmente de A e de B é a mediatriz de $[AB]$:

$$\begin{aligned} (x-2)^2 + (y+3)^2 &= (x+1)^2 + (y-1)^2 \\ \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 + 6y + 9 &= x^2 + 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 \\ \Leftrightarrow 8y &= 6x - 11 \\ \Leftrightarrow y &= \frac{3}{4}x - \frac{11}{8}, \text{ que é uma equação da mediatriz de } [AB]. \end{aligned}$$

- b) O conjunto dos pontos do plano cuja distância ao ponto $C(-3,0)$ é inferior a 5 é o interior do círculo de centro C e raio 5, que é definido pela equação $(x+3)^2 + y^2 < 25$.
- c) O conjunto dos pontos do plano cuja soma das medidas das distâncias aos pontos $A(-3, 0)$ e $B(3, 0)$ é igual a 9 é a elipse de focos A e B e eixo maior 9.

Como $2a = 9 \Leftrightarrow a = \frac{9}{2}$ então $a^2 = \frac{81}{4}$. Por outro lado, $b = \sqrt{\frac{81}{4} - 9} = \sqrt{\frac{45}{4}}$.

Logo, uma equação da elipse é $\frac{x^2}{\frac{81}{4}} + \frac{y^2}{\frac{45}{4}} = 1$.

- d) Seja P um ponto cuja distância ao ponto $A(1, 3)$ é metade da distância ao ponto $B(1, 6)$, então:

$$\begin{aligned} d(P, A) = \frac{1}{2} d(P, B) &\Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2 + (y-3)^2} = \frac{1}{2} \sqrt{(x-1)^2 + (y-6)^2} \\ \Leftrightarrow 2\sqrt{(x-1)^2 + (y-3)^2} &= \sqrt{(x-1)^2 + (y-6)^2} \\ \Leftrightarrow 4((x-1)^2 + (y-3)^2) &= (x-1)^2 + (y-6)^2 \\ \Leftrightarrow 4(x^2 - 2x + 1 + y^2 - 6y + 9) &= x^2 - 2x + 1 + y^2 - 12y + 36 \\ \Leftrightarrow 4x^2 - 8x + 4y^2 - 24y + 40 &= x^2 - 2x + y^2 - 12y + 37 \\ \Leftrightarrow 3x^2 + 3y^2 - 6x - 12y &= -3 \\ \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2x - 4y &= -1 \\ \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 &= -1 + 1 + 4 \\ \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-2)^2 &= 4 \end{aligned}$$

31. B é tal que $x^2 = 8y \Leftrightarrow y = \frac{x^2}{8}$. Logo, B é da forma $\left(x, \frac{x^2}{8}\right)$.

$$\begin{aligned} d(A, B) &= \sqrt{(0-x)^2 + \left(2-\frac{x^2}{8}\right)^2} = \sqrt{x^2 + \left(\frac{16-x^2}{8}\right)^2} \\ &= \sqrt{8y + \left(\frac{16-8y}{8}\right)^2} \\ &= \sqrt{8y + \frac{256-256y+64y^2}{8}} \\ &= \sqrt{8y + 4 - 4y + y^2} \\ &= \sqrt{y^2 + 4y + 4} \\ &= \sqrt{(y+2)^2} \\ &= y+2, \text{ como queríamos demonstrar.} \end{aligned}$$

32. Seja P um ponto cuja ordenada é igual ao dobro da abscissa, então as coordenadas de P são da forma $(x, 2x)$. Como P pertence à mediatriz de $[AB]$, então:

$$\begin{aligned} d(P, A) &= d(P, B) \Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2 + (2x-1)^2} = \sqrt{(x-3)^2 + (2x-3)^2} \\ &\Leftrightarrow (x-1)^2 + (2x-1)^2 = (x-3)^2 + (2x-3)^2 \\ &\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + 4x^2 - 4x + 1 = x^2 - 6x + 9 + 4x^2 - 12x + 9 \\ &\Leftrightarrow 12x = 16 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

Logo, $P\left(\frac{4}{3}, \frac{8}{3}\right)$.

33.

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad x^2 + y^2 + 10x - 4y + k &= 0 \Leftrightarrow x^2 + 10x + 25 + y^2 - 4y + 4 = -k + 25 + 4 \\ &\Leftrightarrow (x+5)^2 + (y-2)^2 = 29 - k \end{aligned}$$

Para que esta equação defina uma circunferência, $29 - k > 0 \Leftrightarrow k < 29$.

b) Recorrendo à equação obtida na alínea anterior, para que a equação defina um ponto $29 - k = 0 \Leftrightarrow k = 29$.

c) Recorrendo à equação obtida na alínea a), para que a equação defina o conjunto vazio $29 - k < 0 \Leftrightarrow k > 29$.

34.

a) O conjunto dos pontos do plano que distam igualmente da origem do referencial e de A é a mediatriz de $[OA]$:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= (x+3)^2 + (y+3)^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = x^2 + 6x + 9 + y^2 + 6y + 9 \\ &\Leftrightarrow -6y = 6x + 18 \\ &\Leftrightarrow y = -x - 3, \text{ que é uma equação dessa mediatriz.} \end{aligned}$$

A circunferência de centro A e tangente aos eixos coordenados tem raio 3 e é definida pela equação $(x+3)^2 + (y+3)^2 = 9$.

Logo, a condição pretendida é $y = -x - 3 \wedge (x+3)^2 + (y+3)^2 = 9$.

Intersectando a reta com a circunferência:

$$\begin{aligned} \begin{cases} y = -x - 3 \\ (x+3)^2 + (y+3)^2 = 9 \end{cases} &\Leftrightarrow \{(x+3)^2 + (-x-3+3)^2 = 9 \Leftrightarrow \{x^2 + 6x + 9 + x^2 = 9 \\ &\Leftrightarrow \{2x^2 + 6x = 0 \Leftrightarrow \{x(2x+6) = 0 \Leftrightarrow \{x = 0 \vee \{2x+6 = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 - 3 \\ x = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} y = -(-3) - 3 \\ x = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -3 \\ x = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} y = 0 \\ x = -3 \end{cases} \end{aligned}$$

Assim, outra concretização possível para definir o conjunto de pontos dado é:

$$(x = 0 \wedge y = -3) \vee (x = -3 \wedge y = 0)$$

- b)** O conjunto dos pontos médios dos segmentos de reta cujos extremos são a origem do referencial e cada um dos pontos da circunferência de centro O e raio 2 é uma circunferência, de centro O e raio 1, definida pela equação $x^2 + y^2 = 1$.
- c)** O conjunto dos pontos médios dos segmentos de reta cujos extremos são o ponto $B(1, 3)$ e cada um dos pontos da reta $x + y = 5$ é uma reta paralela a esta e que passa no ponto médio de $[BC]$, onde C é o ponto de interseção da reta $x + y = 5$ com o eixo Oy , ou seja, $C(0, 5)$.

Logo, o ponto médio de $[BC]$ tem coordenadas $\left(\frac{1+0}{2}, \frac{3+5}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, 4\right)$.

Assim, a reta pedida é da forma $y = -x + b$ e, como $\left(\frac{1}{2}, 4\right)$ pertence a esta reta, tem-se que

$$4 = -\frac{1}{2} + b \Leftrightarrow b = \frac{9}{2}.$$

Portanto, uma equação da reta pedida é $y = -x + \frac{9}{2}$.

Unidade 2 – Cálculo vetorial no plano

Páginas 190 a 229

26.

a) Por exemplo:

- i. $[A, B]$, $[B, A]$, $[B, C]$, $[C, B]$ e $[C, D]$
- ii. $[A, B]$ e $[D, C]$

b) Para cada aresta é possível definir dois segmentos de reta orientados. Além disso, é possível definir dois segmentos de reta orientados para cada uma das diagonais.

Logo, é possível definir $4 \times 2 + 2 \times 2 = 12$ segmentos de reta orientados.

c) É possível definir 8 vetores: cada diagonal permite definir 2 vetores ($2 \times 2 = 4$), a aresta $[AB]$ e a aresta $[AD]$ permitem definir 2 vetores cada uma ($2 \times 2 = 4$), as restantes arestas definem vetores iguais aos definidos pelas arestas $[AB]$ e $[AD]$.

27. Por exemplo:

- a)** $[A, D]$, $[D, B]$ e $[F, E]$
- b)** $[A, F]$ e $[C, F]$
- c)** \overrightarrow{BC} e \overrightarrow{DF}
- d)** \overrightarrow{AD} e \overrightarrow{DE}
- e)** \overrightarrow{AD} e \overrightarrow{EF}

28.

- a) $A + \overrightarrow{FE} = A + \overrightarrow{AD} = D$
 b) $D + \overrightarrow{BE} = D + \overrightarrow{DF} = F$
 c) $C + (-\overrightarrow{DF}) = C + \overrightarrow{FD} = C + \overrightarrow{CE} = E$
 d) $T_{\overrightarrow{AC}}(A) = A + \overrightarrow{AC} = C$
 e) $T_{\overrightarrow{DF}}(B) = B + \overrightarrow{DF} = B + \overrightarrow{BE} = E$

29.

- a) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AG}$
 b) $\overrightarrow{DH} + \overrightarrow{PN} = \overrightarrow{DH} + \overrightarrow{HF} = \overrightarrow{DF}$
 c) $\overrightarrow{JL} + \overrightarrow{HD} = \overrightarrow{JL} + \overrightarrow{LG} = \overrightarrow{JG}$
 d) $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{PO} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CB} = \vec{0}$
 e) $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BD}$
 f) $\overrightarrow{EN} + (-\overrightarrow{QP}) = \overrightarrow{EN} + \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{EN} + \overrightarrow{NO} = \overrightarrow{EO}$
 g) $\overrightarrow{HM} + (-\overrightarrow{OJ}) = \overrightarrow{HM} + \overrightarrow{JO} = \overrightarrow{HM} + \overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{HQ}$

30.

- a) $2\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{EG}$
 b) $-3\overrightarrow{LM} = 3\overrightarrow{ML} = \overrightarrow{MI}$
 c) $\frac{1}{2}\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AE}$
 d) $-\overrightarrow{EH} = \overrightarrow{HE}$

31. $\frac{\|\vec{a}\|}{\|\vec{b}\|} = \frac{1}{2}$. Como \vec{a} e \vec{b} têm sentidos opostos, então $\lambda = -\frac{1}{2}$.

32. $\vec{a} = \frac{1}{3}\vec{d}$ $\vec{b} = -2\vec{d}$ $\vec{c} = -\frac{5}{3}\vec{d}$

33.

- a) $2\vec{a} + \vec{b} = 2(2\vec{x} - \vec{y}) + (-3\vec{x} + 5\vec{y}) = 4\vec{x} - 2\vec{y} - 3\vec{x} + 5\vec{y} = \vec{x} + 3\vec{y}$
 b) $-2\vec{a} + 3\vec{b} = -2(2\vec{x} - \vec{y}) + 3(-3\vec{x} + 5\vec{y}) = -4\vec{x} + 2\vec{y} - 9\vec{x} + 15\vec{y} = -13\vec{x} + 17\vec{y}$

34.

- a) $\frac{1}{3}\overrightarrow{AP} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AP} = \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\right)\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AP}$
 b) $2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{EI} = 2(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{EI}) = 2(\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EI}) = 2\overrightarrow{DI} = \overrightarrow{DN} = \overrightarrow{AK}$
 c) $2\left(\frac{1}{4}\overrightarrow{PT}\right) = 2\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PR}$

35.

$$\begin{aligned} \text{a) } \sqrt{27}\vec{v} - \frac{1}{2}\vec{u} + 2(\sqrt{3}\vec{v}) + \frac{11}{2}\vec{u} &= -\frac{1}{2}\vec{u} + \frac{11}{2}\vec{u} + \sqrt{27}\vec{v} + 2\sqrt{3}\vec{v} \\ &= \frac{10}{2}\vec{u} + 3\sqrt{3}\vec{v} + 2\sqrt{3}\vec{v} \\ &= 5\vec{u} + 5\sqrt{3}\vec{v} \end{aligned}$$

$$\text{b)} \quad 3\left(2\vec{v} - \frac{8}{3}\vec{u}\right) + 2(4\vec{u}) - \vec{v} = 6\vec{v} - 8\vec{u} + 8\vec{u} - \vec{v} = 5\vec{v}$$

$$\begin{aligned} 36. \quad -2(-\vec{x} + \vec{a}) + 2(3\vec{a}) &= 3(\vec{a} + 2\vec{b}) \Leftrightarrow 2\vec{x} - 2\vec{a} + 6\vec{a} = 3\vec{a} + 6\vec{b} \Leftrightarrow 2\vec{x} = 3\vec{a} + 2\vec{a} - 6\vec{a} + 6\vec{b} \\ &\Leftrightarrow 2\vec{x} = -\vec{a} + 6\vec{b} \\ &\Leftrightarrow \vec{x} = -\frac{1}{2}\vec{a} + 3\vec{b} \end{aligned}$$

$$37. \quad \vec{a} = \vec{i} + \vec{j} \quad \vec{b} = -2\vec{i} + \vec{j} \quad \vec{c} = 2\vec{i} + 0\vec{j} \quad \vec{d} = 0\vec{i} - \vec{j}$$

$$\begin{aligned} 38. \quad \vec{a} &= 2\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2; \vec{a}(2, 2) \\ \vec{b} &= 2\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2; \vec{b}(2, -2) \\ \vec{c} &= 2\vec{e}_1 + 0\vec{e}_2; \vec{c}(2, 0) \\ \vec{d} &= -2\vec{e}_1 + 0\vec{e}_2; \vec{d}(-2, 0) \\ \vec{f} &= -3\vec{e}_1 - 3\vec{e}_2; \vec{f}(-3, -3) \\ \vec{g} &= 0\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2; \vec{g}(0, 4) \end{aligned}$$

39.

$$\text{a)} \quad \vec{a} + \vec{b} = (1, -3) + (-9, 4) = (1 - 9, -3 + 4) = (-8, 1)$$

$$\text{b)} \quad \vec{a} + \vec{b} = \left(-1, \frac{1}{2}\right) + \left(1, \frac{3}{2}\right) = \left(-1 + 1, \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\right) = \left(0, \frac{4}{2}\right) = (0, 2)$$

$$\text{c)} \quad \vec{a} + \vec{b} = (\sqrt{2}, 0) + (\sqrt{8}, -5) = (\sqrt{2} + \sqrt{8}, 0 - 5) = (\sqrt{2} + 2\sqrt{2}, -5) = (3\sqrt{2}, -5)$$

$$\begin{aligned} 40. \quad \vec{v} + \vec{w} = \vec{u} &\Leftrightarrow (2k + 1, 3) + (2, p) = (-3, 8) \Leftrightarrow (2k + 1 + 2, 3 + p) = (-3, 8) \\ &\Leftrightarrow (2k + 3, 3 + p) = (-3, 8) \\ &\Leftrightarrow 2k + 3 = -3 \wedge 3 + p = 8 \\ &\Leftrightarrow 2k = -6 \wedge p = 5 \\ &\Leftrightarrow k = -3 \wedge p = 5 \end{aligned}$$

$$41. \quad \vec{u}(2, -3) \quad \vec{v}(-1, 4) \quad \vec{w}\left(\frac{1}{3}, 0\right)$$

$$\text{a)} \quad \vec{u} + \vec{v} = (2, -3) + (-1, 4) = (2 - 1, -3 + 4) = (1, 1)$$

$$\text{b)} \quad \vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = (2, -3) + (-1, 4) + \left(\frac{1}{3}, 0\right) = (1, 1) + \left(\frac{1}{3}, 0\right) = \left(1 + \frac{1}{3}, 1 + 0\right) = \left(\frac{4}{3}, 1\right)$$

$$\text{c)} \quad \vec{u} - \vec{v} = (2, -3) - (-1, 4) = (2 + 1, -3 - 4) = (3, -7)$$

$$\text{d)} \quad \vec{v} - \vec{u} = (-1, 4) - (2, -3) = (-1 - 2, 4 + 3) = (-3, 7)$$

$$\text{e)} \quad 2\vec{u} + 4\vec{v} = 2(2, -3) + 4(-1, 4) = (4, -6) + (-4, 16) = (4 - 4, -6 + 16) = (0, 10)$$

$$\text{f)} \quad -3\vec{w} - \frac{1}{2}\vec{u} = -3\left(\frac{1}{3}, 0\right) - \frac{1}{2}(2, -3) = (-1, 0) + \left(-1, \frac{3}{2}\right) = \left(-1 - 1, 0 + \frac{3}{2}\right) = \left(-2, \frac{3}{2}\right)$$

$$\begin{aligned} \text{g)} \quad 3\left(-\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{w}\right) &= 3\left(-(2, -3) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}, 0\right)\right) = 3\left((-2, 3) + \left(\frac{1}{6}, 0\right)\right) = 3\left(-2 + \frac{1}{6}, 3 + 0\right) \\ &= 3\left(-\frac{11}{6}, 3\right) = \left(-\frac{33}{6}, 9\right) = \left(-\frac{11}{2}, 9\right) \end{aligned}$$

42.

$$\text{a)} \quad \text{Por exemplo, } (-4, 6), (2, -3), (-20, 30), \left(-1, \frac{3}{2}\right).$$

$$\text{b)} \quad \text{Por exemplo, } (0, 1), (0, -1), (0, 2), (0, 10).$$

43.

- a) $\vec{b} = 2\vec{a}$, logo os vetores \vec{a} e \vec{b} são colineares.
 b) $\vec{b} = -4\vec{a}$, logo os vetores \vec{a} e \vec{b} são colineares.
 c) $\frac{10}{-1} = -10$ e $\frac{18}{9} = 2$. Como $-10 \neq 2$, os vetores \vec{a} e \vec{b} não são colineares.
 d) $\frac{0}{2} = 0$ e $\frac{7}{14} = \frac{1}{2}$. Como $0 \neq \frac{1}{2}$, os vetores \vec{a} e \vec{b} não são colineares.
 e) $\vec{b} = -9\vec{a}$, logo os vetores \vec{a} e \vec{b} são colineares.
 f) $\vec{b} = 2\vec{a}$, logo os vetores \vec{a} e \vec{b} são colineares.

44. $\vec{u}(2, 4) \quad \vec{v}(3, 1 - k) \quad \vec{w}\left(k, -\frac{2}{3}\right)$

a) Para que \vec{u} e \vec{v} sejam colineares:

$$\frac{2}{3} = \frac{4}{1-k} \Leftrightarrow 2(1-k) = 12 \Leftrightarrow 2 - 2k = 12 \Leftrightarrow 2k = -10 \Leftrightarrow k = -5$$

b) Para que \vec{v} e \vec{w} sejam colineares:

$$\frac{3}{k} = \frac{1-k}{-\frac{2}{3}} \Leftrightarrow 3 \times \left(-\frac{2}{3}\right) = k(1-k) \Leftrightarrow -2 = k - k^2 \Leftrightarrow k^2 - k - 2 = 0 \Leftrightarrow k = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2}$$

$$\Leftrightarrow k = 2 \vee k = -1$$

45. $A(-1, 2) \quad B(2, -3) \quad C(0, 5)$

a) $\overrightarrow{AB} = B - A = (2, -3) - (-1, 2) = (2 + 1, -3 - 2) = (3, -5)$

$$\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB} = -(3, -5) = (-3, 5)$$

$$\overrightarrow{BC} = C - B = (0, 5) - (2, -3) = (0 - 2, 5 + 3) = (-2, 8)$$

b) $\overrightarrow{AC} = C - A = (0, 5) - (-1, 2) = (0 + 1, 5 - 2) = (1, 3)$

$$\text{Logo, } D = B + \overrightarrow{AC} = (2, -3) + (1, 3) = (2 + 1, -3 + 3) = (3, 0)$$

$$\overrightarrow{CB} = -\overrightarrow{BC} = -(-2, 8) = (2, -8)$$

$$\text{Logo, } E = B - 2\overrightarrow{CB} = (2, -3) - 2(2, -8) = (2, -3) - (4, -16) = (2 - 4, -3 + 16) = (-2, 13)$$

c) $\overrightarrow{AF} = (1, 7) \Leftrightarrow F - A = (1, 7) \Leftrightarrow F - (-1, 2) = (1, 7) \Leftrightarrow F = (-1, 2) + (1, 7)$

$$\Leftrightarrow F = (-1 + 1, 2 + 7)$$

$$\Leftrightarrow F = (0, 9)$$

46. $\vec{u}(-2, 4) \quad \vec{v}(1, -5) \quad A(1, 3) \quad B(2, -7)$

a) $\|\vec{u}\| = \|(-2, 4)\| = \sqrt{(-2)^2 + 4^2} = \sqrt{4 + 16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

b) $\|\vec{v}\| = \|(1, -5)\| = \sqrt{1^2 + (-5)^2} = \sqrt{1 + 25} = \sqrt{26}$

c) $\overrightarrow{AB} = B - A = (2, -7) - (1, 3) = (2 - 1, -7 - 3) = (1, -10)$

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \|(1, -10)\| = \sqrt{1^2 + (-10)^2} = \sqrt{1 + 100} = \sqrt{101}$$

d) $\|\vec{u}\| + \|\vec{v}\| = 2\sqrt{5} + \sqrt{26}$

e) $\|\vec{u} + \vec{v}\| = \|(-2, 4) + (1, -5)\| = \|(-2 + 1, 4 - 5)\| = \|(-1, -1)\| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$

47. Seja $\vec{u} = (a, b)$. Para que \vec{u} e \vec{v} sejam colineares, tem-se que $\vec{u} = k\vec{v}$, ou seja:

$$(a, b) = k(-2, 1) \Leftrightarrow (a, b) = (-2k, k)$$

Então, $\vec{u} = (-2k, k)$. Por outro lado:

$$\|\vec{u}\| = 10 \Leftrightarrow \sqrt{(-2k)^2 + k^2} = 10 \Leftrightarrow (-2k)^2 + k^2 = 100 \Leftrightarrow 4k^2 + k^2 = 100$$

$$\Leftrightarrow 5k^2 = 100$$

$$\Leftrightarrow k^2 = 20$$

$$\Leftrightarrow k = \sqrt{20} \vee k = -\sqrt{20}$$

$$\Leftrightarrow k = 2\sqrt{5} \vee k = -2\sqrt{5}$$

Logo, $\vec{u} = (-4\sqrt{5}, 2\sqrt{5})$ ou $\vec{u} = (4\sqrt{5}, -2\sqrt{5})$.

48. A reta r contém os pontos de coordenadas $(0, 0)$ e $(-3, -3)$.

Como $(-3, -3) - (0, 0) = (-3, -3)$, então qualquer vetor diretor da reta r será colinear com $(-3, -3)$, por exemplo $\vec{r}(1, 1)$.

A reta s contém os pontos de coordenadas $(-3, 2)$ e $(4, -1)$.

Como $(-3, 2) - (4, -1) = (-7, 3)$, então este é um vetor diretor da reta s . A reta t é uma reta vertical, logo um seu vetor diretor é $(0, 1)$. A reta p é uma reta horizontal, logo um seu vetor diretor é $(1, 0)$.

49.

a) Uma equação vetorial da reta que passa no ponto $(10, 1)$ e tem a direção do vetor $(-2, 1)$ é:

$$(x, y) = (10, 1) + k(-2, 1), k \in \mathbb{R}$$

b) Uma equação vetorial da reta paralela ao eixo das abscissas e que contém o ponto $(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ é:

$$(x, y) = (\sqrt{2}, \sqrt{3}) + k(1, 0), k \in \mathbb{R}$$

c) Uma equação vetorial da reta paralela ao eixo das ordenadas e que contém o ponto $(3, -\frac{1}{2})$ é:

$$(x, y) = \left(3, -\frac{1}{2}\right) + k(0, 1), k \in \mathbb{R}$$

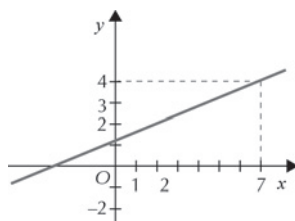
d) $\vec{AB} = B - A = (3, -5) - (1, 8) = (3 - 1, -5 - 8) = (2, -13)$

Assim, uma equação vetorial da reta que contém os pontos A e B é:

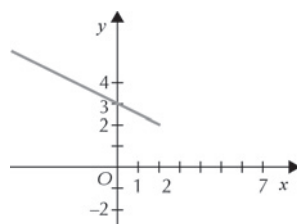
$$(x, y) = (3, -5) + k(2, -13), k \in \mathbb{R}$$

50.

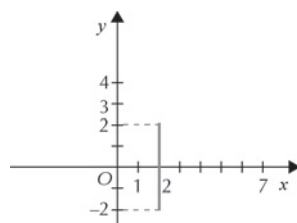
a) $(x, y) = (2, 2) + k(5, 2), k \in \mathbb{R}$



b) $(x, y) = (2, 2) + k(-2, 1), k \in [0, +\infty[$



c) $(x, y) = (2, 2) + k(0, -4), k \in [0, 1]$



51. $(x, y) = (1, -4) + k(-2, 1), k \in \mathbb{R}$

a) $(1, -4)$ é um ponto da reta.

Se $k = 1$, obtém-se $(x, y) = (1, -4) + (-2, 1) = (-1, -3)$, que é um ponto da reta.

Se $k = -1$, obtém-se $(x, y) = (1, -4) - (-2, 1) = (3, -5)$, que é um ponto da reta.

$(-1, -3)$ é um ponto da reta.

Se $k = 1$, obtém-se $(x, y) = (-1, -3) + (-2, 1) = (-3, -2)$, que é um ponto da reta.

Se $k = -1$, obtém-se $(x, y) = (-1, -3) - (-2, 1) = (1, -4)$, que é um ponto da reta.

$(3, -5)$ é um ponto da reta.

Se $k = 1$, obtém-se $(x, y) = (3, -5) + (-2, 1) = (1, -4)$, que é um ponto da reta.

Se $k = -1$, obtém-se $(x, y) = (3, -5) - (-2, 1) = (5, -6)$, que é um ponto da reta.

b) $(2, 5)$ pertence à reta se existir um valor de k tal que:

$$(2, 5) = (1, -4) + k(-2, 1) \Leftrightarrow (2, 5) = (1, -4) + (-2k, k)$$

$$\Leftrightarrow (2, 5) = (1 - 2k, -4 + k)$$

$$\Leftrightarrow 1 - 2k = 2 \wedge -4 + k = 5$$

$$\Leftrightarrow k = -\frac{1}{2} \wedge k = 9$$

Logo, o ponto não pertence à reta.

c) Procuramos o ponto $(-2, y)$ da reta:

$$(-2, y) = (1, -4) + k(-2, 1) \Leftrightarrow (-2, y) = (1, -4) + (-2k, k) \Leftrightarrow (-2, y) = (1 - 2k, -4 + k)$$

$$\Leftrightarrow 1 - 2k = -2 \wedge -4 + k = y$$

$$\Leftrightarrow k = \frac{3}{2} \wedge y = -4 + \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow k = \frac{3}{2} \wedge y = -\frac{5}{2}$$

Logo, o ponto da reta que tem abscissa -2 é $\left(-2, -\frac{5}{2}\right)$.

d) Procuramos o ponto $(p - 1, 2)$ da reta:

$$\begin{aligned}(p - 1, 2) &= (1, -4) + k(-2, 1) \Leftrightarrow (p - 1, 2) = (1, -4) + (-2k, k) \\&\Leftrightarrow (p - 1, 2) = (1 - 2k, -4 + k) \\&\Leftrightarrow 1 - 2k = p - 1 \wedge -4 + k = 2 \\&\Leftrightarrow p = 2 - 2k \wedge k = 6 \\&\Leftrightarrow p = -10 \wedge k = 6\end{aligned}$$

Logo, o ponto $(p - 1, 2)$ pertence à reta se $p = -10$.

e) Um vetor diretor da reta é $(-2, 1)$. Qualquer outro vetor diretor da reta será colinear com este.

Verifiquemos então se $(1, -\frac{1}{2})$ é colinear com $(-2, 1)$.

$\frac{-2}{1} = -2$ e $\frac{1}{-\frac{1}{2}} = -2$, logo os vetores são colineares e, portanto, $(1, -\frac{1}{2})$ é um vetor diretor da reta.

52. $A(2, -4)$ $B(-1, 3)$

a) $\overrightarrow{AB} = B - A = (-1, 3) - (2, -4) = (-1 - 2, 3 + 4) = (-3, 7)$

Assim, as equações paramétricas da reta AB são $\begin{cases} x = 2 - 3k \\ y = -4 + 7k \end{cases}, k \in \mathbb{R}$.

b) Se $y = 0$, então $-4 + 7k = 0 \Leftrightarrow k = \frac{4}{7}$. E, portanto, $x = 2 - 3 \times \frac{4}{7} = \frac{2}{7}$. Assim, o ponto de interseção da reta com o eixo Ox é $(\frac{2}{7}, 0)$.

Se $x = 0$, então $2 - 3k = 0 \Leftrightarrow k = \frac{2}{3}$.

E, portanto, $y = -4 + 7 \times \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$. Assim, o ponto de interseção da reta com o eixo Oy é $(0, \frac{2}{3})$.

53.

a) Simplificando a equação dada obtém-se $\begin{cases} x = 1 + 3\lambda \\ y = -1 + \lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$.

Logo, $(1, -1)$ é um ponto da reta r e $(3, 1)$ é um vetor diretor desta reta.

Se $\lambda = 1$, por exemplo, obtém-se $x = 1 + 3 \times 1 = 4$ e $y = -1 + 1 = 0$. Logo, $(4, 0)$ é também um ponto da reta r .

b) $\begin{cases} x = 3\lambda \\ y = \lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$ é um sistema de equações paramétricas da reta paralela a r e que contém a origem do referencial.

54. $r: (x, y) = (-1, 4) + k(2, 5), k \in \mathbb{R}$ é uma equação vetorial da reta que contém o ponto de coordenadas $(-1, 4)$ e tem a direção do vetor $(2, 5)$. Esta equação é equivalente a:

$$\begin{aligned}(x, y) &= (-1, 4) + (2k, 5k), k \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (x, y) = (2k - 1, 5k + 4), k \in \mathbb{R} \\&\Leftrightarrow x = 2k - 1 \wedge y = 4 + 5k, k \in \mathbb{R} \\&\Leftrightarrow k = \frac{x+1}{2} \wedge k = \frac{y-4}{5} \\&\Leftrightarrow \frac{x+1}{2} = \frac{y-4}{5} \text{ que é uma equação cartesiana da reta } r.\end{aligned}$$

Por sua vez, esta equação é equivalente a:

$$5x + 5 = 2y - 8 \Leftrightarrow 2y = 5x + 13 \Leftrightarrow y = \frac{5}{2}x + \frac{13}{2}, \text{ que é a equação reduzida da reta } r.$$

55. Os pontos (2, 2) e (7, 4) pertencem à reta a . Logo $m_a = \frac{2-4}{2-7} = \frac{2}{5}$.

Os pontos (0, 3) e (2, 2) pertencem à reta b . Logo $m_b = \frac{3-2}{0-2} = -\frac{1}{2}$.

A reta c é uma reta horizontal. Logo $m_c = 0$.

56.

a) $y = \frac{2}{7}x - \sqrt{2}$

O declive da reta é $\frac{2}{7}$ e, então, um vetor diretor da reta é (7, 2).

b) $y = -x$

O declive da reta é -1 e, então, um vetor diretor da reta é $(-1, 1)$.

c) $y = 9$

O declive da reta é 0 e, então, um vetor diretor da reta é (1, 0).

d) $6x + 3y + 1 = 0 \Leftrightarrow y = -2x - \frac{1}{3}$

O declive da reta é -2 e, então, um vetor diretor da reta é (1, -2).

57.

a) $(x, y) = (0, 9) + k(2, 3), k \in \mathbb{R}$

Como (2, 3) é um vetor diretor da reta, então o seu declive é $\frac{3}{2}$. Como (0, 9) é um ponto da

reta, então a sua ordenada na origem é 9. Assim, a equação reduzida desta reta é $y = \frac{3}{2}x + 9$.

b) $(x, y) = (-1, 5) + k(-1, 3), k \in \mathbb{R}$

Como $(-1, 3)$ é um vetor diretor da reta, então o seu declive é $\frac{3}{-1} = -3$. Logo, a equação

reduzida desta reta é da forma $y = -3x + b$. Uma vez que $(-1, 5)$ é um ponto da reta, então $5 = -3 \times (-1) + b \Leftrightarrow b = 2$. Assim, a equação reduzida desta reta é $y = -3x + 2$.

c) $(x, y) = (-1, \sqrt{3}) + k(8, 0), k \in \mathbb{R}$

Como (8, 0) é um vetor diretor da reta, trata-se de uma reta horizontal. Uma vez que $(-1, \sqrt{3})$ é um ponto da reta, então a sua equação reduzida é $y = \sqrt{3}$.

58.

a) $y = \frac{1}{5}x - 2$

O declive da reta é $\frac{1}{5}$, logo um vetor diretor da reta é (5, 1). Como a ordenada na origem é -2 ,

tem-se que (0, -2) é um ponto da reta. Assim, uma equação vetorial da reta é:

$$(x, y) = (0, -2) + k(5, 1), k \in \mathbb{R}$$

b) $y = 5x$

- c)** O declive da reta é 5, logo um vetor diretor da reta é (1, 5). Como a ordenada na origem é 0, tem-se que (0, 0) é um ponto da reta. Assim, uma equação vetorial da reta é:

$$(x, y) = (0, 0) + k(1, 5), k \in \mathbb{R}$$

d) $y = 5$

Trata-se de uma reta horizontal, logo um vetor diretor da reta é (1, 0). O ponto (0, 5) é um ponto da reta. Assim, uma equação vetorial da reta é $(x, y) = (0, 5) + k(1, 0), k \in \mathbb{R}$.

59.

- a)** $y = -2x + 8$ é uma equação reduzida da reta que tem declive -2 e passa no ponto de coordenadas (0, 8).

- b)** Como um vetor diretor da reta é (2, 5), então o seu declive é $\frac{5}{2}$. Logo, a equação reduzida da

reta é, então, da forma $y = \frac{5}{2}x + b$. Como o ponto (1, 3) pertence à reta, então $3 = \frac{5}{2} \times 1 +$

$$b \Leftrightarrow b = \frac{1}{2}. \text{ A equação reduzida da reta é, então, } y = \frac{5}{2}x + \frac{1}{2}$$

- c)** O declive da reta é $\frac{5-0}{2-\frac{1}{2}} = \frac{10}{3}$. Logo, a equação reduzida da reta é da forma $y = \frac{10}{3}x + b$.

$$\text{Como o ponto (2, 5) pertence à reta, então } 5 = \frac{10}{3} \times 2 + b \Leftrightarrow b = -\frac{5}{3}$$

$$\text{A equação reduzida da reta é } y = \frac{10}{3}x - \frac{5}{3}$$

- d)** $-4x + y - 5 = 0 \Leftrightarrow y = 4x + 5$

Logo, o declive da reta é 4. A equação reduzida da reta é, então, da forma $y = 4x + b$.

Como o ponto $(-3, 0)$ pertence à reta, então $0 = 4 \times (-3) + b \Leftrightarrow b = 12$.

A equação reduzida da reta é $y = 4x + 12$.

60.

- a)** $(x, y) = (1, -9) + k(3, 1), k \in \mathbb{R}$

Como (3, 1) é um vetor diretor da reta, então o seu declive é $\frac{1}{3}$. Como (0, 1) é um ponto da

reta, então a sua ordenada na origem é 1. Assim, a equação reduzida da reta é $y = \frac{1}{3}x + 1$.

- b)** $\begin{cases} x = 2 + k \\ y = -1 + 6k \end{cases}, k \in \mathbb{R}$

Como (1, 6) é um vetor diretor da reta, então o seu declive é 6. Como (0, 1) é um ponto da reta, então a sua ordenada na origem é 1. Assim, a equação reduzida da reta é $y = 6x + 1$.

- c)** $\frac{x+1}{2} = -\frac{y}{3}$

Como (2, -3) é um vetor diretor da reta, então o seu declive é $-\frac{3}{2}$. Como (0, 1) é um ponto da reta, então a sua ordenada na origem é 1.

$$\text{Assim, a equação reduzida da reta é } y = -\frac{3}{2}x + 1.$$

d) $y = \pi$

Trata-se de uma reta horizontal, portanto o seu declive é 0. Como $(0, 1)$ é um ponto da reta, então a sua ordenada na origem é 1. Assim, a equação reduzida da reta é $y = 1$.

Aprende Fazendo

Páginas 230 a 237

1. Relativamente à opção (A), $\overrightarrow{AC} \neq \overrightarrow{BD}$ porque não têm a mesma direção. Quanto à opção (B), $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} \neq \overrightarrow{BD}$. Em relação à opção (C), $\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CA} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA}$. Na opção (D), $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{AD} \neq \vec{0}$.

Opção (C)

2. Na opção (A), $\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{LG} = \overrightarrow{LG} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{LC} \neq \vec{0}$. Quanto à opção (B), $\|\vec{IJ} + 2\vec{JF}\| = \|\vec{IJ} + \vec{JB}\| = \|\vec{IB}\| = \|\vec{LD}\|$. Na opção (C), $\vec{F} + \vec{JH} = \vec{F} + \vec{FD} = \vec{D} \neq \vec{FD}$. Relativamente à opção (D), $\|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB}\| = \|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA}\| = 0 \neq \|\overrightarrow{GE}\|$.

Opção (B)

3. $A(-1, 2) \quad B(3, 0) \quad C(1, -5)$
 $d(A, B) = \sqrt{(-1 - 3)^2 + (2 - 0)^2} = \sqrt{(-4)^2 + 2^2} = \sqrt{16 + 4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$
 $d(A, C) = \sqrt{(-1 - 1)^2 + (2 - (-5))^2} = \sqrt{(-2)^2 + 7^2} = \sqrt{4 + 49} = \sqrt{53}$
 $d(B, C) = \sqrt{(3 - 1)^2 + (0 - (-5))^2} = \sqrt{2^2 + 5^2} = \sqrt{4 + 25} = \sqrt{29}$

Logo, A , B e C não são vértices de um triângulo equilátero nem de um triângulo isósceles porque $d(A, B) \neq d(A, C) \neq d(B, C)$.

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (3, 0) - (-1, 2) = (4, -2)$$

$$\overrightarrow{CB} = B - C = (3, 0) - (1, -5) = (2, 5)$$

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB} = (4, -2) + (2, 5) = (6, 3)$$

$$\|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB}\| = \|(6, 3)\| = \sqrt{6^2 + 3^2} = \sqrt{36 + 9} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$$

Opção (C)

4. $(x, y) = (1, 0) + k(-1, 2), k \in \mathbb{R}$

Como um vetor diretor da reta é $(-1, 2)$, então o seu declive é $\frac{2}{-1} = -2$, o que significa que a reta é paralela à reta de equação $y = -2x$.

Opção (D)

5. Os pontos $(2, 0)$ e $(0, 8)$ pertencem à reta s . Logo, a ordenada na origem desta reta é 8 e o seu declive é $\frac{0-8}{2-0} = -4$. Assim, a equação reduzida da reta s é $y = -4x + 8$.

Opção (B)

6. $\overrightarrow{AE} = -2\overrightarrow{MG}$, logo os vetores \overrightarrow{AE} e \overrightarrow{MG} não são simétricos, porque não têm o mesmo comprimento, e a afirmação (I) é falsa.

$$\overrightarrow{ML} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}, \text{ logo a afirmação (II) é verdadeira.}$$

Opção (D)

7. Para que \vec{u} e \vec{v} sejam colineares: $\frac{-3}{2p+3} = \frac{-2}{-1} \Leftrightarrow 3 = -4p - 6 \Leftrightarrow 4p = -9 \Leftrightarrow p = -\frac{9}{4}$

Opção (D)

8. Substituindo x e y pelas coordenadas de P na equação da reta:

$$k^2 = -5k - 6 \Leftrightarrow k^2 + 5k + 6 = 0 \Leftrightarrow k = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} \\ \Leftrightarrow k = -2 \vee k = -3$$

Opção (A)

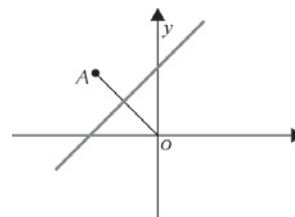
9. $ax - y - 2 = 0 \Leftrightarrow y = ax - 2$

$$\begin{cases} x = 1 + 2k \\ y = 5 - 3k \end{cases}, k \in \mathbb{R}, \text{ logo } (2, -3) \text{ é um vetor diretor desta reta e, portanto, o seu declive é } -\frac{3}{2}.$$

Para que as retas sejam paralelas, tem-se então que $a = -\frac{3}{2}$

Opção (B)

10. Observe-se a figura, que representa a situação descrita no enunciado. Como se pode observar, a mediatriz de $[OA]$ tem declive positivo e a ordenada na origem também é positiva.



Opção (A)

11. O raio da circunferência é $\frac{3}{2}$, porque é metade da distância entre o eixo Oy e a reta de equação $x = 3$, que são tangentes à circunferência. O centro da circunferência é o ponto de coordenadas $\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}, 2\right)$.

Assim, uma equação da circunferência é $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + (y - 2)^2 = \frac{9}{4}$. A reta representada na

figura tem a direção do vetor $\overrightarrow{OC} \left(\frac{3}{2}, 2\right)$, logo o seu declive é $\frac{2}{\frac{3}{2}} = \frac{4}{3}$. Além disso, esta reta

contém a origem do referencial. Assim, uma equação da reta é $y = \frac{4}{3}x$. Uma condição que

define o conjunto de pontos a sombreado é, então, $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + (y - 2)^2 \leq \frac{9}{4} \wedge y \geq \frac{4}{3}x$.

Opção (B)

$$12. A_{[OAB]} = 4 \Leftrightarrow \frac{\overline{AO} \times \overline{OB}}{2} = 4 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2} \times \overline{OB}}{2} = 4 \Leftrightarrow \overline{OB} = \frac{8}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \overline{OB} = 4\sqrt{2}$$

Tem-se então que $A(-\sqrt{2}, 0)$ e $B(0, -4\sqrt{2})$. Logo, a ordenada na origem da reta AB é $-4\sqrt{2}$

e o seu declive é $\frac{0+4\sqrt{2}}{-\sqrt{2}-0} = -4$. A equação reduzida da reta AB é $y = -4x - 4\sqrt{2}$.

Opção (B)

13. Substituindo y por $2x + b$ na equação da elipse:

$$\frac{x^2}{16} + \frac{(2x+b)^2}{4} = 1 \Leftrightarrow x^2 + 4(2x+b)^2 = 16 \Leftrightarrow x^2 + 4(4x^2 + 4bx + b^2) = 16$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 16x^2 + 16bx + 4b^2 - 16 = 0 \Leftrightarrow 17x^2 + 16bx + 4b^2 - 16 = 0$$

Para que exista apenas um ponto de interseção entre a reta e a elipse, esta equação terá de ter apenas uma solução, pelo que o valor do seu binómio discriminante terá de ser nulo.

$$\text{Assim: } (16b)^2 - 4 \times 17 \times (4b^2 - 16) = 0 \Leftrightarrow 16 \times 16b^2 - 16 \times 17b^2 + 16 \times 4 \times 17 = 0$$

$$\Leftrightarrow 16b^2 - 17b^2 + 4 \times 17 = 0$$

$$\Leftrightarrow -b^2 + 4 \times 17 = 0$$

$$\Leftrightarrow b^2 = 4 \times 17$$

$$\Leftrightarrow b = 2\sqrt{17} \vee b = -2\sqrt{17}$$

Opção (A)

14.

a) $\overrightarrow{NH} + \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{NH} + \overrightarrow{HQ} = \overrightarrow{NQ}$

b) $3\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{ID} = \overrightarrow{AR} + \overrightarrow{RM} = \overrightarrow{AM}$

c) $2\overrightarrow{QH} - \overrightarrow{IE} = \overrightarrow{SF} + \overrightarrow{FH} = \overrightarrow{SH}$

d) $(B - N) + (C - K) = \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{KC} = \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{NB} = \overrightarrow{AB}$

e) $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{SN} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MA} = \vec{0}$

f) $\frac{1}{3}\overrightarrow{RO} - \overrightarrow{IF} = \overrightarrow{RQ} + \overrightarrow{QT} = \overrightarrow{RT}$

g) $L + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = L + \overrightarrow{LT} = T$

h) $D + \overrightarrow{PS} = D + \overrightarrow{DI} = I$

i) $H - \overrightarrow{CP} = H + \overrightarrow{HL} = L$

j) $E + \overrightarrow{TC} + \overrightarrow{EN} = E + \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DM} = D + \overrightarrow{DM} = M$

15. $\vec{a} = -2\vec{x} + \vec{y} \quad \vec{b} = 4\vec{x} - 3\vec{y}$

a) $2(\vec{a} + \vec{b}) = 2(-2\vec{x} + \vec{y} + 4\vec{x} - 3\vec{y}) = 2(2\vec{x} - 2\vec{y}) = 4\vec{x} - 4\vec{y}$

b) $-3\vec{a} - \vec{b} = -3(-2\vec{x} + \vec{y}) - (4\vec{x} - 3\vec{y}) = 6\vec{x} - 3\vec{y} - 4\vec{x} + 3\vec{y} = 2\vec{x}$

c) $\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b} = \frac{1}{2}(-2\vec{x} + \vec{y}) - \frac{1}{3}(4\vec{x} - 3\vec{y}) = -\vec{x} + \frac{1}{2}\vec{y} - \frac{4}{3}\vec{x} + \vec{y} = -\frac{7}{3}\vec{x} + \frac{3}{2}\vec{y}$

16. $\vec{a}(-1, 3) \quad \vec{b}(5, 2)$

a) $\vec{c} = 2\vec{a} + 2\vec{b} = 2(-1, 3) + 2(5, 2) = (-2, 6) + (10, 4) = (8, 10)$

b) $\vec{d} = \frac{1}{5}\vec{b} - \vec{a} = \frac{1}{5}(5, 2) - (-1, 3) = \left(1, \frac{2}{5}\right) - (-1, 3) = \left(2, -\frac{13}{5}\right)$

$$\begin{aligned} \text{c) } \frac{1}{3} \vec{a} = 2\vec{e} - \vec{b} &\Leftrightarrow 2\vec{e} = \frac{1}{3} \vec{a} + \vec{b} \Leftrightarrow \vec{e} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} \vec{a} + \vec{b} \right) \Leftrightarrow \vec{e} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3}(-1, 3) + (5, 2) \right) \\ &\Leftrightarrow \vec{e} = \frac{1}{2} \left(\left(-\frac{1}{3}, 1\right) + (5, 2) \right) \Leftrightarrow \vec{e} = \frac{1}{2} \left(\left(-\frac{1}{3}, 1\right) + (5, 2) \right) \Leftrightarrow \vec{e} = \frac{1}{2} \left(\frac{14}{3}, 3 \right) \Leftrightarrow \vec{e} = \left(\frac{7}{3}, \frac{3}{2} \right) \end{aligned}$$

17.

a) Uma equação vetorial da reta que passa no ponto $A(-1, \pi)$ e tem a direção do vetor $\vec{u}(-8, 3)$ é $(x, y) = (-1, \pi) + k(-8, 3), k \in \mathbb{R}$.

b) $\overrightarrow{DE} = E - D = (\sqrt{8}, -4) - (\sqrt{2}, 1) = (2\sqrt{2}, -4) - (\sqrt{2}, 1) = (\sqrt{2}, -5)$

Uma equação vetorial da reta DE é $(x, y) = (\sqrt{2}, 1) + k(\sqrt{2}, -5), k \in \mathbb{R}$.

c) Um vetor diretor da reta é $(1, 0)$, porque se trata de uma reta paralela ao eixo das abscissas.

Uma equação vetorial da reta paralela ao eixo das abscissas e que contém o ponto $\left(7, -\frac{1}{2}\right)$ é

$$(x, y) = \left(7, -\frac{1}{2}\right) + k(1, 0), k \in \mathbb{R}.$$

d) Um vetor diretor da reta é $(0, 1)$, porque se trata de uma reta paralela ao eixo das ordenadas.

Uma equação vetorial da reta paralela ao eixo das ordenadas e que contém o ponto $(9, \sqrt{3})$ é

$$(x, y) = (9, \sqrt{3}) + k(0, 1) \in \mathbb{R}.$$

18. $P(2, 1) \quad Q(5, -7)$

a) $\overrightarrow{PQ} = Q - P = (5, -7) - (2, 1) = (3, -8)$

Uma equação vetorial da reta PQ é $(x, y) = (2, 1) + k(3, -8), k \in \mathbb{R}$.

b) Uma equação vetorial do segmento de reta $[PQ]$ é $(x, y) = (2, 1) + k(3, -8), k \in [0, 1]$.

c) Uma equação vetorial da semirreta \vec{PQ} é $(x, y) = (2, 1) + k(3, -8), k \in [0, +\infty[$.

d) Uma equação vetorial da semirreta \vec{QP} é $(x, y) = (5, -7) + k(-3, 8), k \in [0, +\infty[$.

19. r é uma reta horizontal, logo $r: y = 2$. (v)

u é uma reta com declive negativo, logo $u: y = -x + 3$. (iii)

t é uma reta com ordenada na origem positiva, logo $t: y = x + 3$. (ii)

v e s são ambas retas com declive positivo e têm a mesma ordenada na origem. No entanto, o declive de v é maior que o declive de s , logo $v: y = 2x - 2$ (i) e $s: y = x - 2$. (iv)

20.

a) A equação reduzida da reta com declive -3 e que interseca o eixo Oy no ponto de ordenada 2 é $y = -3x + 2$.

b) Como a reta tem a direção do vetor $\vec{u}(5, 1)$, o seu declive é $\frac{1}{5}$. Assim, a equação reduzida da

reta é da forma $y = \frac{1}{5}x + b$. Como $A(-1, 2)$ pertence à reta, tem-se que:

$$2 = \frac{1}{5} \times (-1) + b \Leftrightarrow b = \frac{11}{5}.$$

Logo, a equação reduzida da reta é $y = \frac{1}{5}x + \frac{11}{5}$.

c) $\overrightarrow{DE} = E - D = \left(\frac{3}{2}, -6\right) - \left(\frac{1}{2}, 1\right) = (1, -7)$

Logo, o declive da reta é -7 e a sua equação reduzida é da forma $y = -7x + b$. Como

$D\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ pertence à reta, tem-se que $1 = -7 \times \frac{1}{2} + b \Leftrightarrow b = \frac{9}{2}$. Logo, a equação reduzida da

reta é $y = -7x + \frac{9}{2}$.

d) Um vetor diretor da reta é $(2, 3)$, pelo que o seu declive é $\frac{3}{2}$ e a sua equação reduzida é da

forma $y = \frac{3}{2}x + b$. Como o ponto $(1, -4)$ pertence à reta, tem-se que:

$$-4 = \frac{3}{2} \times 1 + b \Leftrightarrow b = -\frac{11}{2}. \text{ Logo, a equação reduzida da reta é } y = \frac{3}{2}x - \frac{11}{2}.$$

e) Trata-se de uma reta horizontal que passa no ponto $(7, \sqrt{2})$, logo a sua equação reduzida é $y = \sqrt{2}$.

f) $-7x + 2y + \frac{1}{3} = 0 \Leftrightarrow y = \frac{7}{2}x - \frac{1}{6}$

Assim, o declive da reta é $\frac{7}{2}$ e, como o ponto $(0, 0)$ pertence à reta, a sua equação reduzida

é $y = \frac{7}{2}x$.

21.

a) $(2, 3)$ é um ponto pertencente à reta r . Se, por exemplo, $x = 1$, então:

$$\begin{aligned} (1, y) = (2, 3) + k(-1, 2) &\Leftrightarrow (1, y) = (2, 3) + (-k, 2k) \Leftrightarrow (1, y) = (2 - k, 3 + 2k) \\ &\Leftrightarrow 2 - k = 1 \wedge 3 + 2k = y \\ &\Leftrightarrow k = 1 \wedge y = 5 \end{aligned}$$

Logo, o ponto $(1, 5)$ também pertence à reta r .

O ponto $(1, \sqrt{2})$ pertence à reta s . Se, por exemplo, $x = 2$, então:

$$\begin{cases} 2 = 1 + \lambda \\ y = \sqrt{2} - 2\lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 1 \\ y = \sqrt{2} - 2 \end{cases}$$

Logo, o ponto $(2, \sqrt{2} - 2)$ também pertence à reta s .

O ponto $(0, 4)$ pertence à reta t . Se, por exemplo, $x = 3$, então $y = \frac{1}{3} \times 3 + 4 = 5$.

Logo, o ponto $(3, 5)$ também pertence à reta t .

b) O vetor $(-1, 2)$ é um vetor diretor da reta r . Fazendo, por exemplo, $2 \times (-1, 2)$ obtém-se o vetor $(-2, 4)$, que também é um vetor diretor da reta r .

O vetor $(1, -2)$ é um vetor diretor da reta s . Fazendo, por exemplo, $10 \times (1, -2)$ obtém-se o vetor $(10, -20)$, que também é um vetor diretor da reta s .

Como o declive da reta t é $\frac{1}{3}$, o vetor $(3, 1)$ é um vetor diretor da reta t , bem como o seu simétrico $(-3, -1)$.

c) O declive da reta r é $\frac{2}{-1} = -2$.

O declive da reta s é $\frac{-2}{1} = -2$.

O declive da reta t é $\frac{1}{3}$.

Logo, as retas r e s são paralelas e a reta t não é paralela a nenhuma delas.

- d) Qualquer ponto que pertença ao eixo das ordenadas é da forma $(0, y)$, onde y é um número real.

Assim, no que respeita à reta r :

$$\begin{aligned}(0, y) &= (2, 3) + k(-1, 2) \Leftrightarrow (0, y) = (2, 3) + (-k, 2k) \Leftrightarrow (0, y) = (2 - k, 3 + 2k) \\ &\Leftrightarrow 2 - k = 0 \wedge y = 3 + 2k \\ &\Leftrightarrow k = 2 \wedge y = 7\end{aligned}$$

Logo, o ponto de interseção da reta r com o eixo das ordenadas é $(0, 7)$.

Para a reta s :

$$\begin{cases} 0 = 1 + \lambda \\ y = \sqrt{2} - 2\lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -1 \\ y = \sqrt{2} + 2 \end{cases}$$

Logo, o ponto de interseção da reta s com o eixo das ordenadas é $(0, \sqrt{2} + 2)$.

O ponto de interseção da reta t com o eixo das ordenadas é $(0, 4)$.

22.

- a) O centro da circunferência é $(1, 2)$ e o seu raio é $\overline{CO} = \sqrt{(1-0)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$. Logo, uma equação da circunferência é $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 5$. A reta OC tem como vetor diretor o vetor $\overrightarrow{OC}(1, 2)$, logo o declive da reta é $\frac{2}{1} = 2$. Assim, a equação da reta OC é $y = 2x$. Então, uma condição que representa o conjunto de pontos a sombreado é:

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 \leq 5 \wedge y \leq 2x \wedge 0 \leq y \leq 2$$

- b) D é um ponto de interseção da reta de equação $y = 2$ com a circunferência, logo:

$$\begin{aligned}(x-1)^2 + (2-2)^2 &= 5 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 5 \Leftrightarrow x-1 = \sqrt{5} \vee x-1 = -\sqrt{5} \\ &\Leftrightarrow x = 1 + \sqrt{5} \vee x = 1 - \sqrt{5}\end{aligned}$$

Como D tem abscissa positiva, então as coordenadas de D são $(1 + \sqrt{5}, 2)$.

- c) A reta paralela a OC tem declive 2, tal como OC , e é da forma $y = 2x + b$. Como D é um ponto dessa reta, $2 = 2(1 + \sqrt{5}) + b \Leftrightarrow b = 2 - 2 - 2\sqrt{5} \Leftrightarrow b = -2\sqrt{5}$.

Assim, a reta tem como equação reduzida $y = 2x - 2\sqrt{5}$.

- d) $A_{[OCD]} = \frac{\overline{CD} \times h}{2} = \frac{\sqrt{5} \times 2}{2} = \sqrt{5}$ u. a.

23. Seja P o ponto tal que B e P são vértices consecutivos do losango. P pertence à reta AC e é tal que $\|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{BP}\|$.

$$\overrightarrow{AC} = C - A = (2, 1) - (0, 3) = (2, -2)$$

Logo, o declive da reta AC é $\frac{-2}{2} = -1$ e a sua ordenada na origem é 3. Assim, a equação reduzida da reta AC é $y = -x + 3$. Daqui se conclui que o ponto P é da forma $(x, -x + 3)$, sendo x um número real.

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \|B - A\| = \|(5, 4) - (0, 3)\| = \|(5, 1)\| = \sqrt{5^2 + 1^2} = \sqrt{26}$$

Assim:

$$\begin{aligned}\|\vec{BP}\| = \sqrt{26} &\Leftrightarrow \sqrt{(x-5)^2 + (-x+3-4)^2} = \sqrt{26} \Leftrightarrow x^2 - 10x + 25 + x^2 + 2x + 1 = 26 \\ &\Leftrightarrow 2x^2 - 8x = 0 \\ &\Leftrightarrow 2x(x-4) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \vee x = 4\end{aligned}$$

Como 0 é a abscissa de A, então 4 é a abscissa de P, logo $P(4, -1)$.

Seja agora Q o ponto tal que Q e A são vértices consecutivos do losango.

Q pertence à reta BC e é tal que $\|\vec{AQ}\| = \|\vec{AB}\|$.

$$\vec{BC} = C - B = (2, 1) - (5, 4) = (-3, -3)$$

Logo, o declive da reta BC é $\frac{-3}{-3} = 1$. A equação reduzida de BC é então da forma $y = x + b$.

Como C pertence a BC tem-se que $1 = 2 + b \Leftrightarrow b = -1$.

Assim, a equação reduzida da reta BC é $y = x - 1$.

Daqui se conclui que o ponto Q é da forma $(x, x + 1)$, sendo x um número real. Assim:

$$\begin{aligned}\|\vec{AQ}\| = \sqrt{26} &\Leftrightarrow \sqrt{(x-0)^2 + (x-1-3)^2} = \sqrt{26} \Leftrightarrow x^2 + x^2 - 8x + 16 = 26 \\ &\Leftrightarrow 2x^2 - 8x - 10 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{16+20}}{2} \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 5\end{aligned}$$

Como 5 é a abscissa de B, então -1 é a abscissa de Q, logo $Q(-1, -2)$.

- 24.** Se \vec{u} é colinear com $\vec{v}(2, -6)$, então existe um número real k tal que $\vec{u} = (2k, -6k)$. E como \vec{u} tem o mesmo sentido de \vec{v} , então $k > 0$.

$$\begin{aligned}\|\vec{u}\| = 8 &\Leftrightarrow \sqrt{(2k)^2 + (-6k)^2} = 8 \Leftrightarrow 4k^2 + 36k^2 = 64 \\ &\Leftrightarrow k^2 = \frac{64}{40} \\ &\Leftrightarrow k = \frac{8}{2\sqrt{10}} \vee k = -\frac{8}{2\sqrt{10}} \\ &\Leftrightarrow k = \frac{2\sqrt{10}}{5} \vee k = -\frac{2\sqrt{10}}{5}\end{aligned}$$

Como $k > 0$, então $\vec{u} = \left(2 \times \frac{2\sqrt{10}}{5}, -6 \times \frac{2\sqrt{10}}{5}\right) = \left(\frac{4\sqrt{10}}{5}, -\frac{12\sqrt{10}}{5}\right)$

- 25.** Se \vec{u} é colinear com $\vec{v}(1, 5)$, então existe um número real k tal que $\vec{u} = (k, 5k)$. Como \vec{u} tem sentido contrário ao de \vec{v} , então $k < 0$.

$$\begin{aligned}\|\vec{u}\| = 12 &\Leftrightarrow \sqrt{k^2 + (5k)^2} = 12 \Leftrightarrow k^2 + 25k^2 = 144 \\ &\Leftrightarrow k^2 = \frac{144}{26} \\ &\Leftrightarrow k = \frac{12}{\sqrt{26}} \vee k = -\frac{12}{\sqrt{26}} \\ &\Leftrightarrow k = \frac{6\sqrt{26}}{13} \vee k = -\frac{6\sqrt{26}}{13}\end{aligned}$$

Como $k < 0$, então $\vec{u} = \left(-\frac{6\sqrt{26}}{13}, 5 \times \left(-\frac{6\sqrt{26}}{13}\right)\right) = \left(-\frac{6\sqrt{26}}{13}, -\frac{30\sqrt{26}}{13}\right)$.

26.

a) Um ponto da reta r é $\left(0, -\frac{7}{4}\right)$. Como o declive da reta r é $\frac{3}{4}$, então um seu vetor diretor é $(4, 3)$.

b) O ponto de interseção da reta r com o eixo Ox é da forma $(x, 0)$, sendo x um número real.

$$\text{Assim, } 0 = \frac{3}{4}x - \frac{7}{4} \Leftrightarrow 0 = 3x - 7 \Leftrightarrow x = \frac{7}{3}.$$

Ou seja, o ponto de interseção da reta r com o eixo Ox é $\left(\frac{7}{3}, 0\right)$. O ponto de interseção da reta r com o eixo Oy é $\left(0, -\frac{7}{4}\right)$.

c) O ponto $(1, 5)$ pertence à reta s se existir um k tal que:

$$\begin{aligned}(1, 5) &= (1, 2) + k(-4, 3) \Leftrightarrow (1, 5) = (1, 2) + (-4k, 3k) \Leftrightarrow (1, 5) = (1 - 4k, 2 + 3k) \\ &\Leftrightarrow 1 - 4k = 1 \wedge 2 + 3k = 5 \\ &\Leftrightarrow k = 0 \wedge k = 1\end{aligned}$$

Logo, o ponto $(1, 5)$ não pertence à reta s .

d) Um vetor diretor da reta s é $(-4, 3)$, logo o seu declive é $\frac{3}{-4} = -\frac{3}{4}$ e a sua equação

reduzida é da forma $y = -\frac{3}{4}x + b$. Como $(1, 2)$ é um ponto da reta s , tem-se que:

$$2 = -\frac{3}{4} \times 1 + b \Leftrightarrow b = \frac{11}{4}$$

Assim, a equação reduzida da reta s é $y = -\frac{3}{4}x + \frac{11}{4}$.

e) O declive da reta r é $\frac{3}{4}$ e o declive da reta s é $-\frac{3}{4}$, logo as retas não são paralelas.

f) Igualando os segundos membros das equações reduzidas das retas r e s , obtém-se:

$$\frac{3}{4}x - \frac{7}{4} = -\frac{3}{4}x + \frac{11}{4} \Leftrightarrow 3x - 7 = -3x + 11 \Leftrightarrow 6x = 18 \Leftrightarrow x = 3$$

Como $x = 3$, então $y = \frac{3}{4} \times 3 - \frac{7}{4} = \frac{1}{2}$. Logo, o ponto de interseção das retas r e s é o ponto de coordenadas $\left(3, \frac{1}{2}\right)$.

g) Qualquer reta paralela à reta r tem equação reduzida da forma $y = \frac{3}{4}x + b$. Como $(4, -5)$ é

um ponto da reta cuja equação se pretende determinar, então $-5 = \frac{3}{4} \times 4 + b \Leftrightarrow b = -8$.

Logo, a equação reduzida da reta é $y = \frac{3}{4}x - 8$.

h) Para que A pertença à reta r : $5p = \frac{3}{4} \times 10 - \frac{7}{4} \Leftrightarrow 5p = \frac{23}{4} \Leftrightarrow p = \frac{23}{20}$

i) Uma equação da circunferência de centro $\left(1, -\frac{7}{4}\right)$ e raio 1 é $(x - 1)^2 + \left(y + \frac{7}{4}\right)^2 = 1$.

Os pontos de interseção da reta r com esta circunferência são da forma $\left(x, \frac{3}{4}x - \frac{7}{4}\right)$, onde x é um número real.

Assim:

$$(x-1)^2 + \left(\frac{3}{4}x - \frac{7}{4} + \frac{7}{4}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + \frac{9}{16}x^2 = 1 \Leftrightarrow 25x^2 - 32x = 0$$

$$\Leftrightarrow x(25x - 32) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{32}{25}$$

Se $x = 0$, então $y = -\frac{7}{4}$ e obtém-se o ponto $\left(0, -\frac{7}{4}\right)$.

Se $x = \frac{32}{25}$, então $y = \frac{3}{4} \times \frac{32}{25} - \frac{7}{4} = -\frac{79}{100}$ e obtém-se o ponto $\left(\frac{32}{25}, -\frac{79}{100}\right)$.

27. O ponto de interseção da reta s com o eixo Ox é da forma $(x, 0)$, onde x é um número real.

Assim:

$$(x, 0) = (2, 3) + k(-1, 2) \Leftrightarrow (x, 0) = (2, 3) + (-k, 2k) \Leftrightarrow (x, 0) = (2 - k, 3 + 2k)$$

$$\Leftrightarrow x = 2 - k \wedge 3 + 2k = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 2 - k \wedge k = -\frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = 2 - \left(-\frac{3}{2}\right) \wedge k = -\frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{7}{2} \wedge k = -\frac{3}{2}$$

O ponto de interseção da reta s com o eixo Ox é então o ponto de coordenadas $\left(\frac{7}{2}, 0\right)$. Um

vetor diretor da reta r é $(-2, 5)$, logo o seu declive é $-\frac{5}{2}$ e, portanto, qualquer reta paralela à

reta r terá equação reduzida da forma $y = -\frac{5}{2}x + b$. Como o ponto de coordenadas $\left(\frac{7}{2}, 0\right)$

pertence à reta cuja equação se pretende determinar, tem-se $0 = -\frac{5}{2} \times \frac{7}{2} + b \Leftrightarrow b = \frac{35}{4}$.

Assim, a equação reduzida da reta paralela à reta r e que interseca o eixo Ox no mesmo

ponto que a reta s é $y = -\frac{5}{2}x + \frac{35}{4}$.

28.

a) O raio da circunferência é $\overline{AO} = \sqrt{(3-0)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$.

O seu centro é a origem do referencial.

Assim, uma equação da circunferência é $x^2 + y^2 = 10$.

Um vetor diretor da reta AC é $\overrightarrow{AC} = C - A = (0, 10) - (3, 1) = (-3, 9)$, pelo que o seu declive é $\frac{9}{-3} = -3$. Assim, a equação reduzida da reta AC é $y = -3x + 10$. A reta BC é simétrica de

AC relativamente ao eixo Oy , logo a sua equação reduzida é $y = 3x + 10$. A região sombreada é então definida pela condição $x^2 + y^2 \geq 10 \wedge y \leq -3x + 10 \wedge y \leq 3x + 10$.

b) Uma equação da circunferência interna é $(x-1)^2 + y^2 = 1$. Uma equação da circunferência externa é $(x-2)^2 + y^2 = 4$. Para determinar a equação reduzida da reta AB é necessário determinar as coordenadas de B , que é o ponto da circunferência externa cuja abcissa é 3:

$$(3-2)^2 + y^2 = 4 \Leftrightarrow 1^2 + y^2 = 4 \Leftrightarrow y^2 = 3 \Leftrightarrow y = \sqrt{3} \vee y = -\sqrt{3}$$

Como a ordenada de B é positiva, tem-se que $B(3, \sqrt{3})$.

Então, $\overrightarrow{AB} = B - A = (3, \sqrt{3}) - (1, 0) = (2, \sqrt{3})$. Logo, o declive da reta AB é $\frac{\sqrt{3}}{2}$ e a sua

equação reduzida é da forma $y = \frac{\sqrt{3}}{2}x + b$. Como A pertence a esta reta, obtém-se:

$$0 = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 1 + b \Leftrightarrow b = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Logo, a equação reduzida da reta AB é $y = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}$. Assim, uma condição que define o conjunto de pontos a sombreado é:

$$(x-1)^2 + y^2 \geq 1 \wedge (x-2)^2 + y^2 \leq 4 \wedge y \leq \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2} \wedge y \geq 0$$

- c) Uma equação da circunferência da esquerda é $(x+1)^2 + y^2 = 1$. Uma equação da circunferência da direita é $(x-1)^2 + y^2 = 1$. A reta da esquerda passa nos pontos de coordenadas $(-2, 0)$ e $(0, -3)$, logo o seu declive é $\frac{0+3}{-2-0} = -\frac{3}{2}$ e a sua equação reduzida é

$y = -\frac{3}{2}x - 3$. A reta da direita passa nos pontos de coordenadas $(2, 0)$ e $(0, -3)$, logo o seu

declive é $\frac{0+3}{2-0} = \frac{3}{2}$ e a sua equação reduzida é $y = \frac{3}{2}x - 3$

Logo, uma condição que define a região sombreada é:

$$((x+1)^2 + y^2 \leq 1 \wedge y \geq 0) \vee ((x-1)^2 + y^2 \leq 1 \wedge y \geq 0) \vee \left(y \geq -\frac{3}{2}x - 3 \wedge y \geq \frac{3}{2}x - 3 \wedge y \leq 0\right)$$

$$\begin{aligned} 29. \quad 2\overrightarrow{MN} &= 2(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN}) = 2\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BN} \\ &= \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} \\ &= \overrightarrow{AB} + (\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) \\ &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} \end{aligned}$$

30.

$$a) \quad \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{AM} + \vec{0} = 2\overrightarrow{AM}$$

$$\begin{aligned} b) \quad \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} &= \overrightarrow{PM} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{PM} + \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{PM} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \\ &= 2\overrightarrow{PM} + \vec{0} \\ &= 2\overrightarrow{PM} \end{aligned}$$

31.

$$a) \quad \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{GM} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{GM} + \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{GM} + \vec{0} = 2\overrightarrow{GM}$$

$$\begin{aligned} b) \quad \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GA} &= \overrightarrow{GM} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{GM} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{GA} = 2\overrightarrow{GM} + \vec{0} + \overrightarrow{GA} \\ &= 2\overrightarrow{GM} + \overrightarrow{GA} \\ &= 2 \times \frac{1}{2}\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GA} \\ &= \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GA} \\ &= \vec{0} \end{aligned}$$

32. O ponto de interseção da reta com o eixo Ox é da forma $(x, 0)$, onde x é um número real.

$$2x + 0 - 12 = 0 \Leftrightarrow x = 6$$

Assim, esse ponto é $A(6, 0)$. O ponto de interseção da reta com o eixo Oy é da forma $(0, y)$, onde y é um número real.

$$0 + 3y - 12 = 0 \Leftrightarrow y = 4$$

Assim, esse ponto é $B(0, 4)$. Então, o centro da circunferência é o ponto médio de $[AB]$:

$$\left(\frac{6+0}{2}, \frac{0+4}{2}\right) = (3, 2)$$

O raio da circunferência é:

$$\frac{1}{2} \overline{AB} = \frac{1}{2} \sqrt{(6-0)^2 + (0-4)^2} = \frac{1}{2} \sqrt{36+16} = \frac{1}{2} \sqrt{52} = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{13} = \sqrt{13}$$

Logo, uma equação da circunferência de diâmetro $[AB]$ é $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 13$.

- 33.** O ponto $P(-k, 5+k)$ é um ponto genérico da reta. Substituindo x e y pelas coordenadas de P na equação da elipse, obtém-se:

$$(-k)^2 + \frac{(5+k)^2}{4} = 1 \Leftrightarrow 4k^2 + (5+k)^2 = 4 \Leftrightarrow 4k^2 + 25 + 10k + k^2 = 4$$

$$\Leftrightarrow 5k^2 + 10k + 21 = 0$$

$$\Leftrightarrow k = \frac{-10 \pm \sqrt{100 - 4 \times 5 \times 21}}{10} \quad \text{Condição impossível em } \mathbb{R}$$

Logo, a reta é exterior à elipse.

34. $r: 4y = 3x - 1 \Leftrightarrow y = \frac{3}{4}x - \frac{1}{4}$

$$s: 4x - 3y + 2 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{4}{3}x + \frac{2}{3}$$

Igualando ambas as expressões, $\frac{3}{4}x - \frac{1}{4} = \frac{4}{3}x + \frac{2}{3} \Leftrightarrow 9x - 3 = 16x + 8 \Leftrightarrow x = -\frac{11}{7}$

Logo, $y = \frac{3}{4} \times \left(-\frac{11}{7}\right) - \frac{1}{4} = -\frac{10}{7}$. Obtém-se assim o ponto de interseção das duas retas

$I\left(-\frac{11}{7}, -\frac{10}{7}\right)$, que é um dos vértices do triângulo.

Seja A o ponto da reta r cuja distância ao ponto I é 10 unidades. Então $A\left(x, \frac{3}{4}x - \frac{1}{4}\right)$, onde x é um número real.

$$\overline{AI} = 10 \Leftrightarrow \sqrt{\left(x + \frac{11}{7}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}x - \frac{1}{4} + \frac{10}{7}\right)^2} = 10 \Leftrightarrow \left(x + \frac{11}{7}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}x + \frac{33}{28}\right)^2 = 100$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{11}{7}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\left(x + \frac{11}{7}\right)\right)^2 = 100$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{11}{7}\right)^2 \left(1 + \frac{9}{16}\right) = 100$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{11}{7}\right)^2 = 64$$

$$\Leftrightarrow x + \frac{11}{7} = 8 \vee x + \frac{11}{7} = -8$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{45}{7} \vee x = -\frac{67}{7}$$

Se $x = \frac{45}{7}$, então $y = \frac{3}{4} \times \frac{45}{7} - \frac{1}{4} = \frac{32}{7}$, logo $A\left(\frac{45}{7}, \frac{32}{7}\right)$.

Por outro lado, se $x = -\frac{67}{7}$, então $y = \frac{3}{4} \times \left(-\frac{67}{7}\right) - \frac{1}{4} = -\frac{52}{7}$, logo $A'\left(-\frac{67}{7}, -\frac{52}{7}\right)$.

Seja B o ponto da reta s cuja distância ao ponto I é 10 unidades.

Então, $A\left(x, \frac{4}{3}x + \frac{2}{3}\right)$ onde x é um número real.

$$\begin{aligned} \overline{BI} = 10 &\Leftrightarrow \sqrt{\left(x + \frac{11}{7}\right)^2 + \left(\frac{4}{3}x + \frac{2}{3} + \frac{10}{7}\right)^2} = 10 \Leftrightarrow \left(x + \frac{11}{7}\right)^2 + \left(\frac{4}{3}x + \frac{44}{21}\right)^2 = 100 \\ &\Leftrightarrow \left(x + \frac{11}{7}\right)^2 + \left(\frac{4}{3}\left(x + \frac{11}{7}\right)\right)^2 = 100 \\ &\Leftrightarrow \left(x + \frac{11}{7}\right)^2 \left(1 + \frac{16}{9}\right) = 100 \\ &\Leftrightarrow \left(x + \frac{11}{7}\right)^2 = 36 \\ &\Leftrightarrow x + \frac{11}{7} = 6 \vee x + \frac{11}{7} = -6 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{31}{7} \vee x = -\frac{53}{7} \end{aligned}$$

Se $x = \frac{31}{7}$ então $y = \frac{4}{3} \times \frac{31}{7} + \frac{2}{3} = \frac{46}{7}$, logo $B\left(\frac{31}{7}, \frac{46}{7}\right)$.

Por outro lado, se $x = -\frac{53}{7}$, então $y = \frac{4}{3} \times \left(-\frac{53}{7}\right) + \frac{2}{3} = -\frac{66}{7}$, logo $B'\left(-\frac{53}{7}, -\frac{66}{7}\right)$.

Assim, os vértices do triângulo são I, A e B ou I, A' e B' ou I, A' e B ou I, A e B' .

Unidade 3 – Geometria analítica no espaço

Páginas 238 a 256

61.

- a) A projeção ortogonal do ponto F sobre a reta BC é o ponto B .
- b) A projeção ortogonal do ponto F sobre a reta BF é o ponto F .
- c) A projeção ortogonal do ponto F sobre o eixo Ox é o ponto A .
- d) A projeção ortogonal do ponto F sobre o eixo Oy é o ponto C .
- e) A projeção ortogonal do ponto F sobre o eixo Oz é o ponto D .

62.

- a) As coordenadas dos vértices do cubo $[ABCDEFGH]$ são: $A(6, 0, 0)$; $B(6, 6, 0)$; $C(0, 6, 0)$;
 $D(0, 0, 0)$; $E(6, 6, 6)$; $F(0, 6, 6)$; $G(0, 0, 6)$; $H(6, 0, 6)$
- b) As coordenadas dos vértices do cubo $[ABCDEFGH]$ são: $A(0, -6, 0)$; $B(0, 0, 0)$; $C(-6, 0, 0)$;
 $D(-6, -6, 0)$; $E(0, 0, 6)$; $F(-6, 0, 6)$; $G(-6, -6, 6)$; $H(0, -6, 6)$

- c) As coordenadas dos vértices do cubo $[ABCDEFGH]$ são: $A(3, -3, -3)$; $B(3, 3, -3)$; $C(-3, 3, -3)$; $D(-3, -3, -3)$; $E(3, 3, 3)$; $F(-3, 3, 3)$; $G(-3, -3, 3)$; $H(3, -3, 3)$

63.

- a) As coordenadas dos restantes vértices do paralelepípedo são: $A(3, -4, 2)$; $B(3, 4, 2)$; $C(0, 4, 2)$; $D(0, -4, 2)$; $E(3, -4, 0)$; $F(3, 4, 0)$
- b) A projeção ortogonal do ponto B sobre o plano xOy é F , sobre o plano xOz é I e sobre o plano yOz é C .
- No plano xOy , o ponto F tem coordenadas $(3, 4)$.
- No plano xOz , o ponto I tem coordenadas $(3, 2)$
- No plano yOz , o ponto C tem coordenadas $(4, 2)$.

64.

- a) O plano paralelo a yOz que passa no ponto F é $x = 3$.
- b) O plano paralelo a xOy que passa no ponto B é $z = 2$.
- c) O plano paralelo a xOz que passa no ponto H é $y = -4$.
- d) O plano paralelo ao plano ABC que passa pelo ponto de coordenadas $(3, 4, 5)$ é $z = 5$.
- e) O plano que contém a face $[EFGH]$ é $z = 0$.

65.

- a) As coordenadas dos restantes vértices do prisma são: $A(3, 3, -6)$; $C(0, 3, -6)$; $D(0, 0, -6)$; $E(3, 0, 4)$; $F(3, 3, 4)$; $G(0, 3, 4)$; $H(0, 0, 4)$
- b) i. O plano que contém a face $[EFGH]$ é $z = 4$.
- ii. O plano BCG é definido por $y = 3$.
- iii. A reta AE é definida por $x = 3 \wedge y = 0$.
- iv. A reta AB é definida por $x = 3 \wedge z = -6$.
- c) i. $x = 3 \wedge y = 3$ define a reta BF .
- ii. $x = 0 \wedge z = 4$ define a reta GH .
- iii. $y = 3 \wedge z = -6$ define a reta BC .
- iv. $x = 0 \wedge y = 0$ define o eixo Oz .

66.

- a) $\overline{AB} = \sqrt{(3-3)^2 + (0-3)^2 + (-6-(-6))^2} = \sqrt{0+9+0} = 3$
- b) $\overline{AE} = \sqrt{(3-3)^2 + (0-0)^2 + (-6-4)^2} = \sqrt{0+0+100} = 10$
- c) $\overline{AC} = \sqrt{(3-0)^2 + (0-3)^2 + (-6-(-6))^2} = \sqrt{9+9+0} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$
- d) $\overline{AF} = \sqrt{(3-3)^2 + (0-3)^2 + (-6-4)^2} = \sqrt{0+9+100} = \sqrt{109}$
- e) $\overline{AG} = \sqrt{(3-0)^2 + (0-3)^2 + (-6-4)^2} = \sqrt{9+9+100} = \sqrt{118}$

67.

- a) $d(A, B) = \sqrt{(1-(-3))^2 + (-2-1)^2 + (4-4)^2} = \sqrt{16+9+0} = \sqrt{25} = 5$
- b) $d(C, O) = \sqrt{(2-0)^2 + (-1-0)^2 + (-3-0)^2} = \sqrt{4+1+9} = \sqrt{14}$

$$\text{c) } d(D, E) = \sqrt{(1-1)^2 + (2-2)^2 + (3-5)^2} = \sqrt{0+0+4} = 2$$

$$\text{d) } d(F, G) = \sqrt{(2-1)^2 + (\sqrt{2} - (\sqrt{2}-3))^2 + (2-(-1))^2} = \sqrt{1+9+9} = \sqrt{19}$$

$$\text{e) } d(H, I) = \sqrt{(a-b)^2 + (b-a)^2 + (a-b)^2} = \sqrt{3(a-b)^2} = |a-b|\sqrt{3}$$

$$68. \overline{AB} = \sqrt{(-1-0)^2 + (2-\sqrt{3})^2 + (3-1)^2} = \sqrt{1+4-4\sqrt{3}+3+4} = \sqrt{12-4\sqrt{3}}$$

$$\overline{BC} = \sqrt{(0-(-3))^2 + (\sqrt{3}-0)^2 + (1-4)^2} = \sqrt{9+3+9} = \sqrt{21}$$

$$\overline{AC} = \sqrt{(-1-(-3))^2 + (2-0)^2 + (3-4)^2} = \sqrt{4+4+1} = \sqrt{9} = 3$$

Como $\overline{AB} \neq \overline{BC} \neq \overline{AC}$, o triângulo $[ABC]$ é um triângulo escaleno.

69.

a) Por exemplo, $A(1, 0, 0)$ e $B(3, 0, 0)$.

b) Por exemplo, $A(7, 0, 8)$ e $B(7, -4, 8)$.

c) Por exemplo, $A(1, 1, 0)$ e $B(1, 1, 10)$.

$$70. \overline{AC} = \sqrt{(1-0)^2 + (2-k)^2 + (-5-3)^2} = \sqrt{1+(2-k)^2+64}$$

$$= \sqrt{65+(2-k)^2}$$

$$\overline{BC} = \sqrt{(-1-0)^2 + (3-k)^2 + (-4-3)^2} = \sqrt{1+(3-k)^2+49}$$

$$= \sqrt{50+(3-k)^2}$$

Como se pretende que o ponto C seja equidistante de A e de B :

$$\overline{AC} = \overline{BC} \Leftrightarrow \sqrt{65+(2-k)^2} = \sqrt{50+(3-k)^2} \Leftrightarrow 65+(2-k)^2 = 50+(3-k)^2$$

$$\Leftrightarrow 65+4-4k+k^2 = 50+9-6k+k^2$$

$$\Leftrightarrow 2k = -10$$

$$\Leftrightarrow k = -5$$

71.

a) Sendo $A(0, 1, 0)$ e $B(3, 0, 4)$, a equação do plano medidor é:

$$(x-0)^2 + (y-1)^2 + (z-0)^2 = (x-3)^2 + (y-0)^2 + (z-4)^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2y + 1 + z^2 = x^2 - 6x + 9 + y^2 + z^2 - 8z + 16$$

$$\Leftrightarrow 6x - 2y + 8z - 24 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3x - y + 4z - 12 = 0$$

b) Sendo $A(0, -2, 3)$ e $B(\sqrt{3}, 5, 3)$, a equação do plano medidor é:

$$(x-0)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = (x-\sqrt{3})^2 + (y-5)^2 + (z-3)^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + 4y + 4 = x^2 - 2\sqrt{3}x + 3 + y^2 - 10y + 25$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{3}x + 14y - 24 = 0$$

c) Vejamos se $(0, 4, 4)$ pertence ao plano definido por $3x - y + 4z - 12 = 0$:

$$3 \times 0 - 4 + 4 \times 4 - 12 = 0 \Leftrightarrow 0 - 4 + 16 - 12 = 0 \Leftrightarrow -16 + 16 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0, \quad \text{que é uma proposição verdadeira. Logo, o ponto } (0, 4, 4) \text{ pertence ao plano definido na alínea a).}$$

Vejamos agora se $(0, 4, 4)$ pertence ao plano definido por $2\sqrt{3}x + 14y - 24 = 0$:

$$2\sqrt{3} \times 0 + 14 \times 4 - 24 = 0 \Leftrightarrow 0 + 56 - 24 = 0 \Leftrightarrow 32 = 0, \text{ que é uma proposição falsa. Logo, o ponto } (0, 4, 4) \text{ não pertence ao plano definido na alínea b).}$$

72.

$$\text{a) } r = \overline{CA} = \sqrt{(1 - (-1))^2 + (2 - 1)^2 + (3 - 4)^2} = \sqrt{4 + 1 + 1} = \sqrt{6}$$

$$\text{b) } r = \overline{CO} = \sqrt{(3 - 0)^2 + (2 - 0)^2 + (1 - 0)^2} = \sqrt{9 + 4 + 1} = \sqrt{14}$$

$$\text{c) } r = \frac{1}{2} \overline{AB} = \frac{1}{2} \sqrt{(-3 - 2)^2 + (5 - 4)^2 + (7 - 6)^2} = \frac{1}{2} \sqrt{25 + 1 + 1} = \frac{1}{2} \sqrt{27} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

73.

a) Uma equação da superfície esférica de centro $C(1, 2, 3)$ e raio $\sqrt{6}$ é:

$$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2 = 6$$

b) Uma equação da superfície esférica de centro na origem do referencial e de raio $\sqrt{14}$ é:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 14$$

c) O centro da superfície esférica de diâmetro $[AB]$ é o ponto médio deste segmento de reta, ou

seja, $\left(\frac{-3+2}{2}, \frac{5+4}{2}, \frac{7+6}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{9}{2}, \frac{13}{2}\right)$. Assim, uma equação da superfície esférica

de centro $\left(-\frac{1}{2}, \frac{9}{2}, \frac{13}{2}\right)$ e raio $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ é $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{9}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{13}{2}\right)^2 = \frac{27}{4}$.

74.

a) A superfície esférica tem centro $(1, 2, -1)$ e raio $\sqrt{16} = 4$.

b) A superfície esférica tem centro $\left(-\frac{1}{3}, 0, \sqrt{3}\right)$ e raio $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

c) A superfície esférica tem centro $(0, 0, 0)$ e raio $\sqrt{1} = 1$.

$$\text{d) } x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 6z + 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 + z^2 + 6z + 9 = -5 + 1 + 4 + 9$$

$$\Leftrightarrow (x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z + 3)^2 = 9$$

A superfície esférica tem centro $(1, 2, -3)$ e raio $\sqrt{9} = 3$.

$$\text{e) } 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 8x - 12z + 16 = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 6z + 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 4x + 4 + y^2 + z^2 - 6z + 9 = -8 + 4 + 9$$

$$\Leftrightarrow (x + 2)^2 + y^2 + (z - 3)^2 = 5$$

A superfície esférica tem centro $(-2, 0, 3)$ e raio $\sqrt{5}$.

75.

a) O centro da circunferência é o ponto médio de $[PQ]$, ou seja, $\left(\frac{1+1}{2}, \frac{5-2}{2}, \frac{-2-4}{2}\right) = \left(1, \frac{3}{2}, -3\right)$

$$\text{O raio da circunferência é } \frac{1}{2} \overline{PQ} = \frac{1}{2} \sqrt{(1 - 1)^2 + (5 + 2)^2 + (-2 + 4)^2} = \frac{1}{2} \sqrt{0 + 49 + 4} = \frac{\sqrt{53}}{2}.$$

$$\text{b) i. } (x - 1)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 + (z + 3)^2 = \frac{53}{4} \wedge x = 1 \Leftrightarrow \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 + (z + 3)^2 = \frac{53}{4} \wedge x = 1$$

$$\text{ii. } (x - 1)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 + (z + 3)^2 = \frac{53}{4} \wedge z = 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 + 9 = \frac{53}{4} \wedge z = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 1)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{17}{4} \wedge z = 0$$

76.

- a) A esfera de centro no ponto $(\pi, 0, -\sqrt{5})$ e raio $\frac{1}{3}$ é definida por $(x - \pi)^2 + y^2 + (z + \sqrt{5})^2 \leq \frac{1}{9}$
- b) A interseção da esfera de centro na origem do referencial e de raio 1 com o plano xOz é definida por $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \wedge y = 0 \Leftrightarrow x^2 + z^2 \leq 1 \wedge y = 0$.
- c) A interseção da esfera definida por $x^2 + (y - 1)^2 + (z - 3)^2 \leq 5$ com o plano $x = 2$ é definida por $x^2 + (y - 1)^2 + (z - 3)^2 \leq 5 \wedge x = 2 \Leftrightarrow 4 + (y - 1)^2 + (z - 3)^2 \leq 5 \wedge x = 2$
 $\Leftrightarrow (y - 1)^2 + (z - 3)^2 \leq 1 \wedge x = 2$
- d) A parte da esfera de centro $A(1, 2, 3)$ e raio 10 situada no 3.º octante é definida por:
 $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2 \leq 100 \wedge x < 0 \wedge y < 0 \wedge z > 0$
- e) Os pontos de cota não positiva pertencentes à esfera de centro na origem e raio 7 são definidos por $x^2 + y^2 + z^2 \leq 49 \wedge z \leq 0$.

Unidade 4 – Cálculo vetorial no espaço

Páginas 257 a 267

77.

- a) Por exemplo, $[A, B]$, $[B, C]$, $[C, G]$, $[G, E]$ e $[D, F]$.
- b) Por exemplo, $[A, O]$ e $[B, C]$.
- c) Por exemplo, $[A, O]$ e $[C, B]$.
- d) Por exemplo, \overrightarrow{AF} e \overrightarrow{FC} .
- e) Por exemplo, \overrightarrow{AE} e \overrightarrow{GC} .

78.

- a) $I + \overrightarrow{AC} = I + \overrightarrow{IK} = K$
- b) $F + \overrightarrow{JL} = F + \overrightarrow{FH} = H$
- c) $A + \overrightarrow{HG} + \overrightarrow{AL} = A + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BK} = B + \overrightarrow{BK} = K$
- d) $T_{\overrightarrow{IF}}(H) = H + \overrightarrow{IF} = H + \overrightarrow{HC} = C$
- e) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AG}$
- f) $\overrightarrow{DH} + \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{DH} + \overrightarrow{HL} = \overrightarrow{DL}$
- g) $\overrightarrow{JL} + \overrightarrow{HD} = \overrightarrow{JL} + \overrightarrow{LH} = \overrightarrow{JH}$
- h) $\overrightarrow{IH} + \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{IH} + \overrightarrow{HI} = \vec{0}$
- i) $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EH} + \overrightarrow{HG} = \overrightarrow{EG}$
- j) $\overrightarrow{AI} + (-\overrightarrow{EK}) = \overrightarrow{CK} + \overrightarrow{KE} = \overrightarrow{CE}$
- k) $\overrightarrow{CK} + (-\overrightarrow{DH}) = \overrightarrow{CK} + \overrightarrow{KG} = \overrightarrow{CG}$
- l) $(E - J) + (D - A) = \overrightarrow{JE} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{JE} + \overrightarrow{EH} = \overrightarrow{JH}$

79.

a) $I + 2\overrightarrow{JF} = I + \overrightarrow{IA} = A$

b) $F + \frac{1}{2}\overrightarrow{CK} = F + \overrightarrow{FJ} = J$

c) $\frac{1}{2}\overrightarrow{IK} + \frac{1}{2}\overrightarrow{JL} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{IK} + \overrightarrow{JL}) = \frac{1}{2} \times 2\overrightarrow{IL} = \overrightarrow{IL}$

d) $2\overrightarrow{IE} - \overrightarrow{LD} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AI} = \vec{0}$

80. $\overrightarrow{OB} = 3\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 + 0\vec{e}_3; \overrightarrow{OB}(3, 4, 0)$

$\overrightarrow{OG} = 3\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3; \overrightarrow{OG}(3, 4, 2)$

$\overrightarrow{EF} = 3\vec{e}_1 + 0\vec{e}_2 + 0\vec{e}_3; \overrightarrow{EF}(3, 0, 0)$

$\overrightarrow{ED} = 0\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 + 0\vec{e}_3; \overrightarrow{ED}(0, 4, 0)$

$\overrightarrow{FD} = -3\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 + 0\vec{e}_3; \overrightarrow{FD}(-3, 4, 0)$

81. $\vec{u}(2, -3, 5) \quad \vec{v}(k, 3, 1) \quad \vec{w}(-2, -6, p^2 - 1)$

$\vec{u} = \vec{v} + \vec{w} \Leftrightarrow (2, -3, 5) = (k, 3, 1) + (-2, -6, p^2 - 1) \Leftrightarrow (2, -3, 5) = (k - 2, 3 - 6, 1 + p^2 - 1)$

$\Leftrightarrow (2, -3, 5) = (k - 2, -3, p^2)$

$\Leftrightarrow k - 2 = 2 \wedge -3 = -3 \wedge p^2 = 5$

$\Leftrightarrow k = 4 \wedge p = \pm\sqrt{5}$

Logo, $k = 4$ e $p = \sqrt{5}$ ou $k = 4$ e $p = -\sqrt{5}$.

82. $\vec{u}(2, -3, 4) \quad \vec{v}(-1, 0, 3) \quad A(1, 2, -3) \quad B(0, 2, 0)$

a) $\vec{u} + 2\vec{v} = (2, -3, 4) + 2(-1, 0, 3) = (2, -3, 4) + (-2, 0, 6) = (0, -3, 10)$

b) $\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\vec{v} = B - A - \frac{1}{3}\vec{v} = (0, 2, 0) - (1, 2, -3) - \frac{1}{3}(-1, 0, 3) = (-1, 0, 3) + \left(\frac{1}{3}, 0, -1\right) = \left(-\frac{2}{3}, 0, 2\right)$

c) $-\vec{u} + 4(2\vec{v}) = -(2, -3, 4) + 4(2(-1, 0, 3)) = (-2, 3, -4) + 4(-2, 0, 6) = (-2, 3, -4) + (-8, 0, 24) = (-10, 3, 20)$

d) $A + \frac{1}{2}\vec{u} = (1, 2, -3) + \frac{1}{2}(2, -3, 4) = (1, 2, -3) + \left(1, -\frac{3}{2}, 2\right) = \left(2, \frac{1}{2}, -1\right)$

e) $\overrightarrow{BA} = A - B = (1, 2, -3) - (0, 2, 0) = (1, 0, -3)$

Logo, são vetores colineares com \overrightarrow{BA} , por exemplo:

$2\overrightarrow{BA} = (2, 0, -6)$

$-2\overrightarrow{BA} = (-2, 0, 6)$

$5\overrightarrow{BA} = (5, 0, -15)$

f) $-3\overrightarrow{AB} = 2\vec{w} + \vec{u} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{BA} = 2\vec{w} + \vec{u} \Leftrightarrow 3(1, 0, -3) = 2\vec{w} + (2, -3, 4)$

$\Leftrightarrow 2\vec{w} = (3, 0, -9) - (2, -3, 4)$

$\Leftrightarrow 2\vec{w} = (1, 3, -13)$

$\Leftrightarrow \vec{w} = \frac{1}{2}(1, 3, -13)$

$\Leftrightarrow \vec{w} = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{13}{2}\right)$

83.

a) $\vec{a}(1, -3, 7) \quad \vec{b}(2, -6, 14)$

Uma vez que $\vec{b} = 2\vec{a}$, então \vec{a} e \vec{b} são vetores colineares.

b) $\vec{a}\left(0, -1, \frac{1}{2}\right)$ $\vec{b}(0, 4, -1)$

Uma vez que $\vec{b} = -4\vec{a}$, então \vec{a} e \vec{b} são vetores colineares.

c) $\vec{a}(0, 0, 7)$ $\vec{b}(0, 0, -1)$

Uma vez que $\vec{a} = -7\vec{b}$, então \vec{a} e \vec{b} são vetores colineares.

d) $\vec{a}(1, 4, 0)$ $\vec{b}(2, 8, 1)$

Uma vez que $\frac{1}{2} = \frac{4}{8} \neq \frac{0}{1}$, então \vec{a} e \vec{b} não são vetores colineares.

84. \vec{u} é colinear com \vec{v} , logo $\vec{u}(k, -2k, -k)$, para algum número real k não nulo.

Tendo em conta que \vec{u} tem sentido contrário ao de \vec{v} , então o valor de k terá de ser negativo.

$$\|\vec{u}\| = 8 \Leftrightarrow \sqrt{k^2 + (-2k)^2 + (-k)^2} = 8 \Leftrightarrow k^2 + (-2k)^2 + (-k)^2 = 64$$

$$\Leftrightarrow k^2 + 4k^2 + k^2 = 64$$

$$\Leftrightarrow 6k^2 = 64$$

$$\Leftrightarrow k^2 = \frac{64}{6}$$

$$\Leftrightarrow k = \frac{8}{\sqrt{6}} \vee k = -\frac{8}{\sqrt{6}}$$

$$\Leftrightarrow k = \frac{4\sqrt{6}}{3} \vee k = -\frac{4\sqrt{6}}{3}$$

Como $k < 0$, tem-se que $\vec{u}\left(-\frac{4\sqrt{6}}{3}, \frac{8\sqrt{6}}{3}, \frac{4\sqrt{6}}{3}\right)$.

85.

a) Uma equação vetorial da reta r que tem a direção de \vec{v} e que passa em A é:

$$(x, y, z) = (-1, 3, 1) + k(0, 1, 2), k \in \mathbb{R}$$

b) As equações paramétricas da reta são:

$$\begin{cases} x = -1 \\ y = 3 + k, k \in \mathbb{R} \\ z = 1 + 2k \end{cases}$$

c) O ponto $(-1, 1, -3)$ pertence à reta se existir um k tal que:

$$(-1, 1, -3) = (-1, 3, -1) + k(0, 1, 2) \Leftrightarrow (-1, 1, -3) = (-1, 3, -1) + (0, k, 2k)$$

$$\Leftrightarrow (-1, 1, -3) = (-1, 3 + k, 1 + 2k)$$

$$\Leftrightarrow -1 = -1 \wedge 3 + k = 1 \wedge 1 + 2k = -3$$

$$\Leftrightarrow k = -2 \wedge 2k = -4$$

$$\Leftrightarrow k = -2 \wedge k = -2$$

Logo, $k = -2$, o que significa que o ponto B pertence à reta r .

- d) $P(x, 0, z), x, z \in \mathbb{R}$, uma vez que se trata de um ponto do plano xOz .

Assim:

$$\begin{aligned}(x, 0, z) &= (-1, 3, 1) + k(0, 1, 2) \Leftrightarrow (x, 0, z) = (-1, 3, 1) + (0, k, 2k) \\&\Leftrightarrow (x, 0, z) = (-1, 3 + k, 1 + 2k) \\&\Leftrightarrow x = -1 \wedge 3 + k = 0 \wedge 1 + 2k = z \\&\Leftrightarrow x = -1 \wedge k = -3 \wedge z = 1 - 6 \\&\Leftrightarrow x = -1 \wedge k = -3 \wedge z = -5\end{aligned}$$

Logo, $P(-1, 0, -5)$.

Aprende Fazendo

Páginas 268 a 276

1. $P(-1, 2, 3)$

- a) Um plano paralelo a xOy é definido por uma condição da forma $z = a$. Como a cota de P é 3, então o plano paralelo a xOy e que passa pelo ponto P é definido pela condição $z = 3$.

Opção (C)

- b) Um plano perpendicular ao eixo das ordenadas é definido por uma condição da forma $y = a$. Como a ordenada de P é 2, então o plano perpendicular ao eixo das ordenadas e que passa pelo ponto P é definido pela condição $y = 2$.

Opção (B)

2. $A(-2, 3, 1)$ $B(2, -5, 0)$

O centro da esfera é o ponto médio do segmento de reta $[AB]$: $\left(\frac{-2+2}{2}, \frac{3-5}{2}, \frac{1+0}{2}\right) = \left(0, -1, \frac{1}{2}\right)$

O raio da esfera é:

$$\frac{1}{2} \overline{AB} = \frac{1}{2} \sqrt{(-2-2)^2 + (3+5)^2 + (1-0)^2} = \frac{1}{2} \sqrt{16 + 64 + 1} = \frac{1}{2} \sqrt{81} = \frac{9}{2}.$$

Logo, uma condição que define a esfera de diâmetro $[AB]$ é $x^2 + (y+1)^2 + \left(z - \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{81}{4}$.

Opção (C)

3. $E(1, 0, 0)$ e $C(0, 1, 1)$, logo:

$$\|\overrightarrow{EC}\| = \|(0, 1, 1) - (1, 0, 0)\| = \|(-1, 1, 1)\| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{1 + 1 + 1} = \sqrt{3} \neq \sqrt{2}$$

$D + \frac{1}{2}$ é o ponto médio de $[DC]$ e não de $[AB]$.

Os vetores \overrightarrow{AC} e \overrightarrow{BD} não são colineares porque não têm a mesma direção.

$$\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{FG} = (0, 0, -1) + (-1, 0, 0) = (-1, 0, -1)$$

Opção (D)

4. A afirmação falsa é a C, uma vez que o plano de equação $z = -1$ é paralelo ao plano xOy e não ao plano yOz .

Opção (C)

5. Como o ponto pertence ao eixo Oz , então:

$$p^2 - 1 = 0 \wedge p^2 - p = 0 \Leftrightarrow (p = 1 \vee p = -1) \wedge (p = 1 \vee p = 0) \Leftrightarrow p = 1 \vee (p = -1 \wedge p = 0)$$

Logo, $p = 1$.

Opção (B)

6. $A\left(3, 2, \frac{1}{2}\right) \quad C(3, -4, 2k)$

$$\overline{AC} = 10 \Leftrightarrow \sqrt{(3-3)^2 + (2+4)^2 + \left(\frac{1}{2} - 2k\right)^2} = 10 \Leftrightarrow 0 + 36 + \left(\frac{1}{2} - 2k\right)^2 = 100$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2} - 2k\right)^2 = 64$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} - 2k = 8 \vee \frac{1}{2} - 2k = -8$$

$$\Leftrightarrow k = -\frac{15}{4} \vee k = \frac{17}{4}$$

Opção (B)

7. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z + 6 \leq 0$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 + 4y + 4 + z^2 - 6z + 9 \leq -6 + 1 + 4 + 9$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 \leq 8$$

Assim, a esfera tem centro $(1, -2, 3)$ e raio $\sqrt{8}$.

Opção (D)

8. $\vec{u}(4, -3, 1) \quad \vec{v}(2, -6, 8)$

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{4^2 + (-3)^2 + 1^2} = \sqrt{16 + 9 + 1} = \sqrt{26}$$

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{2^2 + (-6)^2 + 8^2} = \sqrt{4 + 36 + 64} = \sqrt{104} = 2\sqrt{26}$$

Logo, $\|\vec{u}\| = \frac{1}{2} \|\vec{v}\|$ e, portanto, a afirmação (I) é verdadeira.

$\frac{4}{2} \neq \frac{-3}{-6} \neq \frac{1}{8}$, logo os vetores \vec{u} e \vec{v} não são colineares e a afirmação (II) é falsa.

Opção (C)

9. $(x, y, z) = (4, 5, 6) + k(0, 0, 1), k \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 5 \\ z = 6 + k \end{cases}, k \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x = 4 \wedge y = 5$

Opção (A)

10. Um vetor diretor da reta r é $(3, 1, -4)$, que não é colinear com $(3, 1, 4)$, pelo que este não é um vetor diretor da reta r .

Para que o ponto $(1, 3, 10)$ pertença à reta r tem de existir um k tal que:

$$\begin{cases} 1 = -5 + 3k \\ 3 = 1 + k \\ 10 = 2 - 4k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3k = 6 \\ k = 2 \\ 4k = -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 2 \\ k = 2 \\ k = -2 \end{cases}$$

Logo, o ponto não pertence à reta.

O ponto de interseção da reta r com o eixo das cotas, se existir, é da forma $(0, 0, z)$, onde z é um número real.

Assim:

$$\begin{cases} 0 = -5 + 3k \\ 0 = 1 + k \\ z = 2 - 4k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = \frac{5}{3} \\ k = -1 \\ - \end{cases}$$

Logo, a reta não intersesta o eixo das cotas.

O ponto de interseção da reta r com o plano xOz , se existir, é da forma $(x, 0, z)$, onde x e z são números reais. Assim:

$$\begin{cases} x = -5 + 3k \\ 0 = 1 + k \\ z = 2 - 4k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -5 + 3 \times (-1) \\ k = -1 \\ z = 2 - 4 \times (-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -8 \\ - \\ z = 6 \end{cases}$$

Logo, a reta intersesta o plano xOz no ponto de coordenadas $(-8, 0, 6)$.

Opção (C)

11. $A(1, -5, 3) \quad B(-2, 4, 0)$

Para que o ponto $P(1, k, k^2)$ pertença ao plano medidor de $[AB]$ tem de se ter:

$$\begin{aligned} \overline{AP} = \overline{BP} &\Leftrightarrow \sqrt{(1-1)^2 + (-5-k)^2 + (3-k^2)^2} = \sqrt{(-2-1)^2 + (4-k)^2 + (0-k^2)^2} \\ &\Leftrightarrow 0 + 25 + 10k + k^2 + 9 - 6k^2 + k^4 = 9 + 16 - 8k + k^2 + k^4 \\ &\Leftrightarrow -6k^2 + 18k + 9 = 0 \\ &\Leftrightarrow 2k^2 - 6k - 3 = 0 \\ &\Leftrightarrow k = \frac{6 \pm \sqrt{36+24}}{4} \\ &\Leftrightarrow k = \frac{6 \pm 2\sqrt{15}}{4} \\ &\Leftrightarrow k = \frac{3-\sqrt{15}}{2} \vee k = \frac{3+\sqrt{15}}{2} \end{aligned}$$

Opção (A)

12. $x^2 + y^2 + z^2 = 25 \wedge z = 3 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 3^2 = 25 \wedge z = 3 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 16 \wedge z = 3$

Assim, obtém-se uma circunferência de raio $\sqrt{16} = 4$, pelo que o seu perímetro é 8π .

Opção (B)

13. Se a esfera é tangente a $y = 4$ e a $y = -2$, então o seu diâmetro é 6 e o seu raio é 3. Além disso, a ordenada do seu centro é $4 - 3 = 1$.

Logo, uma condição que defina a esfera é da forma $(x-a)^2 + (y-1)^2 + (z-c)^2 \leq 9$, onde as coordenadas do seu centro são $(a, 1, c)$.

Opção (B)

14.

a) As coordenadas dos vértices do cubo são: $A(7, 5, 9); B(7, 8, 9); C(4, 8, 9); D(4, 5, 9); E(7, 5, 6); F(7, 8, 6); G(4, 8, 6); H(4, 5, 6)$

b) As coordenadas dos vértices do paralelepípedo retângulo são: $A(1, 0, 2); B(1, 6, 2); C(1, 6, -2); D(1, 0, -2); E(-1, 0, 2); F(-1, 6, 2); G(-1, 6, -2); H(-1, 0, -2)$

$$\begin{aligned} \text{c) } 2A_{\text{base}} = 12 &\Leftrightarrow A_{\text{base}} = 6 \Leftrightarrow \overline{BC} \times \overline{AB} = 6 \Leftrightarrow 3\overline{AB} = 6 \Leftrightarrow \overline{AB} = 2 \\ A_{\text{lateral}} = 50 &\Leftrightarrow 2\overline{AB} \times \overline{BF} + 2\overline{BC} \times \overline{CG} = 50 \Leftrightarrow 2 \times 2\overline{BF} + 2 \times 3\overline{BF} = 50 \\ &\Leftrightarrow 10\overline{BF} = 50 \Leftrightarrow \overline{BF} = 5 \end{aligned}$$

Assim, as coordenadas dos vértices do paralelepípedo retângulo são: $A(-3, -2, 0)$; $B(3, 0, 0)$; $C(0, 0, 0)$; $D(0, -2, 0)$; $E(3, -2, 5)$; $F(3, 0, 5)$; $G(0, 0, 5)$; $H(0, -2, 5)$

15.

$$\text{a) } V_{\text{sólido}} = 252 \Leftrightarrow V_{\text{pirâmide}} + V_{\text{cubo}} = 252$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3} \times a^2 \times \frac{a}{2} + a^3 = 252$$

$$\Leftrightarrow \frac{7}{6} a^3 = 252$$

$$\Leftrightarrow a^3 = 216$$

$$\Leftrightarrow a = 6, \text{ sendo } a \text{ a medida da aresta do cubo.}$$

Assim, as coordenadas dos vértices do sólido são: $M(3, 3, 6)$; $N(6, 0, 0)$; $O(0, 0, 0)$; $P(0, 6, 0)$; $Q(6, 6, 0)$; $R(6, 0, 6)$; $S(0, 0, 6)$; $T(0, 6, 6)$; $U(6, 6, 6)$; $V(3, 3, 9)$

b) i. O plano que contém a face $[PQTU]$ é definido por $y = 6$.

ii. A reta RU é definida por $x = 6 \wedge z = 6$.

iii. O plano paralelo a xOy que passa pelo ponto V é definido por $z = 9$.

iv. O plano medidor de $[UT]$ é definido por $x = 3$.

v. A superfície esférica de centro em V e que passa por M é definida por:

$$(x - 3)^2 + (y - 3)^2 + (z - 9)^2 = 9$$

16.

$$\text{a) } E + \overrightarrow{HG} = E + \overrightarrow{EF} = F$$

$$\text{b) } B + \frac{1}{2}\overrightarrow{DH} = B + \overrightarrow{BI} = I$$

$$\text{c) } I - \overrightarrow{JF} = I + \overrightarrow{IC} = C$$

$$\text{d) } A + \frac{1}{2}\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FG} = A + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = K$$

$$\text{e) } \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{CH} = \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BE} = \vec{0}$$

$$\text{f) } 2\overrightarrow{GJ} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{GF}$$

$$\text{g) } \overrightarrow{AG} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GE} = \overrightarrow{AE}$$

$$\text{h) } \overrightarrow{HK} + \overrightarrow{KI} - \overrightarrow{GJ} = \overrightarrow{HI} + \overrightarrow{IF} = \overrightarrow{HF}$$

$$\text{17. } \vec{u}(2, 0, -4) \quad \vec{v}(-1, 2, 3)$$

$$\begin{aligned} \text{a) } 2\vec{u} - 3\vec{v} &= 2(2, 0, -4) - 3(-1, 2, 3) \\ &= (4, 0, -8) + (3, -6, -9) \\ &= (7, -6, -17) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \frac{1}{4}\vec{u} + \overrightarrow{AB} &= \frac{1}{4}(2, 0, -4) + ((0, 2, 5) - (-1, -2, 3)) \\ &= \left(\frac{1}{2}, 0, -1\right) + (1, 4, 2) \\ &= \left(\frac{3}{2}, 4, 1\right) \end{aligned}$$

c) $2\overrightarrow{BA} - \vec{u} + 4\vec{v} = 2((-1, -2, 3) - (0, 2, 5)) - (2, 0, -4) + 4(-1, 2, 3)$
 $= 2(-1, -4, -2) - (2, 0, -4) + (-4, 8, 12)$
 $= (-2, -8, -4) - (2, 0, -4) + (-4, 8, 12)$
 $= (-4, -8, 0) + (-4, 8, 12)$
 $= (-8, 0, 12)$

d) $A - \vec{v} = (-1, -2, 3) - (-1, 2, 3) = (0, -4, 0)$

e) $B + \frac{1}{2}\vec{u} = (0, 2, 5) + \frac{1}{2}(2, 0, -4) = (0, 2, 5) + (1, 0, -2) = (1, 2, 3)$

f) $\overrightarrow{AB} = 5\vec{w} - \vec{u} + 2\vec{v} \Leftrightarrow 5\vec{w} = \overrightarrow{AB} + \vec{u} - 2\vec{v}$
 $\Leftrightarrow \vec{w} = \frac{1}{5}(\overrightarrow{AB} + \vec{u} - 2\vec{v})$
 $\Leftrightarrow \vec{w} = \frac{1}{5}((0, 2, 5) - (-1, -2, 3) + (2, 0, -4) - 2(-1, 2, 3))$
 $\Leftrightarrow \vec{w} = \frac{1}{5}((1, 4, 2) + (2, 0, -4) + (2, -4, -6))$
 $\Leftrightarrow \vec{w} = \frac{1}{5}(5, 0, -8)$
 $\Leftrightarrow \vec{w} = \left(1, 0, -\frac{8}{5}\right)$

18.

a) (i) $A(2, 0, 0)$ e $G(0, 2, 2)$

Assim, $\overrightarrow{AG} = (0, 2, 2) - (2, 0, 0) = (-2, 2, 2)$.

Logo, uma equação vetorial da reta que contém a diagonal espacial $[AG]$ é:

$$(x, y, z) = (2, 0, 0) + k(-2, 2, 2), k \in \mathbb{R}$$

(ii) Se uma reta é paralela ao eixo das abcissas, então um seu vetor diretor é $(1, 0, 0)$. Logo, uma equação vetorial da reta que passa no ponto $B(2, 2, 0)$ e é paralela ao eixo das abcissas é $(x, y, z) = (2, 2, 0) + k(1, 0, 0), k \in \mathbb{R}$.

(iii) A reta AE é paralela ao eixo Oz , logo um seu vetor diretor é $(0, 0, 1)$.

Assim, uma equação vetorial da reta AE é $(x, y, z) = (2, 0, 0) + k(0, 0, 1), k \in \mathbb{R}$.

(iv) Uma equação vetorial da aresta $[AE]$ é $(x, y, z) = (2, 0, 0) + k(0, 0, 1), k \in [0, 1]$.

b) (i) $\overrightarrow{BE} = (2, 0, 2) - (2, 2, 0) = (0, -2, 2)$

Um sistema de equações paramétricas de reta que passa no ponto G e tem a direção do vetor \overrightarrow{BE} é:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 2 - 2k, k \in \mathbb{R}. \\ z = 2 + 2k \end{cases}$$

(ii) O ponto médio de $[AB]$ tem coordenadas $(2, 1, 0)$, uma vez que $A(2, 0, 0)$ e $B(2, 2, 0)$.

Assim, um sistema de equações paramétricas da reta que passa no ponto médio de $[AB]$ e tem a direção de $\vec{u}(-1, -2, 5)$ é:

$$\begin{cases} x = 2 - k \\ y = 1 - 2k, k \in \mathbb{R}. \\ z = 5k \end{cases}$$

19. $A(1, -2, 3)$ e $\vec{u}(-2, -1, 4)$

a) Uma equação vetorial da reta r é:

$$(x, y, z) = (1, -2, 3) + k(-2, -1, 4), k \in \mathbb{R}$$

Um sistema de equações paramétricas da reta r é:

$$\begin{cases} x = 1 - 2k \\ y = -2 - k, k \in \mathbb{R}. \\ z = 3 + 4k \end{cases}$$

b) Para que o ponto $(0, -1, 5)$ pertença à reta r , tem de existir um k tal que:

$$\begin{cases} 0 = 1 - 2k \\ -1 = -2 - k \\ 5 = 3 + 4k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = \frac{1}{2} \\ k = -1 \\ k = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Logo, o ponto não pertence à reta r .

c) Para que o ponto $(2p, -\frac{3}{2}, p)$ pertença à reta r :

$$\begin{cases} 2p = 1 - 2k \\ -\frac{3}{2} = -2 - k \\ p = 3 + 4k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2p = 1 - 2 \times (-\frac{1}{2}) \\ k = -\frac{1}{2} \\ p = 3 + 4 \times (-\frac{1}{2}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p = 1 \\ k = -\frac{1}{2} \\ p = 1 \end{cases}$$

Logo, $p = 1$.

20.

a) $\overline{AD}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{OD}^2 \Leftrightarrow \overline{AD}^2 = 2^2 + 2^2 \Leftrightarrow \overline{AD}^2 = 8$

$$\Rightarrow \overline{AD} = \sqrt{8}$$

$$\Leftrightarrow \overline{AD} = 2\sqrt{2}, \text{ como se queria demonstrar.}$$

b) As coordenadas dos vértices do cubo são: $A(2, 0, 0)$; $B(4, 2, 0)$; $C(2, 4, 0)$; $D(0, 2, 0)$; $E(2, 0, 2\sqrt{2})$;

$F(4, 2, 2\sqrt{2})$; $G(2, 4, 2\sqrt{2})$; $H(0, 2, 2\sqrt{2})$

21.

a) $V_{\text{cone}} = 32\pi \Leftrightarrow \frac{1}{3} \times \pi \overline{AO}^2 \times 6 = 32\pi \Leftrightarrow \overline{AO}^2 = 16 \Rightarrow \overline{AO} = 4$

Logo, $A(-4, 0, 0)$.

b) $B(4, 0, 0)$ e $C(0, 0, 6)$

$$\overline{AC} = \sqrt{(-4 - 0)^2 - (0 - 0)^2 + (0 - 6)^2} = \sqrt{16 + 0 + 36} = \sqrt{52}$$

$$\overline{BC} = \sqrt{(4 - 0)^2 - (0 - 0)^2 + (0 - 6)^2} = \sqrt{16 + 0 + 36} = \sqrt{52}$$

$$\overline{AB} = 8$$

Logo, o triângulo $[ABC]$ é isósceles.

c) Como P pertence ao eixo Oz , então P é da forma $(0, 0, z)$.

Para que o triângulo $[ABP]$ seja equilátero:

$$\overline{AP} = \overline{AB} \Leftrightarrow \sqrt{(0 - (-4))^2 + (0 - 0)^2 + (z - 0)^2} = 8 \Leftrightarrow 16 + z^2 = 64$$

$$\Leftrightarrow z^2 = 48$$

$$\Leftrightarrow z = \sqrt{48} \vee z = -\sqrt{48}$$

$$\Leftrightarrow z = 4\sqrt{3} \vee z = -4\sqrt{3}$$

Logo, $P(0, 0, 4\sqrt{3})$ ou $P(0, 0, -4\sqrt{3})$.

22. $\overrightarrow{AB} = B - A = (0, 2, -1) - (1, 2, 3) = (-1, 0, -4)$

$$\overrightarrow{BC} = C - B = \left(\frac{1}{2}, 0, 2\right) - (0, 2, -1) = \left(\frac{1}{2}, -2, 3\right)$$

Ora $\frac{-1}{\frac{1}{2}} \neq \frac{0}{-2} \neq \frac{-4}{3}$, logo \overrightarrow{AB} e \overrightarrow{BC} não são colineares e, portanto, os pontos A , B e C não pertencem todos a uma mesma reta.

23.

a) As coordenadas dos vértices do poliedro são: $O(0, 0, 0)$; $A(2, 0, 0)$; $B(2, 2, 0)$; $C(0, 2, 0)$; $D(2, 0, 2)$; $E(2, 2, 2)$; $F(0, 2, 2)$; $G(0, 0, 2)$; $H(1, 1, 4)$; $I(1, 1, -2)$

b) A afirmação é falsa. O ponto I pertence ao oitavo octante e não ao quarto, uma vez que as suas coordenadas são $(1, 1, -2)$, ou seja, tem abcissa positiva, ordenada positiva e cota negativa, tal como qualquer outro ponto no oitavo octante.

c) (i) O plano que contém a face $[ABDE]$ é definido por $x = 2$.

(ii) A reta HI é definida por $x = 1 \wedge y = 1$.

(iii) O plano paralelo a xOy que passa pelo ponto I é definido por $z = -2$.

(iv) Uma reta perpendicular ao eixo Oz e que passa pelo ponto F é definida por, por exemplo, $x = 0 \wedge z = 2$.

(v) A esfera tangente a todas as faces do cubo tem centro $(1, 1, 1)$ e o seu raio é 1, logo é definida por $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 \leq 1$.

d) (i) $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{ID}$

(ii) $C - \overrightarrow{DE} - \overrightarrow{DG} = C + \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OA} = O + \overrightarrow{OA} = A$, logo $A + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{DG} = C$.

(iii) $\|\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{AD}\| = 4$

(iv) $\|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF}\| = \|\overrightarrow{AF}\| = \sqrt{2^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

e) (i) Como $D(2, 0, 2)$ e $E(2, 2, 2)$, uma equação do plano medidor de $[DE]$ é $y = 1$.

(ii) $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 + (z - 2)^2 = (x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 4)^2$
 $\Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 - 4y + 4 + z^2 - 4z + 4 = x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 + z^2 - 8z + 16$
 $\Leftrightarrow -2x - 2y + 4z - 6 = 0$
 $\Leftrightarrow x + y - 2z + 3 = 0$, que é uma equação do plano medidor de $[EH]$.

f) O raio da superfície esférica de centro I e que passa no ponto E é:

$$\overline{IE} = \sqrt{(2 - 1)^2 + (2 - 1)^2 + (2 - (-2))^2} = \sqrt{1 + 1 + 16} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

Logo, uma equação desta superfície esférica é $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z + 2)^2 = 18$.

g) $\overrightarrow{AF} = F - A = (0, 2, 2) - (2, 0, 0) = (-2, 2, 2)$

Logo, como \vec{u} é colinear com \overrightarrow{AF} , então é da forma $(-2k, 2k, 2k)$.

$$\|\vec{u}\| = 12 \Leftrightarrow \sqrt{(-2k)^2 + (2k)^2 + (2k)^2} = 12 \Leftrightarrow 4k^2 + 4k^2 + 4k^2 = 144$$

$$\Leftrightarrow 12k^2 = 144$$

$$\Leftrightarrow k^2 = 12$$

$$\Leftrightarrow k = \sqrt{12} \vee k = -\sqrt{12}$$

$$\Leftrightarrow k = 2\sqrt{3} \vee k = -2\sqrt{3}$$

Como \vec{u} tem o mesmo sentido de \overrightarrow{AF} , então $k > 0$, logo $\vec{u}(-4\sqrt{3}, 4\sqrt{3}, 4\sqrt{3})$.

24. $A\left(3, 2, \frac{1}{2}\right) \quad B\left(2, -1, \frac{3}{2}\right)$

- a) O conjunto dos pontos do espaço cuja distância ao ponto A é inferior ou igual a 3 é a esfera de centro A e raio 3, que pode ser definida por:

$$(x-3)^2 + (y-2)^2 + \left(z - \frac{1}{2}\right)^2 \leq 9$$

- b) O conjunto dos pontos do espaço que são equidistantes de A e de B é o plano mediador de $[AB]$.

$$(x-3)^2 + (y-2)^2 + \left(z - \frac{1}{2}\right)^2 = (x-2)^2 + (y+1)^2 + \left(z - \frac{3}{2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 + y^2 - 4y + 4 + z^2 - z + \frac{1}{4} = x^2 - 4x + 4 + y^2 + 2y + 1 + z^2 - 3z + \frac{9}{4}$$

$$\Leftrightarrow -2x - 6y + 2z + 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x + 6y - 2z - 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow x + 3y - z - 3 = 0, \text{ que é uma equação do plano mediador de } [AB].$$

- c) O centro da superfície esférica de diâmetro $[AB]$ é o ponto médio de $[AB]$ cujas coordenadas

$$\text{são } \left(\frac{3+2}{2}, \frac{2-1}{2}, \frac{\frac{1}{2}+\frac{3}{2}}{2}\right) = \left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}, 1\right).$$

$$\text{O seu raio é } \frac{1}{2} \overline{AB} = \frac{1}{2} \sqrt{(3-2)^2 + (2+1)^2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\right)^2} = \frac{1}{2} \sqrt{1+9+1} = \frac{\sqrt{11}}{2}.$$

Assim, uma equação desta superfície esférica é:

$$\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + (z-1)^2 = \frac{11}{4}$$

25.

a) $(x-6)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 8 \wedge y = 3$

$$\Leftrightarrow (x-6)^2 + (z+1)^2 = 7 \wedge y = 3, \text{ que define a circunferência de centro } (6, 3, -1) \text{ e raio } \sqrt{7} \text{ contida no plano de equação } y = 3.$$

b) $(x+1)^2 + y^2 + (z-1)^2 \leq 16 \wedge x = -1$

$$\Leftrightarrow y^2 + (z-1)^2 \leq 16 \wedge x = -1, \text{ que define o círculo de centro } (-1, 0, 1) \text{ e raio } 4 \text{ contido no plano de equação } x = -1.$$

c) $x^2 + y^2 + z^2 \leq 5 \wedge x = 0 \wedge y = 0$

$$\Leftrightarrow z^2 \leq 5 \wedge x = 0 \wedge y = 0$$

$$\Leftrightarrow -\sqrt{5} \leq z \leq \sqrt{5} \wedge x = 0 \wedge y = 0, \text{ que define o segmento de reta de extremos } (0, 0, -\sqrt{5}) \text{ e } (0, 0, \sqrt{5}).$$

d) $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 4y + 12 = 0 \wedge z = 2$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + 4 - 6x + 4y + 12 = 0 \wedge z = 2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 + y^2 + 4y + 4 = -12 + 9 \wedge z = 2$$

$$\Leftrightarrow (x-3)^2 + (y+2)^2 = -3, \text{ que define o conjunto vazio.}$$

26.

- a) As coordenadas dos restantes vértices do prisma são: $D(0, -3, 0)$; $E(3, 0, 7)$; $G(-3, 0, 7)$; $H(0, -3, 7)$

b) $\overrightarrow{EC} = C - E = (-3, 0, 0) - (3, 0, 7) = (-6, 0, -7)$

$$\overrightarrow{GB} = B - G = (0, 3, 0) - (-3, 0, 7) = (3, 3, -7)$$

$$\overrightarrow{EC} + \overrightarrow{GB} = (-6, 0, -7) + (3, 3, -7) = (-3, 3, -14)$$

$$\|\overrightarrow{EC} + \overrightarrow{GB}\| = \|(-3, 3, -14)\| = \sqrt{(-3)^2 + 3^2 + (-14)^2} = \sqrt{9 + 9 + 196} = \sqrt{214}$$

c) $\overrightarrow{FD} = D - F = (0, -3, 0) - (0, 3, 7) = (0, -6, -7)$

Como \vec{u} é colinear com \overrightarrow{FD} , então $\vec{u}(0, -6k, -7k)$.

$$\|\vec{u}\| = 5 \Leftrightarrow \sqrt{0^2 + (-6k)^2 + (-7k)^2} = 5$$

$$\Leftrightarrow 36k^2 + 49k^2 = 25$$

$$\Leftrightarrow 85k^2 = 25$$

$$\Leftrightarrow k^2 = \frac{25}{85}$$

$$\Leftrightarrow k = \frac{5}{\sqrt{85}} \vee k = -\frac{5}{\sqrt{85}}$$

$$\Leftrightarrow k = \frac{\sqrt{85}}{17} \vee k = -\frac{\sqrt{85}}{17}$$

Como \vec{u} tem sentido contrário ao de \overrightarrow{FD} , então $k < 0$, logo $\vec{u}\left(0, \frac{6\sqrt{85}}{17}, \frac{7\sqrt{85}}{17}\right)$.

d) O ponto médio de $[BF]$ é $M\left(\frac{0+0}{2}, \frac{3+3}{2}, \frac{0+7}{2}\right) = \left(0, 3, \frac{7}{2}\right)$

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (0, 3, 0) - (3, 0, 0) = (-3, 3, 0)$$

Assim, uma equação vetorial da reta que passa em M e tem a direção de \overrightarrow{AB} é:

$$(x, y, z) = \left(0, 3, \frac{7}{2}\right) + k(-3, 3, 0), k \in \mathbb{R}$$

e) Um vetor diretor de qualquer reta paralela ao eixo das abscissas é $(1, 0, 0)$. Logo, as equações paramétricas da reta que passam em F e são paralelas ao eixo das abscissas são:

$$\begin{cases} x = k \\ y = 3, k \in \mathbb{R} \\ z = 7 \end{cases}$$

f) O centro da superfície esférica que passa em todos os vértices do prisma é o centro do prisma $\left(0, 0, \frac{7}{2}\right)$. O raio desta superfície esférica é igual à distância entre o centro do prisma e qualquer um dos seus vértices, por exemplo, o vértice A :

$$\sqrt{(0-3)^2 + (0-0)^2 + \left(\frac{7}{2}-0\right)^2} = \sqrt{9 + 0 + \frac{49}{4}} = \sqrt{\frac{85}{4}}$$

Logo, uma condição que define a superfície esférica que passa em todos os vértices do prisma é $x^2 + y^2 + \left(z - \frac{7}{2}\right)^2 = \frac{85}{4}$.

27.

a) As equações paramétricas da reta r são $\begin{cases} x = -2 + k \\ y = 1 + k \\ z = -3k \end{cases}, k \in \mathbb{R}.$

- b) Como o ponto pertence ao plano yOz , então é da forma $(0, y, z)$.

$$\text{Para que pertença à reta } r: \begin{cases} 0 = -2 + k \\ y = 1 + k \\ z = -3k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 2 \\ y = 1 + 2 \\ z = -3 \times 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 2 \\ y = 3 \\ z = -6 \end{cases}$$

Logo, o ponto de interseção da reta r com o plano yOz é $(0, 3, -6)$.

- c) $B = A + 2\vec{u} = (-2, 1, 0) + 2(1, 1, -3) = (-2, 1, 0) + (2, 2, -6) = (0, 3, -6)$

O ponto médio de $[AB]$ é o centro da esfera e as suas coordenadas são:

$$\left(\frac{-2+0}{2}, \frac{1+3}{2}, \frac{0-6}{2} \right) = (-1, 2, -3)$$

O raio da esfera é:

$$\frac{1}{2} \overline{AB} = \frac{1}{2} \sqrt{(-2-0)^2 + (1-3)^2 + (0-(-6))^2} = \frac{1}{2} \sqrt{4+4+36} = \frac{1}{2} \sqrt{44} = \sqrt{11}$$

Logo, uma condição que define a esfera de diâmetro $[AB]$ é $(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 \leq 11$.

28.

- a) Uma condição que define a superfície esférica com centro em $(2, 2, 2)$ e que é tangente ao plano de equação $y = 2 + \sqrt{6}$, ou seja, que tem raio $\sqrt{6}$, é $(x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 = 6$. Como A e B são pontos que têm as três coordenadas iguais e pertencem à superfície esférica, então:

$$\begin{aligned} (x-2)^2 + (x-2)^2 + (x-2)^2 = 6 &\Leftrightarrow (x-2)^2 = 2 \Leftrightarrow x-2 = \sqrt{2} \vee x-2 = -\sqrt{2} \\ &\Leftrightarrow x = 2 + \sqrt{2} \vee x = 2 - \sqrt{2} \end{aligned}$$

Logo, $A(2 + \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2})$, porque pertence ao primeiro octante, e $B(2 - \sqrt{2}, 2 - \sqrt{2}, 2 - \sqrt{2})$.

- b) O ponto médio de $[AB]$ tem coordenadas $\left(\frac{2+\sqrt{2}+2-\sqrt{2}}{2}, \frac{2+\sqrt{2}+2-\sqrt{2}}{2}, \frac{2+\sqrt{2}+2-\sqrt{2}}{2} \right) = (2, 2, 2)$.

Este ponto é o centro da superfície esférica, logo a corda $[AB]$ é um diâmetro dessa superfície esférica.

29.

- a) $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 4y - 8z = 0$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 - 4y + 4 + z^2 - 8z + 16 = 4 + 4 + 16$$

$$\Leftrightarrow (x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-4)^2 = 24$$

Assim, o centro da superfície esférica é $(2, 2, 4)$ e o raio é $\sqrt{24} = 2\sqrt{6}$.

- b) As coordenadas dos vértices do prisma são: $A(4, 0, 0)$; $B(4, 4, 0)$; $C(0, 4, 0)$; $O(0, 0, 0)$; $D(4, 0, 8)$; $E(4, 4, 8)$; $F(0, 4, 8)$; $G(0, 0, 8)$

- c) $\overrightarrow{AF} = F - A = (0, 4, 8) - (4, 0, 0) = (-4, 4, 8)$

Como \vec{v} é colinear a \overrightarrow{AF} então $\vec{v}(-4k, 4k, 8k)$.

$$\|\vec{v}\| = 6 \Leftrightarrow \sqrt{(-4k)^2 + (4k)^2 + (8k)^2} = 6 \Leftrightarrow 16k^2 + 16k^2 + 64k^2 = 36$$

$$\Leftrightarrow k^2 = \frac{36}{96}$$

$$\Leftrightarrow k = \frac{6}{\sqrt{96}} \vee k = -\frac{6}{\sqrt{96}}$$

$$\Leftrightarrow k = \frac{\sqrt{96}}{16} \vee k = -\frac{\sqrt{96}}{16}$$

$$\Leftrightarrow k = \frac{\sqrt{6}}{4} \vee k = -\frac{\sqrt{6}}{4}$$

Como a direção de \vec{v} é contrária à de \overrightarrow{AF} , então $k < 0$.

Logo, $\vec{v} \left(-4 \times \left(-\frac{\sqrt{6}}{4} \right), 4 \times \left(-\frac{\sqrt{6}}{4} \right), 8 \times \left(-\frac{\sqrt{6}}{4} \right) \right) = (\sqrt{6}, -\sqrt{6}, -2\sqrt{6})$. Então:

$$\begin{aligned} (-a^2b + 4ab, -6ab, 6a^2b) &= (\sqrt{6}, -\sqrt{6}, -2\sqrt{6}) \Leftrightarrow \begin{cases} -a^2b + 4ab = \sqrt{6} \\ -6ab = -\sqrt{6} \\ 6a^2b = -2\sqrt{6} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -a^2b + 4ab = \sqrt{6} \\ ab = \frac{\sqrt{6}}{6} \\ a^2b = -\frac{\sqrt{6}}{3} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -\left(-\frac{\sqrt{6}}{3}\right) + 4\frac{\sqrt{6}}{6} = \sqrt{6} \\ ab = \frac{\sqrt{6}}{6} \\ a \times ab = -\frac{\sqrt{6}}{3} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\sqrt{6}}{3} + \frac{2\sqrt{6}}{3} = \sqrt{6} \\ ab = \frac{\sqrt{6}}{6} \\ a \times \frac{\sqrt{6}}{6} = -\frac{\sqrt{6}}{3} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{6} = \sqrt{6} \\ -2b = \frac{\sqrt{6}}{6} \\ a = -2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{6} = \sqrt{6} \\ b = -\frac{\sqrt{6}}{12} \\ a = -2 \end{cases} \end{aligned}$$

30.

a) $\overrightarrow{BC} = C - B = (11, -10, 7) - (13, -4, 4) = (-2, -6, 3)$

Assim, $D = A + \overrightarrow{BC} = (10, -6, -2) + (-2, -6, 3) = (8, -12, 1)$.

$\overrightarrow{AE} = E - A = (22, -12, -6) - (10, -6, -2) = (12, -6, -4)$

Logo, $F = B + \overrightarrow{AE} = (13, -4, 4) + (12, -6, -4) = (25, -10, 0)$.

$G = C + \overrightarrow{AE} = (11, -10, 7) + (12, -6, -4) = (23, -16, 3)$

$H = D + \overrightarrow{AE} = (8, -12, 1) + (12, -6, -4) = (20, -18, -3)$

b) $\|\overrightarrow{BC}\| = \|(-2, -6, 3)\| = \sqrt{(-2)^2 + (-6)^2 + 3^2} = \sqrt{4 + 36 + 9} = \sqrt{49} = 7$

$\|\overrightarrow{AE}\| = \|(12, -6, -4)\| = \sqrt{12^2 + (-6)^2 + (-4)^2} = \sqrt{144 + 36 + 16} = \sqrt{196} = 14$

Logo, $V_{\text{prisma}} = 7 \times 7 \times 14 = 686 \text{ u. v.}$

c) O ponto médio de $[AE]$ é o centro da superfície esférica e as suas coordenadas são

$\left(\frac{10+22}{2}, \frac{-6-12}{2}, \frac{-2-6}{2} \right) = (16, -9, -4)$. O raio da superfície esférica é $\frac{1}{2} \overline{AE} = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{AE}\| = 7$.

Logo, uma condição que define a superfície esférica de diâmetro $[AE]$ é:

$$(x - 16)^2 + (y + 9)^2 + (z + 4)^2 = 49$$

d) DBF é o plano mediador de [AC]:

$$\begin{aligned}(x-10)^2 + (y+6)^2 + (z+2)^2 &= (x-11)^2 + (y+10)^2 + (z-7)^2 \\ \Leftrightarrow x^2 - 20x + 100 + y^2 + 12y + 36 + z^2 + 4z + 4 &= x^2 - 22x + 121 + y^2 + 20y + 100 + z^2 - 14z + 49 \\ \Leftrightarrow 2x - 8y + 18z - 130 &= 0 \\ \Leftrightarrow x - 4y + 9z - 65 &= 0\end{aligned}$$

31. Para que \vec{u} e \vec{v} sejam colineares $k^2 - 5k + 6 = 0$. Assim:

$$k^2 - 5k + 6 = 0 \Leftrightarrow k = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2} \Leftrightarrow k = 2 \vee k = 3$$

Se $k = 2$, então $\vec{u}(0, 4, 2)$ e $\vec{v}(0, -3, -2)$, mas $\frac{4}{-3} \neq \frac{2}{-2}$, logo os vetores \vec{u} e \vec{v} não são colineares. Se $k = 3$, então $\vec{u}(0, 9, 3)$ e $\vec{v}(0, -3, -1)$ e, uma vez que $\vec{u} = -3\vec{v}$, então os vetores \vec{u} e \vec{v} são colineares. Logo, $k = 3$.

32.

a) $F = V + \vec{VE} + \vec{EF} = (1, 1, 10) + (1, -1, -3) + (0, 2, 0) = (2, 2, 7)$

$$G = V + \vec{VG} = (1, 1, 10) + (-1, 1, -3) = (0, 2, 7)$$

$$\vec{VH} = \vec{VG} + \vec{GH} = \vec{VG} + \vec{FE} = \vec{VG} - \vec{EF} = (-1, 1, -3) - (0, 2, 0) = (-1, -1, -3)$$

b) $\|\vec{EF}\| = \|(0, 2, 0)\| = 2$

Logo, $A_{[EFGH]} = 2 \times 2 = 4$ u. a. Assim, $\frac{A_{[ABCD]}}{A_{[EFGH]}} = 9$, o que significa que a razão de semelhança

entre os comprimentos dos lados dos dois quadrados é 3, o mesmo acontecendo com os comprimentos das arestas das pirâmides $[VABCD]$ e $[VEFGH]$. Como \vec{VB} é colinear com \vec{VF} e têm o mesmo sentido, e pelo que acabamos de ver acima, então $\vec{VB} = 3\vec{VF}$.

Ora, $\vec{VF} = \vec{VE} + \vec{EF} = (1, -1, -3) + (0, 2, 0) = (1, 1, -3)$, logo $\vec{VB} = (3, 3, -9)$.

Também se tem então que $\vec{VD} = 3\vec{VH} = 3(-1, -1, -3) = (-3, -3, -9)$.

Logo, $D = V + \vec{VD} = (1, 1, 10) + (-3, -3, -9) = (-2, -2, 1)$.

Desafios

Página 277

1.

a) Trata-se da circunferência de centro (6,0) e raio 6, com equação $(x-6)^2 + y^2 = 6^2$.

b) Estas circunferências têm centro nos pontos (5,0), (4,0), (3,0), (2,0), (1,0), (0,0), (-1,0), (-2,0), (-3,0), (-4,0), (-5,0), e têm todas raio 6.

As equações são:

$$C_1 : (x-5)^2 + y^2 = 6^2$$

$$C_2 : (x-4)^2 + y^2 = 6^2$$

$$C_3 : (x-3)^2 + y^2 = 6^2$$

$$C_4 : (x-2)^2 + y^2 = 6^2$$

$$C_5 : (x-1)^2 + y^2 = 6^2$$

$$C_6 : x^2 + y^2 = 6^2$$

$$C_7 : (x+1)^2 + y^2 = 6^2$$

$$C_8 : (x+2)^2 + y^2 = 6^2$$

$$C_9 : (x+3)^2 + y^2 = 6^2$$

$$C_{10} : (x+4)^2 + y^2 = 6^2$$

$$C_{11} : (x+5)^2 + y^2 = 6^2$$

c) Sim, só é solução da circunferência C_6 .

d) Embora não pareça, é o da esquerda. De facto, de acordo com a alínea anterior, o centro da circunferência exterior pertence a uma das circunferências. Trata-se de uma ilusão de ótica.

2.

a) A distância é dada por:

$$\sqrt{(a-0)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{a^2 + 1}$$

b) Dado que as moedas têm raio 1, a distância entre A e B é igual à distância calculada na alínea anterior menos 1, ou seja, $\sqrt{a^2 + 1} - 1$.

c) Dado que a é positivo, obtemos:

$$\sqrt{a^2 + 1} - 1 = 3 \Leftrightarrow \sqrt{a^2 + 1} = 4$$

$$\Leftrightarrow a^2 + 1 = 16$$

$$\Leftrightarrow a^2 = 15$$

$$\Leftrightarrow a = \sqrt{15}$$

$$\Leftrightarrow a \approx 3,86$$

Tema IV – Funções reais de variável real

Unidade 1 – Revisões

Páginas 6 a 9

1.

- a) A correspondência f não é uma função de A em B , pois existe um elemento do conjunto de partida, 3, que tem mais do que um elemento correspondente no conjunto de chegada, 30 e 40. A correspondência g é uma função de A em B , pois a cada elemento do conjunto de partida corresponde um e um só elemento do conjunto de chegada.

b) $D_g = \{1, 2, 3, 4\}$

Conjunto de chegada: $\{10, 20, 30, 40\}$

$$D'_g = \{10, 20, 30\}$$

2. $D_f = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$

$$D_g = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$$

Conjunto de chegada de f : $\{-3, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 9\}$

Conjunto de chegada de g : $\{-3, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 9\}$

$$g(-1) = 3 \times (-1) = -3 = f(-1)$$

$$g(0) = 3 \times 0 = 0 = f(0)$$

$$g(1) = 3 \times 1 = 3 = f(1)$$

$$g(2) = 3 \times 2 = 6 = f(2)$$

$$g(3) = 3 \times 3 = 9 = f(3)$$

Assim, as funções f e g têm o mesmo domínio, têm o mesmo conjunto de chegada e cada elemento do domínio tem a mesma imagem por f e por g . Logo, as funções f e g são iguais.

3. $f(x) = 3x^2 + 1$

a) $f(1) = 3 \times 1^2 + 1 = 3 \times 1 + 1 = 3 + 1 = 4$

b) $f(0) = 3 \times 0^2 + 1 = 3 \times 0 + 1 = 0 + 1 = 1$

c) $f(\sqrt{2}) = 3 \times (\sqrt{2})^2 + 1 = 3 \times 2 + 1 = 6 + 1 = 7$

d) $f\left(-\frac{1}{3}\right) = 3 \times \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + 1 = 3 \times \frac{1}{9} + 1 = \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3}$

e) $f(2a) = 3 \times (2a)^2 + 1 = 3 \times 4a^2 + 1 = 12a^2 + 1$

f) $f(a-1) = 3 \times (a-1)^2 + 1 = 3 \times (a^2 - 2a + 1) + 1 = 3a^2 - 6a + 3 + 1 = 3a^2 - 6a + 4$

Unidade 2 – Generalidades acerca de funções

Páginas 10 a 29

4.

a) $A \times B = \{(\pi, 0), (\pi, 1), (\sqrt{2}, 0), (\sqrt{2}, 1), (\Phi, 0), (\Phi, 1)\}$

b) $B \times A = \{(0, \pi), (0, \sqrt{2}), (0, \Phi), (1, \pi), (1, \sqrt{2}), (1, \Phi)\}$

c) $A \times A = \{(\pi, \pi), (\pi, \sqrt{2}), (\pi, \Phi), (\sqrt{2}, \pi), (\sqrt{2}, \sqrt{2}), (\sqrt{2}, \Phi), (\Phi, \pi), (\Phi, \sqrt{2}), (\Phi, \Phi)\}$

d) $B \times B = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$

5. Uma vez que A tem 3 elementos e B tem 2 elementos, sejam $A = \{a, b, c\}$ e $B = \{d, e\}$. Como $A \cap B = \{20\}$, então $A = \{20, b, c\}$ e $B = \{20, e\}$. Visto que $(40, 30) \in A \times B$, então $A = \{20, 40, c\}$ e $B = \{20, 30\}$. Finalmente, como $A \cup B = \{10, 20, 30, 40\}$, então $A = \{10, 20, 40\}$.

6.

a) $A \times B =$

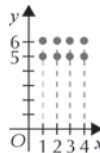
$\{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (e, 1), (e, 2), (e, 3), (i, 1), (i, 2), (i, 3), (o, 1), (o, 2), (o, 3), (u, 1), (u, 2), (u, 3)\}$

- b) C é o gráfico de uma função de A em B , uma vez que cada elemento de A é o primeiro elemento de um único par ordenado de C .

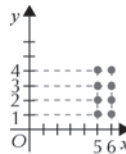
D não é o gráfico de uma função de A em B , pois admite mais do que um par ordenado cujo primeiro elemento é a .

7.

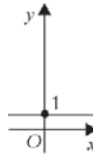
a) $A \times B = \{(1, 5), (1, 6), (2, 5), (2, 6), (3, 5), (3, 6), (4, 5), (4, 6)\}$



b) $A \times B = \{(5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4)\}$



c)



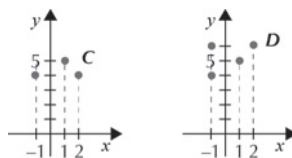
8.

a) $A \times B = \{(-1, 4), (-1, 5), (-1, 6), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 4), (2, 5), (2, 6)\}$

- b) C é o gráfico de uma função de A em B , pois cada elemento de A é o primeiro elemento de um único par ordenado de C .

D não é o gráfico de uma função de A em B , pois admite mais do que um par ordenado em que o primeiro elemento é -1 .

c)



- d) Por exemplo, $\{(-1, 6), (1, 6), (2, 6)\}$.

9.

a) $D_f = \{1, 3, 5, 7\}$ $D'_f = \{a, c, f, h\}$

Conjunto de chegada: $\{a, b, c, d, e, f, g, h\}$

b)

| x | y |
|-----|-----|
| 1 | h |
| 7 | f |

c) $D = \{1, 7\}$ $D' = \{f, h\}$

Conjunto de chegada: $\{a, b, c, d, e, f, g, h\}$

10.

a) $C = \{-3, -1\}$

$$f(-3) = (-3)^2 = 9$$

$$f(-1) = (-1)^2 = 1$$

Logo, $f(C) = \{1, 9\}$.

b) $D = \{-3, \sqrt{3}, 3\}$

$$f(-3) = (-3)^2 = 9$$

$$f(\sqrt{3}) = (\sqrt{3})^2 = 3$$

$$f(3) = 3^2 = 9$$

Logo, $f(D) = \{3, 9\}$.

c) $A = \{-3, -1, 1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, 3, 4, 6\}$

$$f(-3) = (-3)^2 = 9$$

$$f(-1) = (-1)^2 = 1$$

$$f(1) = 1^2 = 1$$

$$f(\sqrt{2}) = (\sqrt{2})^2 = 2$$

$$f(\sqrt{3}) = (\sqrt{3})^2 = 3$$

$$f(3) = 3^2 = 9$$

$$f(4) = 4^2 = 16$$

$$f(6) = 6^2 = 36$$

Logo, $f(A) = \{1, 2, 3, 9, 16, 36\}$.

11. A função f não é injetiva, pois existem elementos diferentes do domínio que têm a mesma imagem, uma vez que há imensas pessoas no mundo com a mesma idade, em anos.

A função g não é injetiva, pois existem elementos diferentes do domínio que têm a mesma imagem, uma vez que dois irmãos têm a mesma mãe.

A função h é injetiva, pois a cada elemento do domínio corresponde um e um só elemento do conjunto de chegada, já que cada país tem uma e uma só capital.

A função i não é injetiva, pois existem elementos diferentes do domínio que têm a mesma imagem, uma vez que há vários países com a mesma língua oficial.

12.

a) A função f não é injetiva, pois, por exemplo, os números -2 e 2 , que fazem parte do domínio, têm a mesma imagem, 8 .

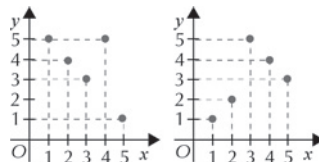
$$f(-2) = 2 \times (-2)^2 = 2 \times 4 = 8$$

$$f(2) = 2 \times 2^2 = 2 \times 4 = 8$$

b) Por exemplo, $f|_C: C \rightarrow B$, onde $C = \{-2, 1, \sqrt{2}, 3, 4\}$.

13.

- a) f é não injetiva, já que aos elementos 1 e 4, que fazem parte do domínio, corresponde a mesma imagem, 5.
- b) g é uma função injetiva, já que a cada elemento do domínio corresponde um e um só elemento distinto do conjunto de chegada.
- c)



14. A função f não é sobrejetiva, uma vez que o conjunto de chegada, $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, não coincide com o contradomínio, $D'_f = \{1, 3, 4, 5\}$. A função g é sobrejetiva, uma vez que o seu contradomínio coincide com o conjunto de chegada: $D'_g = \{1, 2, 3, 4, 5\} = A$.
15. A função f não é sobrejetiva, pois, para qualquer número real x tem-se que $x \geq 0$. Portanto, nesta função não há imagens inferiores a 0. Ou seja, o contradomínio de f , \mathbb{R}_0^+ , não coincide com o seu conjunto de chegada, \mathbb{R} .
16. A função g é sobrejetiva, pois, para todo o número real y existe um número real x tal que $y = x + 2$.
 $y = x + 2 \Leftrightarrow x = y - 2$, portanto, para qualquer $y \in \mathbb{R}$, $y = f(y - 2)$.

17.

- a) A função não é injetiva, pois aos elementos 2 e 3 do domínio corresponde a mesma imagem, b . A função é sobrejetiva, pois todo o elemento de B é imagem de um elemento de A . A função não é bijetiva, pois não é injetiva.
- b) A função é injetiva, pois objetos distintos têm imagens distintas. A função é sobrejetiva, pois todo o elemento de B é imagem de um elemento de A . A função é bijetiva, pois é injetiva e sobrejetiva.
- c) A função não é injetiva, pois aos elementos 2 e 3 do domínio corresponde a mesma imagem, b . A função não é sobrejetiva, pois o elemento c do conjunto B não é imagem de qualquer elemento do conjunto A . A função não é bijetiva, pois não é sobrejetiva.
- d) A função é injetiva, pois objetos distintos têm imagens distintas. A função não é sobrejetiva, pois o elemento b do conjunto B não é imagem de qualquer elemento do conjunto A . A função não é bijetiva, pois não é sobrejetiva.

18. A função f é injetiva, pois, quaisquer que sejam os números reais x_1 e x_2 pertencentes ao domínio, tem-se que $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$, uma vez que:

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 2x_1 - 5 = 2x_2 - 5 \Rightarrow 2x_1 = 2x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$$

A função f é sobrejetiva, pois para todo o número real y existe um número real x tal que $y = 2x - 5$.

$$y = 2x - 5 \Leftrightarrow 2x = y + 5 \Leftrightarrow x = \frac{y+5}{2}, \text{ portanto, para qualquer } y \in \mathbb{R}, y = f\left(\frac{y+5}{2}\right).$$

Como f é simultaneamente injetiva e sobrejetiva, tem-se que f é uma função bijetiva.

19.

- a) $g(f(2)) = g(4) = 9$
b) $f(g(2)) = f(3) = 7$
c) $g(f(0)) = g(5) = 12$
d) $f(g(0))$ não existe, pois 0 não pertence ao domínio de g .
e) $f(g(5)) = f(12)$ não existe, pois 12 não pertence ao domínio de f .

20.

a) i. $g \circ f(-2) = g(f(-2)) = g(2 \times (-2) + 3) = g(-4 + 3) = g(-1) = (-1)^2 = 1$

ii. $f \circ g(\sqrt{3}) + g \circ f\left(\frac{1}{2}\right) = f(g(\sqrt{3})) + g\left(f\left(\frac{1}{2}\right)\right) = f((\sqrt{3})^2) + g\left(2 \times \frac{1}{2} + 3\right)$
 $= f(3) + g(1 + 3)$
 $= 2 \times 3 + 3 + g(4)$
 $= 6 + 3 + 4^2$
 $= 9 + 16 = 25$

b) $D_{g \circ f} = \{x \in D_f : f(x) \in D_g\} = \{x \in \mathbb{R} \wedge 2x + 3 \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(2x + 3) = (2x + 3)^2 = 4x^2 + 12x + 9$$

Conjunto de chegada: \mathbb{R}

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g : g(x) \in D_f\} = \{x \in \mathbb{R} \wedge x^2 \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$$

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = f(x^2) = 2x^2 + 3$$

Conjunto de chegada: \mathbb{R}

c) A composição de funções não é comutativa, pois, na alínea anterior, $g \circ f(x) \neq f \circ g(x)$.

21. $D_{f \circ g} = \{x \in D_g : g(x) \in D_f\} = \{x \in \mathbb{R} \wedge -x + 2 \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = f(-x + 2) = 4(-x + 2) - 3 = -4x + 8 - 3 = -4x + 5$$

Conjunto de chegada: \mathbb{R}

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f : f(x) \in D_g\} = \{x \in \mathbb{R} \wedge 4x - 3 \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$$

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(4x - 3) = -(4x - 3) + 2 = -4x + 3 + 2 = -4x + 5$$

Conjunto de chegada: \mathbb{R}

Como as funções $f \circ g$ e $g \circ f$ têm o mesmo domínio, o mesmo conjunto de chegada e a mesma expressão analítica, então são iguais e, portanto, as funções f e g são permutáveis.

22.

a) $f \circ g(x) = f(g(x)) = f(-3x + 2) = 4(-3x + 2) - 1 = -12x + 8 - 1 = -12x + 7$

b) $g \circ f(x) = g(f(x)) = g(4x - 1) = -3(4x - 1) + 2 = -12x + 3 + 2 = -12x + 5$

c) $f \circ f(x) = f(f(x)) = f(4x - 1) = 4(4x - 1) - 1 = 16x - 4 - 1 = 16x - 5$

d) $g \circ g(x) = g(g(x)) = g(-3x + 2) = -3(-3x + 2) + 2 = 9x - 6 + 2 = 9x - 4$

23. $D_{f \circ f} = \{x \in D_f : f(x) \in D_f\} = \{x \in \mathbb{R} \wedge -x + 6 \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$

$$f \circ f(x) = f(f(x)) = f(-x + 6) = -(-x + 6) + 6 = x - 6 + 6 = x$$

Conjunto de chegada: \mathbb{R}

Logo, $f \circ f = \text{Id}_{\mathbb{R}}$.

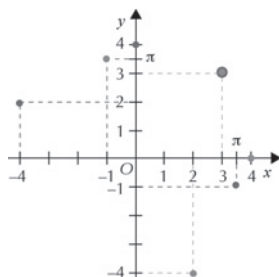
24. $f^{-1}: B \rightarrow A$

| x | y |
|---|---|
| a | 1 |
| b | 2 |
| c | 3 |

25.

a) $\{(\pi, -1), (-4, 2), (3, 3), (0, 4)\}$

b)



26.

a) i. $f(5) = 2 \times 5 - 3 = 10 - 3 = 7$

ii. $f^{-1}(5) = 4$, pois $2x - 3 = 5 \Leftrightarrow 2x = 8 \Leftrightarrow x = 4$

iii. $f^{-1}(-4) = -\frac{1}{2}$, pois $2x - 3 = -4 \Leftrightarrow 2x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$

iv. $f^{-1}(0) = \frac{3}{2}$, pois $2x - 3 = 0 \Leftrightarrow 2x = 3 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$

v. $f \circ f^{-1}(5) = f(f^{-1}(5)) = f(4) = 2 \times 4 - 3 = 8 - 3 = 5$

b) $2x - 3 = y \Leftrightarrow 2x = y + 3 \Leftrightarrow x = \frac{y+3}{2}$. Logo, $f^{-1}(x) = \frac{x+3}{2}$.

27.

a) A função f é injetiva, pois, quaisquer que sejam os números reais x_1 e x_2 pertencentes ao domínio, tem-se que $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$, uma vez que:

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow -3x_1 + 5 = -3x_2 + 5 \Rightarrow -3x_1 = -3x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$$

A função f é sobrejetiva, pois para todo o número real y existe um número real x tal que $y = -3x + 5$.

$$y = -3x + 5 \Leftrightarrow 3x = -y + 5 \Leftrightarrow x = \frac{-y+5}{3}, \text{ portanto, para qualquer } y \in \mathbb{R}, y = f\left(\frac{-y+5}{3}\right).$$

Como f é simultaneamente injetiva e sobrejetiva, tem-se que f é uma função bijetiva.

b) $-3x + 5 = y \Leftrightarrow -3x = y - 5 \Leftrightarrow 3x = -y + 5 \Leftrightarrow x = \frac{-y+5}{3}$

Logo, $f^{-1}(x) = \frac{-x+5}{3}$.

c) $f \circ f^{-1}(x) = f(f^{-1}(x)) = f\left(\frac{-x+5}{3}\right)$

$$= -3 \times \frac{-x+5}{3} + 5$$

$$= -(-x + 5) + 5$$

$$= x - 5 + 5 = x, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$f^{-1} \circ f(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(-3x + 5) = \frac{-(-3x+5)+5}{3}$$

$$= \frac{3x-5+5}{3} = \frac{3x}{3} = x, \forall x \in \mathbb{R}$$

Unidade 3 – Generalidades acerca de funções reais de variável real

Páginas 30 a 56

28.

a) $D_f = \{x \in \mathbb{R}: x \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

b) $D_g = \mathbb{R}$

c) $D_h = \{x \in \mathbb{R}: 9 - x^2 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}$

Cálculo auxiliar

$$9 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow x = 3 \vee x = -3$$

d) $D_i = \{x \in \mathbb{R}: x^2 + 1 \neq 0\} = \mathbb{R}$

Cálculo auxiliar

$x^2 + 1 = 0$ é uma equação impossível em \mathbb{R} .

e) $D_j = \{x \in \mathbb{R}: x - 2 \geq 0\} = [2, +\infty[$

Cálculo auxiliar

$$x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$$

f) $D_k = \{x \in \mathbb{R}: x + 3 \geq 0 \wedge x - 5 \neq 0\} = [-3, 5[\cup]5, +\infty[$

Cálculos auxiliares

$$x + 3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -3$$

$$x - 5 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 5$$

g) $D_l = \mathbb{R}$

29. As representações gráficas (II) e (III) não são funções, pois há valores de x aos quais corresponde mais do que um valor de y . As representações gráficas (I) e (IV) são funções, pois a cada valor de x corresponde um e um só valor de y .

Relativamente ao gráfico (I): $D = \left[-\frac{7}{2}, \frac{3}{2}\right]$ e $D' = [-4, 2]$.

Relativamente ao gráfico (IV): $D =]-3, 3]$ e $D' =]-4, -1[\cup [1, 4]$.

30. Relativamente ao gráfico (I), os zeros da função são -3 e 1 ; a função é positiva em $] -3, 1[$ e é negativa em $\left[-\frac{7}{2}, -3\right[\cup \left]1, \frac{3}{2}\right]$. Relativamente ao gráfico (IV), a função não tem zeros; a função é positiva em $[0, 3]$ e é negativa em $] -3, 0[$.

31. $D_f = \mathbb{R}$, logo $\forall x \in D_f, -x \in D_f$.

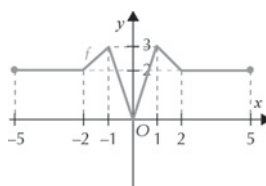
$$f(-x) = (-x)^4 + 5 = x^4 + 5 = f(x), \forall x \in D_f, \text{ ou seja, } f \text{ é uma função par.}$$

32. $D_f = \mathbb{R}$, logo $\forall x \in D_f, -x \in D_f$

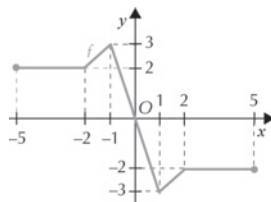
$$f(-x) = \sqrt[3]{(-x)} = -\sqrt[3]{x} = -f(x), \forall x \in D_f, \text{ ou seja, } f \text{ é uma função ímpar.}$$

33.

a)



b)



34.

a) $D_f = \mathbb{R}$, logo $\forall x \in D_f, -x \in D_f$

$$f(-x) = (-x)^2 + 3 = x^2 + 3 = f(x), \forall x \in D_f, \text{ ou seja, } f \text{ é uma função par.}$$

b) $D_g = \mathbb{R}$, logo $\forall x \in D_g, -x \in D_g$

$$g(x) = (x + 3)^2 = x^2 + 6x + 9$$

$$g(-x) = (-x + 3)^2 = x^2 - 6x + 9$$

$$-g(x) = -(x + 3)^2 = -(x^2 + 6x + 9) = -x^2 - 6x - 9$$

Ou seja, não é verdade que $g(-x) = g(x), \forall x \in D_g$ nem que $g(-x) = -g(x), \forall x \in D_g$.

Logo, g não é par nem ímpar.

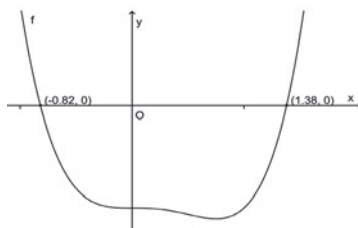
c) $D_h = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, logo $\forall x \in D_h, -x \in D_h$

$$h(-x) = \frac{1}{-x} = -\frac{1}{x} = -h(x), \forall x \in D_h \text{ ou seja, } h \text{ é uma função ímpar.}$$

d) $D_i = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$, ou seja, 2 pertence ao domínio da função i mas -2 não pertence ao domínio da função i , assim, a função i não é par nem ímpar.

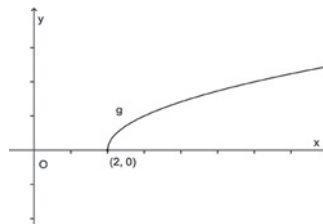
35.

a)



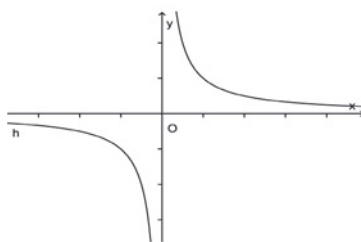
Os zeros da função f são $-0,82$ e $1,38$ (aproximadamente).

b)



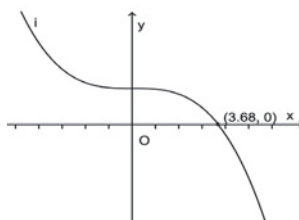
O zero da função g é 2.

c)



A função h não tem zeros.

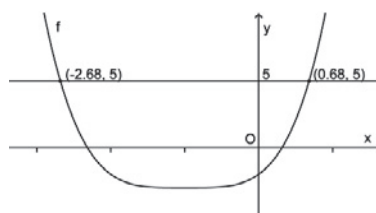
d)



O zero da função i é 3,68 (aproximadamente).

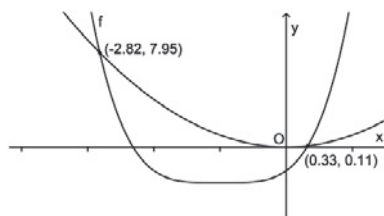
36.

a) Pretende-se resolver graficamente a equação $f(x) = 5$.



Os pontos pedidos são $(-2,7; 5)$ e $(0,7; 5)$.

b) Pretende-se resolver graficamente a equação $f(x) = x^2$.



Os pontos pedidos são $(-2,8; 7,9)$ e $(0,3; 0,1)$.

37.

a) $g(a) = f(a) - 4 = 10 - 4 = 6$

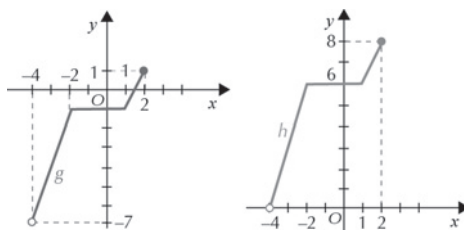
b) $g(a) = f(a) + 4 = 10 + 4 = 14$

38.

a) $D_f =]-4,2]$ $D'_f =]-3,5]$

A função f tem um zero.

b)



O gráfico da função g obtém-se do gráfico da função f por meio de uma translação de vetor $\vec{v}(0, -4)$ e o gráfico da função h obtém-se do gráfico da função f por meio de uma translação de vetor $\vec{v}(0, 3)$.

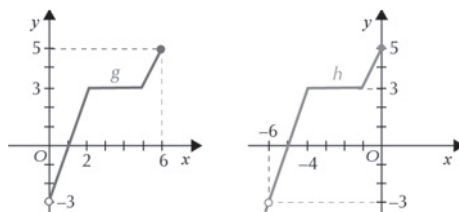
c) $D_g =]-4, 2]$ $D'_g =]-7, 1]$

A função g tem um zero.

$D_h =]-4, 2]$ $D'_h =]0, 8]$

A função h não tem zeros.

39.



a)

O gráfico da função g obtém-se do gráfico da função f por meio de uma translação de vetor $\vec{v}(4, 0)$ e o gráfico da função h obtém-se do gráfico da função f por meio de uma translação de vetor $\vec{v}(-2, 0)$.

b) $D_g =]0, 6]$

$D'_g =]-3, 5]$

A função g tem um zero.

$D_h =]-6, 0]$

$D'_h =]-3, 5]$

A função h tem um zero.

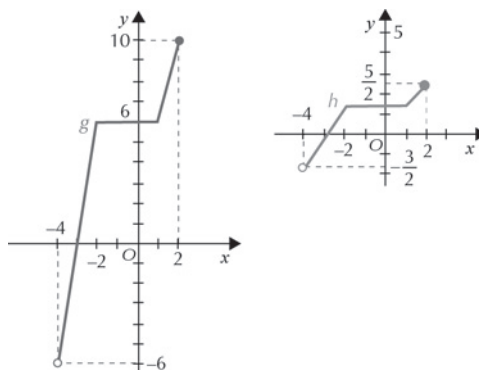
40.

a) $g(a) = 3f(a) = 3 \times 10 = 30$

b) $g(a) = \frac{1}{5}f(a) = \frac{1}{5} \times 10 = 2$

41.

a)



O gráfico da função g obtém-se do gráfico da função f por meio de uma dilatação vertical de coeficiente 2 e o gráfico da função h obtém-se do gráfico da função f por meio de uma contração vertical de coeficiente $\frac{1}{2}$.

b) $D_g =]-4, 2]$

$D'_g =]-6, 10]$

A função g tem um zero.

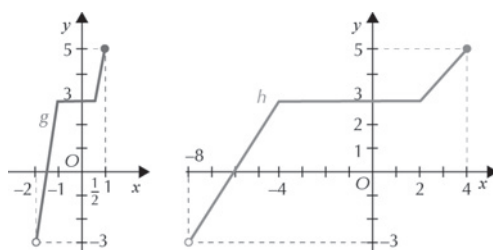
$D_h =]-4, 2]$

$D'_h = \left] -\frac{3}{2}, \frac{5}{2} \right]$

A função h tem um zero.

42.

a)



O gráfico da função g obtém-se do gráfico da função f por meio de uma contração horizontal de coeficiente $\frac{1}{2}$ e o gráfico da função h obtém-se do gráfico da função f por meio de uma dilatação horizontal de coeficiente 2.

b) $D_g =]-2, 1]$ $D'_g =]-3, 5]$

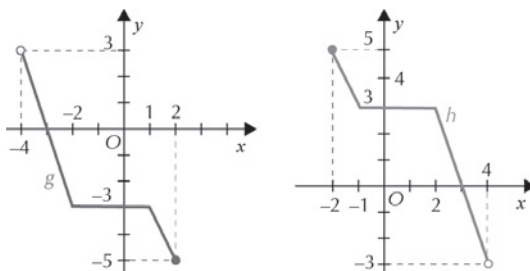
A função g tem um zero.

$D_h =]-8, 4]$ $D'_h =]-3, 5]$

A função h tem um zero.

43.

a)



O gráfico da função g obtém-se do gráfico da função f por meio de uma reflexão de eixo Ox e o gráfico da função h obtém-se do gráfico da função f por meio de uma reflexão de eixo Oy .

b) $D_g =]-4, 2]$ $D'_g = [-5, 3[$

A função g tem um zero.

$D_h = [-2, 4[$ $D'_h =]-3, 5]$

A função h tem um zero.

Unidade 4 – Monotonia, extremos e concavidades

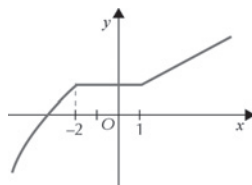
Páginas 57 a 67

44.

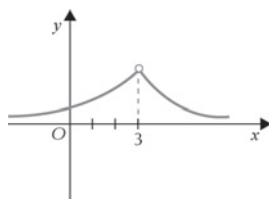
- a) A função f é estritamente decrescente em $[-6, -4]$, por exemplo.
- b) A função f é decrescente em sentido lato em $[-6, -1]$, por exemplo.
- c) A função f é estritamente crescente em $[0, 3]$, por exemplo.
- d) A função f é crescente em sentido lato em $[0, 6]$, por exemplo.
- e) A função f é constante em $[-2, 0]$, por exemplo.

45.

a) Por exemplo:



b) Por exemplo:



46.

a)

| x | -4 | | -2 | | 1 | | 2 |
|----------------|------|------------|----|---------------|---|------------|---|
| Varição de f | N.D. | \nearrow | 3 | \rightarrow | 3 | \nearrow | 5 |

f é estritamente crescente em $[-4, -2]$ e em $[1, 2]$; f é constante em $[-2, 1]$.

b)

| x | $-\infty$ | -2 | | 0 | | 2 | $+\infty$ |
|----------------|------------|----|------------|---|------------|---|------------|
| Varição de g | \nearrow | 4 | \searrow | 0 | \nearrow | 4 | \searrow |

g é estritamente crescente em $]-\infty, -2]$ e em $[0, 2]$; g é estritamente decrescente em $[-2, 0]$ e em $[2, +\infty[$.

47.

- a) Um majorante de g é 5, por exemplo.
- b) O conjunto dos minorantes de g é $]-\infty, -6]$.
- c) A função g é limitada, pois é majorada e minorada.

48. -5 é mínimo absoluto de f e é atingido em -6 ; $0,5$ é mínimo relativo de f e é atingido em -1 ;
 -2 é mínimo relativo de f e é atingido em $3,5$; 4 é máximo absoluto de f e é atingido em -3 ;
 2 é máximo relativo de f e é atingido em 1 ; -1 é máximo relativo de f e é atingido em 4 .

49.

- a) As funções em que a imagem de a é um máximo relativo são f e h , uma vez que, nestas funções, existe pelo menos uma vizinhança r de a em que todos os objetos têm imagens inferiores a $f(a)$ e $h(a)$, respetivamente.

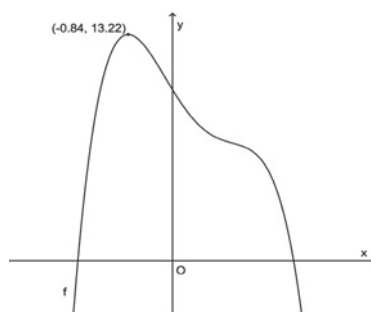
Quanto às funções g e i , qualquer vizinhança r de a admite objetos com imagens maiores do que $g(a)$ e $i(a)$, respetivamente.

- b) A função em que a imagem de a é um máximo absoluto é a função f , uma vez que nesta função, qualquer elemento do seu domínio tem imagem inferior ou igual a $f(a)$.

A imagem de a não é máximo relativo para as funções g e i , logo também não é máximo absoluto.

Quanto à função h , apesar de a imagem de a ser um máximo relativo da função, não é um máximo absoluto, pois há elementos do domínio cujas imagens são superiores a $h(a)$.

50.



O valor máximo da função é, aproximadamente, 13,22, logo $a \approx 13,22$.

Aprende Fazendo

Páginas 68 a 79

1. O gráfico (I) é uma função de A em B , porque a cada valor de A faz corresponder um e um só valor de B .

O gráfico (II) é uma função de A em B , porque a cada valor de A faz corresponder um e um só valor de B .

O gráfico (III) não é uma função de A em B , porque ao elemento -1 do conjunto A faz corresponder os elementos 0 e 9 do conjunto B .

O gráfico (IV) não é uma função de A em B , porque ao elemento 0 do conjunto A não corresponde qualquer elemento do conjunto B .

O gráfico (V) não é uma função de A em B , porque contém o par ordenado $(3, 6)$ e 3 não é um elemento do conjunto A . Assim, apenas os gráficos (I) e (II) são gráficos de funções de A em B .

(Opção A)

2. Os gráficos (I) e (IV) não representam funções reais de variável real porque contêm valores de x aos quais corresponde mais do que um valor de y . Assim, apenas os gráficos (II) e (III) representam funções reais de variável real.

(Opção C)

3. O perímetro do quadrado é dado pela expressão $p = 4l$, onde l representa a medida do comprimento do seu lado. Assim, $l = \frac{p}{4}$. A área do quadrado é dada por $A = l^2$. Substituindo l nesta expressão, obtém-se a função que relaciona a área de um quadrado com o seu perímetro:

$$A(p) = \left(\frac{p}{4}\right)^2 = \frac{p^2}{16}$$

(Opção B)

4. $f(2a) = 2a + a = (a + a) + a = f(a) + a$

(Opção C)

5.

- a) O gráfico da função g obtém-se do gráfico da função f por meio de uma translação de vetor $\vec{v}\left(0, \frac{5}{2}\right)$, o que significa que a função g não tem zeros.

(Opção D)

- b) Para que $f(x) = k$ tenha 3 soluções, k tem de pertencer ao conjunto $[2, 3]$.

(Opção C)

6. A função f não tem mínimo relativo em a , pois a não é um elemento do domínio da função.

A função g tem mínimo relativo em a , pois existe pelo menos uma vizinhança r de a em que todos os objetos têm imagens superiores a $g(a)$.

A função h não tem mínimo relativo em a , pois qualquer vizinhança r de a admite objetos com imagens menores do que $h(a)$.

A função i tem mínimo relativo em a , pois existe pelo menos uma vizinhança r de a em que todos os objetos têm imagens superiores a $i(a)$.

Assim, apenas as funções g e i têm mínimo relativo em a .

(Opção A)

7. O gráfico da função definida por $f(x - 3)$ obtém-se do gráfico da função f por meio de uma translação de vetor $(3, 0)$, o que significa que esta função tem um zero no intervalo $[1, 6]$, mas nada se pode concluir sobre o que se passa no intervalo $[-5, 0]$.

O gráfico da função definida por $f(x) + 3$ obtém-se do gráfico da função f por meio de uma translação de vetor $(0, 3)$, o que significa que nada se pode afirmar acerca dos zeros desta função.

O gráfico da função definida por $f(x) - 3$ obtém-se do gráfico da função f por meio de uma translação de vetor $(0, -3)$, o que significa que nada se pode afirmar acerca dos zeros desta função.

O gráfico da função definida por $f(x + 3)$ obtém-se do gráfico da função f por meio de uma translação de vetor $(-3, 0)$, o que significa que esta função tem, necessariamente, um zero no intervalo $[-5, 0]$.

(Opção D)

8. O gráfico da função g obtém-se do gráfico da função f por meio de uma translação de vetor $(-2, 0)$, seguida de uma reflexão de eixo Ox e de uma translação de vetor $(0, -2)$, pelo que $g(x) = -f(x + 2) - 2$.

(Opção B)

9. O gráfico da função definida por $f(x - 3)$ obtém-se do gráfico de f por meio de uma translação de vetor $(3, 0)$, o que significa que será simétrico em relação ao eixo Oy . Logo, a função definida por $f(x - 3)$ é par.

(Opção A)

10.

- a) O gráfico da função g obtém-se do gráfico da função f por meio de uma translação de vetor $(-4, 0)$, o que significa que os zeros de g são $-4 - 4 = -8$ e $1 - 4 = -3$.

(Opção D)

- b) $D_h = \{x \in \mathbb{R}: f(x) > 0\} =]-4, -1[\cup]1, +\infty[$

(Opção B)

11.

- a) A afirmação (I) é falsa, pois f não é injetiva, logo não admite inversa. A afirmação (II) é falsa, pois o gráfico de f não é simétrico em relação ao eixo Oy , logo f não é uma função par. A afirmação (III) é verdadeira, pois o gráfico da função g é simétrico em relação à origem do referencial, logo g é uma função ímpar.

(Opção C)

- b) $g^{-1}(2) = 2 \neq 0$

$$g^{-1}(-2) = -2 \neq 0$$

$$g \circ f(1) = g(f(1)) = g(-2) = -2 < 0$$

(Opção D)

12. Se a função f é estritamente decrescente, então é injetiva. Logo, não há dois objetos distintos com a mesma imagem, em particular, não há dois objetos distintos cuja imagem seja zero, ou seja, a função não pode ter mais do que um zero.

Se a função f é estritamente decrescente não pode ser uma função par.

O contradomínio da função f não tem de ser \mathbb{R}^- . Basta considerar, por exemplo, a função $f(x) = -x$, de domínio \mathbb{R} , estritamente decrescente no seu domínio, e cujo contradomínio é \mathbb{R} .

(Opção D)

13. Se a função g é par e o ponto $P(a, b)$ pertence ao seu gráfico, então o ponto de coordenadas $(-a, b)$ também pertence ao gráfico de g . Logo, o ponto $(-a, -b)$ não pode pertencer ao gráfico de g , caso contrário, ao objeto a corresponderiam duas imagens diferentes, b e $-b$, e g não seria uma função.

(Opção C)

14. Seja $x > 3$, então $f \circ g(x) = f(g(x)) = f(1) = 2$, pelo que o gráfico da função composta $f \circ g$ só pode ser o gráfico representado na opção B.

(Opção B)

15.

- a) Proposição falsa, pois uma função é uma correspondência que a cada elemento do domínio faz corresponder um e um só elemento do conjunto de chegada.

- b) Proposição falsa, pois a dois objetos diferentes pode corresponder a mesma imagem, por exemplo, sendo $f(x) = x^2$, então $f(1) = f(-1) = 1$.
- c) Proposição verdadeira.
- d) Proposição falsa, pois o contradomínio é um subconjunto do conjunto de chegada que pode não coincidir com este.

16.

- a) $A \times B = \{(-1, 2), (-1, 5), (0, 2), (0, 5), (2, 2), (2, 5)\}$
- b) $B \times A = \{(2, -1), (2, 0), (2, 2), (5, -1), (5, 0), (5, 2)\}$
- c) $A \times A = \{(-1, -1), (-1, 0), (-1, 2), (0, -1), (0, 0), (0, 2), (2, -1), (2, 0), (2, 2)\}$
- d) $B \times B = \{(2, 2), (2, 5), (5, 2), (5, 5)\}$

17. Os subconjuntos C e D podem ser gráficos de funções de A em B .

O subconjunto E não pode ser gráfico de uma função de A em B , pois ao elemento -1 de A correspondem os elementos 0 e 8 de B .

O subconjunto F não pode ser gráfico de uma função de A em B , pois ao elemento 0 de A não corresponde qualquer elemento de B .

O subconjunto G não pode ser gráfico de uma função de A em B , pois contém o par ordenado $(3, 6)$ e 3 não é um elemento de A .

18.

- a) $D_f = \mathbb{N}$ e $D_g = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, logo os domínios de f e g são diferentes, pelo que as funções f e g não são iguais.

- b) $f|_A = g$

| | | | | | |
|-----|---|---|---|----|----|
| x | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| y | 5 | 7 | 9 | 11 | 13 |

Cálculos auxiliares

$$f(1) = 2 \times 1 + 3 = 2 + 3 = 5$$

$$f(2) = 2 \times 2 + 3 = 4 + 3 = 7$$

$$f(3) = 2 \times 3 + 3 = 6 + 3 = 9$$

$$f(4) = 2 \times 4 + 3 = 8 + 3 = 11$$

$$f(5) = 2 \times 5 + 3 = 10 + 3 = 13$$

- c) $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, com $h(x) = 2x + 3$.

19. As funções f, g, h, j, k e l são funções injetivas, pois para cada uma destas funções, objetos distintos têm imagens distintas.

A função i não é injetiva, pois, por exemplo, aos elementos -1 e 1 do domínio corresponde a mesma imagem, 1 .

A função m não é injetiva, pois, por exemplo, aos elementos 1 e 8 do domínio corresponde a mesma imagem, 2 .

As funções f, i, j e k são sobrejetivas, pois, para cada uma delas, todos os elementos do conjunto de chegada são imagem de pelo menos um elemento do domínio.

A função g não é sobrejetiva, pois o elemento 9 do conjunto B não é imagem de qualquer elemento do conjunto A .

A função h não é sobrejetiva, pois, por exemplo, os elementos ímpares do conjunto de chegada não são imagem de qualquer elemento do conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.

A função l não é sobrejetiva, pois os elementos pertencentes ao conjunto $[0, 2[$ não são imagem de qualquer elemento do conjunto $[1, 6]$.

A função m não é sobrejetiva, pois, por exemplo, o elemento 0 não é imagem de qualquer elemento do domínio.

As funções f , j e k são bijetivas porque são simultaneamente injetivas e sobrejetivas.

A função i é sobrejetiva, mas não é injetiva, logo não é bijetiva.

As funções g , h e l são injetivas, mas não são sobrejetivas, logo não são bijetivas.

20.

a) Proposição verdadeira.

b) Proposição verdadeira.

c) Proposição falsa, por exemplo, $f: \{1, 2, 3\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, onde $f(x) = 2x$ é uma função injetiva, mas não é bijetiva uma vez que não é uma função sobrejetiva.

d) Proposição falsa, por exemplo, $f: \{-2, -1, 0, 1, 2\} \rightarrow \{0, 1, 4\}$, onde $f(x) = x^2$ é uma função sobrejetiva, mas não é bijetiva uma vez que não é uma função injetiva.

e) Proposição verdadeira.

f) Proposição verdadeira.

g) Proposição verdadeira.

21.

$$\text{a) } g(f(4)) = g(\sqrt{5-4}) = g(1) = 1^2 - 1 = 0$$

$$\text{b) } f(g(1)) = f(1^2 - 1) = f(0) = \sqrt{5-0} = \sqrt{5}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } f \circ g(2) + g \circ f(-5) &= f(g(2)) + g(f(-5)) = f(2^2 - 1) + g(\sqrt{5-5}) \\ &= f(3) + g(\sqrt{10}) \\ &= \sqrt{5-3} + (\sqrt{10})^2 - 1 \\ &= \sqrt{2} + 9 \\ &= 9 + \sqrt{2} \end{aligned}$$

22.

$$\text{a) } g \circ f(x) = g(f(x)) = g(3x - 2) = 4(3x - 2) + 1 = 12x - 8 + 1 = 12x - 7$$

$$\text{b) } f \circ g(x) = f(g(x)) = f(4x + 1) = 3(4x + 1) - 2 = 12x + 3 - 2 = 12x + 1$$

$$\text{c) } f \circ f(x) = f(f(x)) = f(3x - 2) = 3(3x - 2) - 2 = 9x - 6 - 2 = 9x - 8$$

$$\text{d) } g \circ g(x) = g(g(x)) = g(4x + 1) = 4(4x + 1) + 1 = 16x + 4 + 1 = 16x + 5$$

23.

a) A função f é injetiva, pois a cada objeto corresponde uma imagem distinta.

A função f é sobrejetiva, pois todos os elementos do conjunto B são imagem de um elemento do conjunto A .

Logo, a função f é bijetiva, pois é simultaneamente injetiva e sobrejetiva.

b)

$$f^{-1}: B \rightarrow A$$

| x | y |
|-----|-----|
| -6 | -3 |
| -4 | -2 |
| 0 | 0 |
| 2 | 1 |
| 4 | 2 |

24.

a) $D_f = [-5, 6[$

$D'_f =]-6, 6]$

Os zeros de f são -5 e -2 .

A função f é positiva em $]-5, -2[$ e em $[0, 6[$, é negativa em $]-2, 0[$.

b) $D_g =]-\infty, 6]$

$D'_g = [-6, +\infty[$

Os zeros de g são -5 e 4 .

A função g é positiva em $]-\infty, -5[$ e em $]4, 6]$, é negativa em $]-5, 4[$.

c) $D_h = \mathbb{R}$

$D'_h =]-\infty, 4]$

Os zeros de h são -6 , -5 e 3 .

A função h é positiva em $]-6, -5[$ e em $]3, +\infty[$, é negativa em $]-\infty, -6[$ e em $]-5, 3[$.

25. As funções f e g são funções pares, pois os seus gráficos são simétricos relativamente ao eixo Oy .

As funções h e i são funções ímpares, pois os seus gráficos são simétricos relativamente à origem do referencial.

As funções j e k não são funções pares nem ímpares, pois os seus gráficos não são simétricos em relação ao eixo Oy nem em relação à origem do referencial.

26.

a) A função f é injetiva, pois a cada elemento do conjunto A corresponde um elemento distinto do conjunto B . A função f é sobrejetiva, pois todos os elementos do conjunto B são imagem de um elemento do conjunto A .

b) (i) $f|_{\{-2,0,3\}} \rightarrow B$

| x | y |
|-----|-----|
| -2 | 4 |
| 0 | 12 |
| 3 | 8 |

(ii) $f^{-1}: B \rightarrow A$

| x | y |
|-----|-----|
| 0 | -1 |
| 4 | -2 |
| 8 | 3 |
| 12 | 0 |

(iii) $g \circ f(-2) = g(f(-2)) = g(4) = 21$

$g \circ f(-1) = g(f(-1)) = g(0) = 20$

$g \circ f(0) = g(f(0)) = g(12) = 31$

$g \circ f(3) = g(f(3)) = g(8) = 30$

$g \circ f: A \rightarrow \{20, 21, 30, 31\}$

| x | y |
|-----|-----|
| -2 | 21 |
| -1 | 20 |
| 0 | 31 |
| 3 | 30 |

(iv) $f^{-1} \circ f = Id_A$

| x | y |
|----|----|
| -2 | -2 |
| -1 | -1 |
| 0 | 0 |
| 3 | 3 |

27.

a) $D_{g \circ f} = \{x \in D_f : f(x) \in D_g\} = \{x \in \mathbb{R} \setminus \{2\} : f(x) \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = g\left(\frac{x+1}{x-2}\right) = 2\left(\frac{x+1}{x-2}\right) + 3 = \frac{2x+2+3(x-2)}{x-2} = \frac{2x+2+3x-6}{x-2} = \frac{5x-4}{x-2}$$

b) $D_{f \circ g} = \{x \in D_g : g(x) \in D_f\} = \{x \in \mathbb{R} : g(x) \in \mathbb{R} \setminus \{2\}\} = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\}$

Cálculo auxiliar

$$g(x) \in \mathbb{R} \setminus \{2\} \Leftrightarrow 2x+3 \neq 2 \Leftrightarrow 2x \neq -1 \Leftrightarrow x \neq -\frac{1}{2}$$

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = f(2x+3) = \frac{2x+3+1}{2x+3-2} = \frac{2x+4}{2x+1}$$

28.

a) $D_f = \mathbb{R}$

b) $D_g = \mathbb{R}$

c) $D_h = \{x \in \mathbb{R} : x-3 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{3\}$

d) $D_i = \{x \in \mathbb{R} : 3-x^2 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$

Cálculo auxiliar

$$3-x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 3 \Leftrightarrow x = -\sqrt{3} \vee x = \sqrt{3}$$

e) $D_j = \{x \in \mathbb{R} : x-3 \geq 0\} = [3, +\infty[$

Cálculo auxiliar

$$x-3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 3$$

f) $D_k = \{x \in \mathbb{R} : 3-x > 0\} =]-\infty, 3[$

Cálculo auxiliar

$$3-x > 0 \Leftrightarrow -x > -3 \Leftrightarrow x < 3$$

g) $D_l = \mathbb{R}$

h) $D_m = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

29. $f \circ g(x) = 6x+9 \Leftrightarrow f(g(x)) = 6x+9$

$$\Leftrightarrow 2g(x) - 5 = 6x+9$$

$$\Leftrightarrow 2g(x) = 6x+14$$

$$\Leftrightarrow g(x) = 3x+7$$

30.

a) $D_f = \mathbb{R} = D'_{f^{-1}}$

$$2x + 1 = y \Leftrightarrow 2x = y - 1 \Leftrightarrow x = \frac{y-1}{2}$$

$$f^{-1}(x) = \frac{x-1}{2}$$

$$D_{f^{-1}} = \mathbb{R}$$

b) $D_g = \mathbb{R} = D'_{g^{-1}}$

$$1 - 4x = y \Leftrightarrow -4x = y - 1 \Leftrightarrow 4x = 1 - y \Leftrightarrow x = \frac{1-y}{4}$$

$$g^{-1}(x) = \frac{1-x}{4}$$

$$D_{g^{-1}} = \mathbb{R}$$

c) $D_h = \mathbb{R} = D'_{h^{-1}}$

$$x^3 + 1 = y \Leftrightarrow x^3 = y - 1 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{y-1}$$

$$h^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-1}$$

$$D_{h^{-1}} = \mathbb{R}$$

d) $D_i = \{x \in \mathbb{R}: x + 1 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-1\} = D'_{i^{-1}}$

$$\frac{1}{x+1} = y \Leftrightarrow 1 = xy + y \Leftrightarrow xy = 1 - y \Leftrightarrow x = \frac{1-y}{y}$$

$$i^{-1}(x) = \frac{1-x}{x}$$

$$D_{i^{-1}} = \{x \in \mathbb{R}: x \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

e) $D_j = \{x \in \mathbb{R}: 3x - 1 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{3}\right\} = D'_{j^{-1}}$

$$\frac{2x}{3x-1} = y \Leftrightarrow 2x = 3xy - y \Leftrightarrow 3xy - 2x = y \Leftrightarrow x(3y - 2) = y \Leftrightarrow x = \frac{y}{3y-2}$$

$$j^{-1}(x) = \frac{x}{3x-2}$$

$$D_{j^{-1}} = \{x \in \mathbb{R}: 3x - 2 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{2}{3}\right\}$$

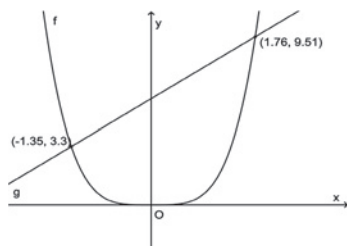
f) $D_k = \{x \in \mathbb{R}: x + 5 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-5\} = D'_{k^{-1}}$

$$\frac{3x-2}{x+5} = y \Leftrightarrow 3x - 2 = xy + 5y \Leftrightarrow 3x - xy = 2 + 5y \Leftrightarrow x(3 - y) = 5y + 2 \Leftrightarrow x = \frac{5y+2}{3-y}$$

$$k^{-1}(x) = \frac{5x+2}{3-x}$$

$$D_{k^{-1}} = \{x \in \mathbb{R}: 3 - x \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{3\}$$

31. $f(x) \leq g(x) \Leftrightarrow x^4 \leq 2x + 6$



Logo, $a \approx -1,35$ e $b \approx 1,76$.

32.

- a) $f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]-2, 2[$
- b) $g(x) \leq 0 \Leftrightarrow x \in [-5, 0]$
- c) $f(x) > g(x) \Leftrightarrow x \in]-3; 1,5[$
- d) $g(x) \geq f(x) \Leftrightarrow x \in [-7, -3] \cup [1, 4]$
- e) $f(x) = -4 \Leftrightarrow x = -5$
- f) $g(x) = 0 \Leftrightarrow x = -5 \vee x = 0$
- g) $f(x) = -3 \Leftrightarrow x \in [2,5; 4] \cup \{-6, -3\}$

33.

- a) $D_f = \mathbb{R}$, logo $\forall x \in D_f, -x \in D_f$
 $f(-x) = 5(-x)^6 = 5x^6 = f(x)$, $\forall x \in D_f$, ou seja, f é uma função par.
- b) $D_g = \mathbb{R}$, logo $\forall x \in D_g, -x \in D_g$
 $g(-x) = (-x)^3 - 2(-x) = -x^3 + 2x = -(x^3 - 2x) = -g(x)$, $\forall x \in D_g$, ou seja, g é uma função ímpar.
- c) $D_h = \mathbb{R}$, logo $\forall x \in D_h, -x \in D_h$
 $h(-x) = (-x)^4 + (-x)^2 - 1 = x^4 + x^2 - 1 = h(x)$, $\forall x \in D_h$, ou seja, h é uma função par.
- d) $D_i = \mathbb{R}$, logo $\forall x \in D_i, -x \in D_i$
 $i(-x) = 5(-x) - 4 = -5x - 4$
 $-i(x) = -(5x - 4) = -5x + 4$
 Ou seja, não é verdade que $i(-x) = i(x)$, $\forall x \in D_i$ nem que $i(-x) = -i(x)$, $\forall x \in D_i$. Logo, i não é par nem ímpar.
- e) $D_j = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, logo $\forall x \in D_j, -x \in D_j$
 $j(-x) = \frac{1}{(-x)^2} = \frac{1}{x^2} = j(x)$, $\forall x \in D_j$, ou seja, j é uma função par.
- f) $D_k = \mathbb{R} \setminus \{2\}$, ou seja, -2 pertence ao domínio da função k mas 2 não pertence ao domínio da função k , assim, a função k não é par nem ímpar.
- g) $D_l = \mathbb{R}$, logo $\forall x \in D_l, -x \in D_l$
 $l(-x) = \sqrt[3]{-x} = -\sqrt[3]{x} = -l(x)$, $\forall x \in D_l$, ou seja, l é uma função ímpar.
- h) $D_m = \mathbb{R}_0^+$, ou seja, 1 , por exemplo, pertence ao domínio da função m mas -1 não pertence ao domínio da função m , assim, a função m não é par nem ímpar.

34.

a) $D = [-4, 6]$ $D' = [0, 7]$

A função tem um zero.

b) $D = [-7, 3]$ $D' = [-3, 4]$

A função tem três zeros.

c) $D = [-4, 6]$ $D' = [-4, 3]$

A função tem três zeros.

d) $D = [-6, 4]$ $D' = [-3, 4]$

A função tem três zeros.

e) $D = [-6, 4]$ $D' = [-4, 3]$

A função tem três zeros.

f) $D = [-4, 6]$ $D' = [-6, 8]$

A função tem três zeros.

g) $D = [-2, 3]$ $D' = [-3, 4]$

A função tem três zeros.

h) $D = [-3, 7]$ $D' = [-10, 11]$

A função tem três zeros.

35.

a) A função f tem máximo absoluto 5 em $x = 4$ e tem mínimo absoluto -4 em $x = 0$, tem máximos relativos 3 em $x = -4$ e 5 em $x = 4$ e tem mínimos relativos 0 em $x = -6$ e em $x = 6$ e -4 em $x = 0$.

A função g tem máximo absoluto 5 em $x = 0$. A função h tem máximo absoluto 6 em $x = 0$ e tem mínimo absoluto -4 em $x = 7$ e em $x \in [1, 3]$, tem máximos relativos 6 em $x = 0$ e 0 em $x = 5$ e tem mínimos relativos -4 em $x = 7$ e em $x \in [1, 3]$ e 3 em $x = -5$.

b)

| x | -6 | | -4 | | 0 | | 4 | | 6 |
|----------------|----|---|----|---|----|---|---|---|---|
| Varição de f | 0 | ↗ | 3 | ↘ | -4 | ↗ | 5 | ↘ | 0 |

A função f é crescente em $[-6, -4]$ e em $[0, 4]$ e é decrescente em $[-4, 0]$ e em $[4, 6]$.

| x | $-\infty$ | 0 | $+\infty$ |
|----------------|-----------|---|-----------|
| Varição de g | ↗ | 5 | ↘ |

A função g é crescente em $]-\infty, 0]$ e é decrescente em $[0, +\infty[$.

| x | -5 | | 0 | | 2 | | 3 | | 5 | | 7 |
|----------------|----|---|---|---|----|---|----|---|---|---|----|
| Varição de h | +3 | ↗ | 6 | ↘ | -4 | → | -4 | ↗ | 0 | ↘ | -4 |

A função h é crescente em $[-5, 0]$ e em $[3, 5]$, é decrescente em $[0, 2]$ e em $[5, 7]$ e é constante em $[2, 3]$.

c) (i) A função f é injetiva em $]4, 6[$, por exemplo.

(ii) A função f é negativa e estritamente crescente em $]0, 2[$, por exemplo.

(iii) O gráfico da função f apresenta a concavidade voltada para cima em $] -2, 2[$, por exemplo.

(iv) O gráfico da função f apresenta a concavidade voltada para baixo em $] -6, -2[$, por exemplo.

36.

a) $f(C \cup D) = f(\{-1, 1, 2, 3\}) = \{0, 6, 9\}$

$$f(C) \cup f(D) = f(\{-1, 2, 3\}) \cup f(\{1, 3\}) = \{0, 6, 9\} \cup \{0, 9\} = \{0, 6, 9\} = f(C \cup D)$$

b) $f(C \cap D) = f(\{3\}) = \{9\}$

$$f(C) \cap f(D) = f(\{-1, 2, 3\}) \cap f(\{1, 3\}) = \{0, 6, 9\} \cap \{0, 9\} = \{0, 9\} \neq f(C \cap D)$$

37.

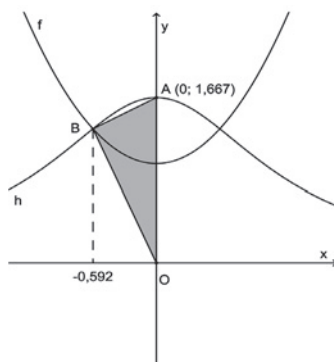
a) $f \circ g(x) = 3 \Leftrightarrow f(g(x)) = 3 \Leftrightarrow g(x) = 2 \Leftrightarrow x = 2 \vee x = 3$

Logo, $x \in \{2, 3\}$.

b) $g \circ f(x) = 2 \Leftrightarrow g(f(x)) = 2 \Leftrightarrow f(x) = 2 \vee f(x) = 3 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = 2$

Logo, $x \in \{1, 2\}$.

38. $h(x) = g \circ f(x) = g(f(x)) = g(x^2 + 1) = \frac{5}{2(x^2+1)+1} = \frac{5}{2x^2+2+1} = \frac{5}{2x^2+3}$



$$A_{[OAB]} = \frac{1,667 \times 0,592}{2} \approx 0,49 \text{ u. a.}$$

39. Seja $f(x) = ax + b$.

$$f \circ g(x) = 12x + 1 \Leftrightarrow f(g(x)) = 12x + 1 \Leftrightarrow f(4x + 1) = 12x + 1 \Leftrightarrow a(4x + 1) + b = 12x + 1$$

$$\Leftrightarrow 4ax + a + b = 12x + 1$$

$$\text{Logo, } \begin{cases} 4a = 12 \\ a + b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = -2 \end{cases}.$$

Assim, uma expressão analítica da função f nas condições pedidas é $f(x) = 3x - 2$.

40. Se a função f é bijetiva, então é invertível. Tem-se então que:

$$(f \circ f) \circ f^{-1}(x) = (f \circ f)(f^{-1}(x)) = \left(f \left(f(f^{-1}(x)) \right) \right) = f(f \circ f^{-1}(x))$$

$$= f(x), \text{ já que } f \circ f^{-1} = \text{Id.}$$

Unidade 5 – Estudo elementar de algumas funções

Páginas 80 a 133

51.

a) $f(x) = 3x - 6$

$$3x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

A função f tem um zero: 2

Como f é uma função afim e o seu gráfico é uma reta de declive positivo, então f é estritamente crescente. Assim, f é negativa em $]-\infty, 2[$ e é positiva em $]2, +\infty[$.

b) $g(x) = -4x - 2$

$$-4x - 2 = 0 \Leftrightarrow -4x = 2 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$$

A função g tem um zero: $-\frac{1}{2}$

Como g é uma função afim e o seu gráfico é uma reta de declive negativo, então g é estritamente decrescente. Assim, g é positiva em $]-\infty, -\frac{1}{2}[$ e é negativa em $]-\frac{1}{2}, +\infty[$.

c) $h(x) = x$

A função h tem um zero: 0

Como h é uma função afim e o seu gráfico é uma reta de declive positivo, então h é estritamente crescente. Assim, h é negativa em $]-\infty, 0[$ e é positiva em $]0, +\infty[$.

d) $i(x) = -5$

A função i não tem zeros. A função i é uma função constante e é negativa em \mathbb{R} .

52.

a) Seja $f(x) = ax + b$. Como se pretende que f seja uma função estritamente decrescente, então $a < 0$, por exemplo, $a = -1$. Assim, $f(x) = -x + b$.

Uma vez que $f(2) = 0$, então $0 = -2 + b \Leftrightarrow b = 2$. Logo, $f(x) = -x + 2$, por exemplo.

b) Seja $f(x) = ax + b$. Como $f(0) = 4$, então $4 = 0 + b \Leftrightarrow b = 4$. Logo, $f(x) = ax + 4$. Para que f seja positiva em $]-\frac{1}{3}, +\infty[$, o declive da reta que a representa tem de ser positivo e a função tem de ter um zero em $-\frac{1}{3}$. Assim:

$$f\left(-\frac{1}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow a \times \left(-\frac{1}{3}\right) + 4 = 0 \Leftrightarrow -a + 12 = 0 \Leftrightarrow a = 12$$

Logo, $f(x) = 12x + 4$.

53. $f(x) = 2x - 8$ $g(x) = -5x + 1$

a) $f(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 8 = 0 \Leftrightarrow 2x = 8 \Leftrightarrow x = 4$

b) $g(x) = 0 \Leftrightarrow -5x + 1 = 0 \Leftrightarrow -5x = -1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{5}$

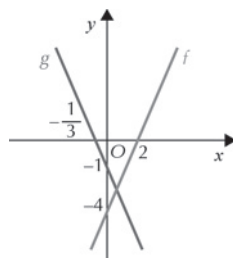
c) $f(x) = g(x) \Leftrightarrow 2x - 8 = -5x + 1 \Leftrightarrow 7x = 9 \Leftrightarrow x = \frac{9}{7}$

d) $f(x) < 0 \Leftrightarrow 2x - 8 < 0 \Leftrightarrow 2x < 8 \Leftrightarrow x < 4 \Leftrightarrow x \in]-\infty, 4[$

e) $g(x) \geq 3 \Leftrightarrow -5x + 1 \geq 3 \Leftrightarrow -5x \geq 2 \Leftrightarrow 5x \leq -2 \Leftrightarrow x \leq -\frac{2}{5} \Leftrightarrow x \in]-\infty, -\frac{2}{5}]$

54.

a)



b) $f(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 4 = 0 \Leftrightarrow 2x = 4 \Leftrightarrow x = 2$

Logo, $A(2, 0)$.

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow -3x - 1 = 0 \Leftrightarrow -3x = 1 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{3}$$

Logo, $B\left(-\frac{1}{3}, 0\right)$.

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow 2x - 4 = -3x - 1 \Leftrightarrow 5x = 3 \Leftrightarrow x = \frac{3}{5}$$

$$f\left(\frac{3}{5}\right) = 2 \times \frac{3}{5} - 4 = \frac{6}{5} - 4 = -\frac{14}{5}.$$

Logo, $C\left(\frac{3}{5}, -\frac{14}{5}\right)$.

$$\text{Assim, } A_{[ABC]} = \frac{\left(\frac{1}{3} + 2\right) \times \frac{14}{5}}{2} = \frac{\frac{7}{3} \times \frac{14}{5}}{2} = \frac{7 \times 14}{3 \times 5 \times 2} = \frac{49}{15} \text{ u.a.}$$

55.

a) $f(x) = 3x^2 + 1$

i. Vértice $(0, 1)$ Eixo de simetria: $x = 0$

ii. Concavidade voltada para cima em \mathbb{R} .

iii. $D = \mathbb{R}$

iv. $D' = [1, +\infty[$

v. $f(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -\frac{1}{3}$, logo f não tem zeros.

vi. A função f é estritamente decrescente em $]-\infty, 0]$ e é estritamente crescente em $[0, +\infty[$.

$$g(x) = -2x^2 + 4$$

i. Vértice $(0, 4)$ Eixo de simetria: $x = 0$

ii. Concavidade voltada para baixo em \mathbb{R} .

iii. $D = \mathbb{R}$

iv. $D' =]-\infty, 4]$

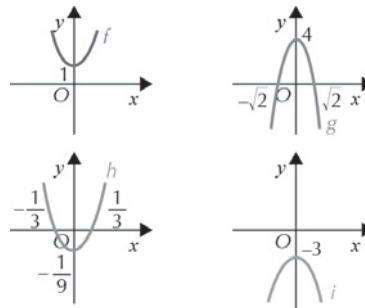
v. $g(x) = 0 \Leftrightarrow -2x^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 2 \Leftrightarrow x = \sqrt{2} \vee x = -\sqrt{2}$, logo g tem dois zeros: $\sqrt{2}$ e $-\sqrt{2}$

vi. A função g é estritamente crescente em $]-\infty, 0]$ e é estritamente decrescente em $[0, +\infty[$.

$$h(x) = x^2 - \frac{1}{9}$$

i. Vértice $\left(0, -\frac{1}{9}\right)$ Eixo de simetria: $x = 0$

- ii. Concavidade voltada para cima em \mathbb{R} .
 - iii. $D = \mathbb{R}$
 - iv. $D' = \left[-\frac{1}{9}, +\infty\right[$
 - v. $h(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - \frac{1}{9} = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{9} \Leftrightarrow x = \frac{1}{3} \vee x = -\frac{1}{3}$, logo h tem dois zeros: $\frac{1}{3}$ e $-\frac{1}{3}$
 - vi. A função h é estritamente decrescente em $]-\infty, 0]$ e é estritamente crescente em $[0, +\infty[$.
 $i(x) = -x^2 - 3$
 - i. Vértice $(0, -3)$ Eixo de simetria: $x = 0$
 - ii. Concavidade voltada para baixo em \mathbb{R} .
 - iii. $D = \mathbb{R}$
 - iv. $D' =]-\infty, -3]$
 - v. $i(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -3$, logo i não tem zeros.
 - vi. A função i é estritamente crescente em $]-\infty, 0]$ e é estritamente decrescente em $[0, +\infty[$.
- b)



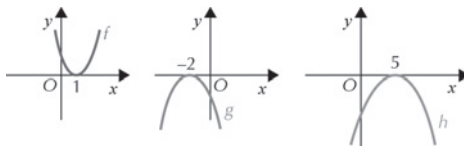
56.

- a) $f(x) = 3(x - 1)^2$
 - i. Vértice $(1, 0)$ Eixo de simetria: $x = 1$
 - ii. Concavidade voltada para cima em \mathbb{R} .
 - iii. $D = \mathbb{R}$
 - iv. $D' = \mathbb{R}_0^+$
 - v. $f(x) = 0 \Leftrightarrow 3(x - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$, logo f tem um zero: 1
 - vi. A função f é estritamente decrescente em $]-\infty, 1]$ e é estritamente crescente em $[1, +\infty[$.
 $g(x) = -(x + 2)^2$
 - i. Vértice $(-2, 0)$ Eixo de simetria: $x = -2$
 - ii. Concavidade voltada para baixo em \mathbb{R} .
 - iii. $D = \mathbb{R}$
 - iv. $D' = \mathbb{R}_0^-$
 - v. $g(x) = 0 \Leftrightarrow -(x + 2)^2 = 0 \Leftrightarrow x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$, logo g tem um zero: -2
 - vi. A função g é estritamente crescente em $]-\infty, -2]$ e é estritamente decrescente em $[-2, +\infty[$.
 $h(x) = -\frac{1}{2}(x - 5)^2$
 - i. Vértice $(5, 0)$ Eixo de simetria: $x = 5$
 - ii. Concavidade voltada para baixo em \mathbb{R} .
 - iii. $D = \mathbb{R}$
 - iv. $D' = \mathbb{R}_0^-$

v. $h(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}(x-5)^2 = 0 \Leftrightarrow x-5 = 0 \Leftrightarrow x = 5$, logo h tem um zero: 5

vi. A função h é estritamente crescente em $]-\infty, 5]$ e é estritamente decrescente em $[5, +\infty[$.

b)



57.

a) $f(x) = 3(x-1)^2 + 2$

i. Vértice (1, 2) Eixo de simetria: $x = 1$

ii. Concavidade voltada para cima em \mathbb{R} .

iii. $D = \mathbb{R}$

iv. $D' = [2, +\infty[$

v. $f(x) = 0 \Leftrightarrow 3(x-1)^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 = -\frac{2}{3}$, logo f não tem zeros.

vi. A função f é estritamente decrescente em $]-\infty, 1]$ e é estritamente crescente em $[1, +\infty[$.

$$g(x) = -3(x-2)^2 + \frac{2}{3}$$

i. Vértice $(2, \frac{2}{3})$ Eixo de simetria: $x = 2$

ii. Concavidade voltada para baixo em \mathbb{R} .

iii. $D = \mathbb{R}$

iv. $D' =]-\infty, \frac{2}{3}]$

v. $g(x) = 0 \Leftrightarrow -3(x-2)^2 + \frac{2}{3} = 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 = \frac{2}{9} \Leftrightarrow x-2 = \frac{\sqrt{2}}{3} \vee x-2 = -\frac{\sqrt{2}}{3}$

$$\Leftrightarrow x = 2 + \frac{\sqrt{2}}{3} \vee x = 2 - \frac{\sqrt{2}}{3}, \text{ logo } g \text{ tem dois zeros: } 2 + \frac{\sqrt{2}}{3} \text{ e } 2 - \frac{\sqrt{2}}{3}$$

vi. A função g é estritamente crescente em $]-\infty, 2]$ e é estritamente decrescente em $[2, +\infty[$.

$$h(x) = \frac{1}{2}(x+5)^2 - 2$$

i. Vértice (-5, -2) Eixo de simetria: $x = -5$

ii. Concavidade voltada para cima em \mathbb{R} .

iii. $D = \mathbb{R}$

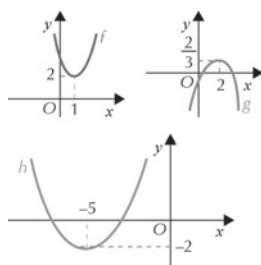
iv. $D' = [-2, +\infty[$

v. $h(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}(x+5)^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow (x+5)^2 = 4 \Leftrightarrow x+5 = 2 \vee x+5 = -2$

$$\Leftrightarrow x = -3 \vee x = -7, \text{ logo } h \text{ tem dois zeros: } -7 \text{ e } -3$$

vi. A função h é estritamente decrescente em $]-\infty, -5]$ e é estritamente crescente em $[-5, +\infty[$.

b)



58.

a) $f(x) = a(x - h)^2 + k$

Como o vértice da parábola que representa a função tem coordenadas $(1, 5)$, então

$f(x) = a(x - 1)^2 + 5$. Como o gráfico da função contém o ponto de coordenadas $(-1, 3)$, então:

$$f(-1) = 3 \Leftrightarrow a(-1 - 1)^2 + 5 = 3 \Leftrightarrow 4a = -2 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{2}$$

Logo, $f(x) = -\frac{1}{2}(x - 1)^2 + 5$

b) $f(x) = a(x - h)^2 + k$

Como o contradomínio da função é $[4, +\infty[$, então $f(x) = a(x - h)^2 + 4$.

Uma vez que o eixo de simetria da parábola que representa a função é $x = -2$, então

$f(x) = a(x + 2)^2 + 4$. O gráfico da função intersecta o eixo das ordenadas no ponto de coordenadas $(0, 8)$, então:

$$f(0) = 8 \Leftrightarrow a(0 + 2)^2 + 4 = 8 \Leftrightarrow 4a = 4 \Leftrightarrow a = 1$$

Logo, $f(x) = (x + 2)^2 + 4$.

59.

a) $f(x) = 6 - 2(x + 1)^2 = -2(x + 1)^2 + 6$

Vértice: $(-1, 6)$

b) $f(x) = x^2 - 10x + 25 = (x - 5)^2$

Vértice: $(5, 0)$

c) $f(x) = x^2 - 6x + 8$

Abcissa do vértice: $\frac{-(-6)}{2 \times 1} = \frac{6}{2} = 3$

Ordenada do vértice: $f(3) = 3^2 - 6 \times 3 + 8 = 9 - 18 + 8 = -1$

Vértice: $(3, -1)$

d) $f(x) = 2x^2 - 10x + 12$

Abcissa do vértice: $\frac{-(-10)}{2 \times 2} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$

Ordenada do vértice: $f\left(\frac{5}{2}\right) = 2 \times \left(\frac{5}{2}\right)^2 - 10 \times \frac{5}{2} + 12 = \frac{25}{2} - 25 + 12 = -\frac{1}{2}$

Vértice: $\left(\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

e) $f(x) = -x^2 - x - \frac{9}{4}$

Abcissa do vértice: $\frac{-(-1)}{2 \times (-1)} = -\frac{1}{2}$

Ordenada do vértice: $f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - \left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{9}{4} = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{9}{4} = -2$

Vértice: $\left(-\frac{1}{2}, -2\right)$

60.

a) $f(x) = 0 \Leftrightarrow 6 - 2(x+1)^2 = 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 = 3 \Leftrightarrow x+1 = \sqrt{3} \vee x+1 = -\sqrt{3}$
 $\Leftrightarrow x = -1 + \sqrt{3} \vee x = -1 - \sqrt{3}$

Os zeros de f são $-1 + \sqrt{3}$ e $-1 - \sqrt{3}$.

b) $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 10x + 25 = 0 \Leftrightarrow (x-5)^2 = 0 \Leftrightarrow x-5 = 0 \Leftrightarrow x = 5$
 O zero de f é 5.

c) $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 8 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{36-32}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{6 \pm 2}{2} \Leftrightarrow x = 4 \vee x = 2$

Os zeros de f são 2 e 4.

d) $f(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 10x + 12 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{5 \pm 1}{2} \Leftrightarrow x = 3 \vee x = 2$

Os zeros de f são 2 e 3.

e) $f(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2 - x - \frac{9}{4} = 0 \Leftrightarrow 4x^2 + 4x + 9 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{16-144}}{8}$ Equação impossível em \mathbb{R}

A função f não tem zeros.

61. $f(x) = -2x^2 + 3x + k$

Para que a função f não tenha zeros, então $\Delta < 0$.

$$\Delta < 0 \Leftrightarrow 3^2 - 4 \times (-2) \times k < 0 \Leftrightarrow 9 + 8k < 0 \Leftrightarrow k < -\frac{9}{8}$$

62. Uma reta paralela à reta de equação $y = 2x$ terá uma equação da forma $y = 2x + b$.

Pretende-se então que a equação $x^2 - 4x = 2x + b \Leftrightarrow x^2 - 6x - b = 0$ tenha uma única solução. Para isso acontecer tem-se que $\Delta = 0$.

$$\Delta = 0 \Leftrightarrow (-6)^2 - 4 \times 1 \times (-b) = 0 \Leftrightarrow 36 + 4b = 0 \Leftrightarrow b = -9$$

Então:

$$x^2 - 6x + 9 = 0 \Leftrightarrow (x-3)^2 = 0 \Leftrightarrow x-3 = 0 \Leftrightarrow x = 3$$

e

$$y = 3^2 - 4 \times 3 = 9 - 12 = -3$$

Logo, as coordenadas do ponto procurado são (3, -3).

63.

a) $f(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 5x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{25-24}}{-2} \Leftrightarrow x = \frac{-5 \pm 1}{-2} \Leftrightarrow x = 2 \vee x = 3$

A parábola que representa a função f tem concavidade voltada para baixo.

A função f é positiva em $]2, 3[$ e é negativa em $]-\infty, 2[\cup]3, +\infty[$.

b) $g(x) = 0 \Leftrightarrow 2(x-4)^2 - 6 = 0 \Leftrightarrow (x-4)^2 = 3 \Leftrightarrow x-4 = \sqrt{3} \vee x-4 = -\sqrt{3}$
 $\Leftrightarrow x = 4 + \sqrt{3} \vee x = 4 - \sqrt{3}$

A parábola que representa a função g tem concavidade voltada para cima.

A função g é positiva em $]-\infty, 4 - \sqrt{3}[\cup]4 + \sqrt{3}, +\infty[$ e é negativa em $]4 - \sqrt{3}, 4 + \sqrt{3}[$.

64. Uma vez que 1 é um zero da função f e as imagens de 0 e 8 são ambas negativas, então a parábola que representa a função tem a concavidade voltada para baixo e o outro zero da função é 7. Assim, a função é positiva em $]1, 7[$ e é negativa em $]-\infty, 1[\cup]7, +\infty[$.

65.

a) $x^2 - 8x + 15 \leq 0$

Cálculo auxiliar

$$x^2 - 8x + 15 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 60}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{8 \pm 2}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = 5 \vee x = 3$$



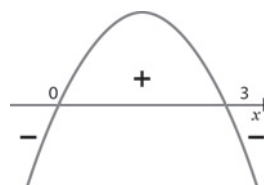
C.S. = $[3, 5]$

b) $3x - x^2 < 0$

Cálculo auxiliar

$$3x - x^2 = 0 \Leftrightarrow x(3 - x) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = 3$$



C.S. = $]-\infty, 0[\cup]3, +\infty[$

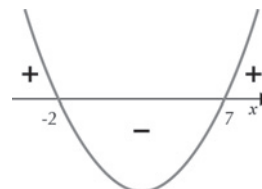
c) $x^2 - 5x < 14 \Leftrightarrow x^2 - 5x - 14 < 0$

Cálculo auxiliar

$$x^2 - 5x - 14 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 56}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{5 \pm 9}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = 7 \vee x = -2$$



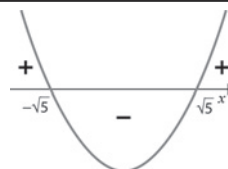
C.S. = $]2, 7[$

d) $x^2 \geq 5 \Leftrightarrow x^2 - 5 \geq 0$

Cálculo auxiliar

$$x^2 - 5 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 5$$

$$\Leftrightarrow x = \sqrt{5} \vee x = -\sqrt{5}$$



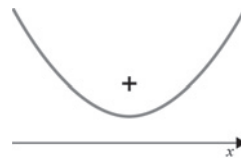
C.S. = $]-\infty, -\sqrt{5}] \cup [\sqrt{5}, +\infty[$

e) $2x^2 + 3x + 4 > 0$

Cálculo auxiliar

$$2x^2 + 3x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 16}}{2}$$

Equação impossível em \mathbb{R} .



C.S. = \mathbb{R}

f) $-2x^2 - 3x - 4 > 0$

Cálculo auxiliar

$$-2x^2 - 3x - 4 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 + 3x + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 16}}{2}$$

Equação impossível em \mathbb{R} .



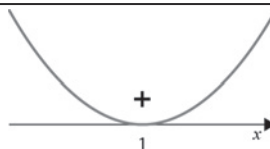
C.S. = \emptyset

g) $x^2 - 2x + 1 \leq 0$

Cálculo auxiliar

$$x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$$



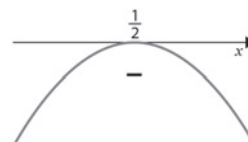
C.S. = $\{1\}$

h) $-x^2 + x - \frac{1}{4} < 0$

Cálculo auxiliar

$$-x^2 + x - \frac{1}{4} = 0 \Leftrightarrow 4x^2 - 4x + 1 = 0 \Leftrightarrow (2x - 1)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

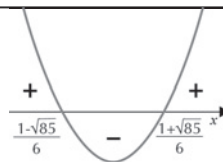


C.S. = $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$

i) $2(x - 1)(x + 2) - 3 < -x^2 + x \Leftrightarrow 2(x^2 + x - 2) - 3 + x^2 - x < 0 \Leftrightarrow 2x^2 + 2x - 4 - 3 + x^2 - x < 0$
 $\Leftrightarrow 3x^2 + x - 7 < 0$

Cálculo auxiliar

$$3x^2 + x - 7 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 84}}{6} \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{85}}{6}$$



C.S. = $\left] \frac{-1 - \sqrt{85}}{6}, \frac{-1 + \sqrt{85}}{6} \right[$

66. $h(t) = 16 + 6t - t^2$

a) $h(0) = 16 + 6 \times 0 - 0^2 = 16$

A distância da varanda ao chão é 16 metros.

$$\text{b) } h(t) = 0 \Leftrightarrow 16 + 6t - t^2 = 0 \Leftrightarrow -t^2 + 6t + 16 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{-6 \pm \sqrt{36+64}}{-2}$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{-6 \pm 10}{-2} \Leftrightarrow t = 8 \vee t = -2$$

O foguete chega ao chão ao fim de 8 segundos.

$$\text{c) Abcissa do vértice: } \frac{-6}{2 \times (-1)} = 3$$

$$\text{Ordenada do vértice: } h(3) = 16 + 6 \times 3 - 3^2 = 16 + 18 - 9 = 25$$

O foguete atingiu a altura máxima 3 segundos após ter sido lançado. A altura máxima atingida foi 25 metros.

$$\text{d) } h(t) > 16 \Leftrightarrow 16 + 6t - t^2 > 16 \Leftrightarrow 6t - t^2 > 0 \Leftrightarrow t \in]0, 6[$$

Cálculo auxiliar

$$6t - t^2 = 0 \Leftrightarrow t(6 - t) = 0 \Leftrightarrow t = 0 \vee t = 6$$

O foguete esteve acima dos 16 metros durante 6 segundos.

$$\text{67. Opção (i): } -x^2 + 8x = 0 \Leftrightarrow x(-x + 8) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 8$$

$$\text{Abcissa do vértice: } \frac{0+8}{2} = 4$$

$$\text{Ordenada do vértice: } -4^2 + 8 \times 4 = -16 + 32 = 16 \neq 12 \text{ (altura máxima)}$$

$$\text{Opção (ii): } -\frac{3}{8}x^2 + 3x = 0 \Leftrightarrow -3x^2 + 24x = 0 \Leftrightarrow 3x(-x + 8) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 8$$

$$\text{Abcissa do vértice: } \frac{0+8}{2} = 4$$

$$\text{Ordenada do vértice: } -\frac{3}{8} \times 4^2 + 3 \times 4 = -6 + 12 = 6 \neq 12 \text{ (altura máxima)}$$

$$\text{Opção (iii): } -\frac{3}{4}x^2 + 6x = 0 \Leftrightarrow -3x^2 + 24x = 0 \Leftrightarrow 3x(-x + 8) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 8$$

$$\text{Abcissa do vértice: } \frac{0+8}{2} = 4$$

$$\text{Ordenada do vértice: } -\frac{3}{4} \times 4^2 + 6 \times 4 = -12 + 24 = 12 \text{ (altura máxima)}$$

Logo, a opção correta é a opção (iii).

68.

a) O número de peças que torna o lucro nulo é 100 (= 300 - 200) e 500 (= 300 + 200) peças.

b) Os valores de x que tornam o lucro negativo são os pertencentes a $[0, 100[\cup]500, 600]$.

$$\text{c) } L(x) = a(x - 300)^2 + 800$$

$$L(0) = -1000 \Leftrightarrow a \times 300^2 + 800 = -1000$$

$$\Leftrightarrow 90000a = -1800$$

$$\Leftrightarrow a = -\frac{1}{50}$$

$$\text{Logo, } L(x) = -\frac{1}{50}(x - 300)^2 + 800.$$

$$\text{d) } L(200) = -\frac{1}{50}(200 - 300)^2 + 800 = -\frac{10000}{50} + 800 = 600$$

Quando se vendem 200 peças obtém-se um lucro de 600 euros.

$$\begin{aligned}
 \text{e) } L(x) = 35 &\Leftrightarrow -\frac{1}{50}(x-300)^2 + 800 = 350 \Leftrightarrow \frac{1}{50}(x-300)^2 = 450 \\
 &\Leftrightarrow (x-300)^2 = 22500 \\
 &\Leftrightarrow x-300 = 150 \vee x-300 = -150 \\
 &\Leftrightarrow x = 450 \vee x = 150
 \end{aligned}$$

Para que o lucro seja 350 euros devem ser vendidas 450 peças ou 150 peças.

$$69. f(x) = \begin{cases} x^2 - 5 & \text{se } x < 0 \\ 2x + 1 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{a) } f(-\sqrt{2}) + f\left(\frac{1}{2}\right) = [(-\sqrt{2})^2 - 5] + \left(2 \times \frac{1}{2} + 1\right) = 2 - 5 + 1 + 1 = -1$$

b) Em $]-\infty, 0[$:

$$x^2 - 5 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 5 \Leftrightarrow x = \sqrt{5} \vee x = -\sqrt{5}$$

Mas $\sqrt{5} \notin]-\infty, 0[$, logo apenas $-\sqrt{5}$ é zero da função f .

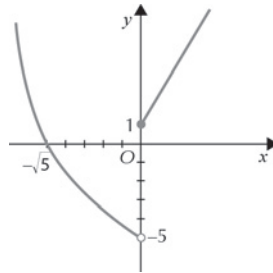
Em $[0, +\infty[$:

$$2x + 1 = 0 \Leftrightarrow 2x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$$

Mas $-\frac{1}{2} \notin [0, +\infty[$.

Logo, a função f tem apenas um zero, que é $-\sqrt{5}$.

c)



70. A função c_1 não está correta, uma vez que as unidades de tempo estão em minutos quando deveriam estar em segundos.

A função c_2 não está correta, uma vez que se, se falar mais de 1 minuto, paga-se 20 centavos por cada segundo e não por cada segundo acima de 1 minuto, além disso, também não inclui o pagamento dos primeiros 60 segundos.

A função c_4 não está correta, uma vez que se, se falar mais de 1 minuto, não se pagam os primeiros 60 segundos. Assim, a função correta é a c_3 .

71. Se $x \in]-\infty, 2[$: $g(x) = a(x+2)^2 + 1$

$$g(2) = 9 \Leftrightarrow a(2+2)^2 + 1 = 9 \Leftrightarrow 16a = 8 \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}$$

$$\text{Logo, } g(x) = \frac{1}{2}(x+2)^2 + 1.$$

$$\text{Se } x \in [2, +\infty[: g(x) = a(x-2)^2 + 9$$

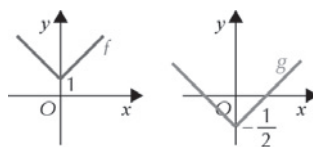
$$g(5) = 0 \Leftrightarrow a(5-2)^2 + 9 = 0 \Leftrightarrow 9a = -9 \Leftrightarrow a = -1$$

$$\text{Logo, } g(x) = -(x-2)^2 + 9.$$

$$\text{Assim, } g(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x+2)^2 + 1 & \text{se } x < 2 \\ -(x-2)^2 + 9 & \text{se } x \geq 2 \end{cases}.$$

72.

a)



b) $f(x) = |x| + 1$

$$D_f = \mathbb{R} \quad D'_f = [1, +\infty[$$

A função f não tem zeros. A função f é estritamente decrescente em $]-\infty, 0]$ e é estritamente crescente em $[0, +\infty[$.

$$g(x) = |x| - \frac{1}{2}$$

$$D_g = \mathbb{R} \quad D'_g = \left[-\frac{1}{2}, +\infty\right[$$

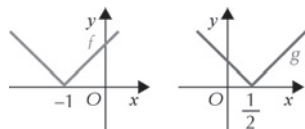
A função g tem dois zeros. A função g é estritamente decrescente em $]-\infty, 0]$ e é estritamente crescente em $[0, +\infty[$.

c) $f(x) = |x| + 1 = \begin{cases} x + 1 & \text{se } x \geq 0 \\ -x + 1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$

$$g(x) = |x| - \frac{1}{2} = \begin{cases} x - \frac{1}{2} & \text{se } x \geq 0 \\ -x - \frac{1}{2} & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

73.

a)



b)

$$f(x) = |x + 1|$$

$$D_f = \mathbb{R} \quad D'_f = \mathbb{R}_0^+$$

A função f tem um zero. A função f é estritamente decrescente em $]-\infty, -1]$ e é estritamente crescente em $[-1, +\infty[$.

$$g(x) = \left|x - \frac{1}{2}\right|$$

$$D_g = \mathbb{R} \quad D'_g = \mathbb{R}_0^+$$

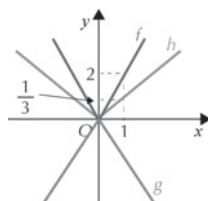
A função g tem um zero. A função g é estritamente decrescente em $]-\infty, \frac{1}{2}]$ e é estritamente crescente em $[\frac{1}{2}, +\infty[$.

c) $f(x) = |x + 1| = \begin{cases} x + 1 & \text{se } x + 1 \geq 0 \\ -x - 1 & \text{se } x + 1 < 0 \end{cases} = \begin{cases} x + 1 & \text{se } x \geq -1 \\ -x - 1 & \text{se } x < -1 \end{cases}$

$$g(x) = \left|x - \frac{1}{2}\right| = \begin{cases} x - \frac{1}{2} & \text{se } x - \frac{1}{2} \geq 0 \\ -x + \frac{1}{2} & \text{se } x - \frac{1}{2} < 0 \end{cases} = \begin{cases} x - \frac{1}{2} & \text{se } x \geq \frac{1}{2} \\ -x + \frac{1}{2} & \text{se } x < \frac{1}{2} \end{cases}$$

74.

a)



b) $f(x) = 2|x|$ $D_f = \mathbb{R}$ $D'_f = \mathbb{R}_0^+$

A função f tem um zero. A função f é estritamente decrescente em $]-\infty, 0]$ e é estritamente crescente em $[0, +\infty[$.

$g(x) = -2|x|$ $D_g = \mathbb{R}$ $D'_g = \mathbb{R}_0^-$

A função g tem um zero. A função g é estritamente crescente em $]-\infty, 0]$ e é estritamente decrescente em $[0, +\infty[$.

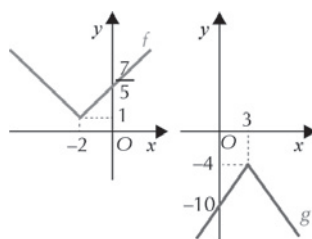
$h(x) = \frac{1}{3}|x|$ $D_h = \mathbb{R}$ $D'_h = \mathbb{R}_0^+$

A função h tem um zero. A função h é estritamente decrescente em $]-\infty, 0]$ e é estritamente crescente em $[0, +\infty[$.

c) $f(x) = 2|x| = \begin{cases} 2x & \text{se } x \geq 0 \\ -2x & \text{se } x < 0 \end{cases}$ $g(x) = -2|x| = \begin{cases} -2x & \text{se } x \geq 0 \\ 2x & \text{se } x < 0 \end{cases}$ $h(x) = \frac{1}{3}|x| = \begin{cases} \frac{1}{3}x & \text{se } x \geq 0 \\ -\frac{1}{3}x & \text{se } x < 0 \end{cases}$

75.

a)



b) $f(x) = \frac{1}{5}|x + 2| + 1$ $D_f = \mathbb{R}$ $D'_f = [1, +\infty[$

A função f não tem zeros. A função f é estritamente decrescente em $]-\infty, -2]$ e é estritamente crescente em $[-2, +\infty[$.

$g(x) = -2|x - 3| - 4$ $D_g = \mathbb{R}$ $D'_g =]-\infty, -4]$

A função g não tem zeros. A função g é estritamente crescente em $]-\infty, 3]$ e é estritamente decrescente em $[3, +\infty[$.

c) $f(x) = \frac{1}{5}|x + 2| + 1 = \begin{cases} \frac{1}{5}(x + 2) + 1 & \text{se } x + 2 \geq 0 \\ \frac{1}{5}(-x - 2) + 1 & \text{se } x + 2 < 0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{5}x + \frac{7}{5} & \text{se } x \geq -2 \\ -\frac{1}{5}x + \frac{3}{5} & \text{se } x < -2 \end{cases}$

$g(x) = -2|x - 3| - 4 = \begin{cases} -2(x - 3) - 4 & \text{se } x - 3 \geq 0 \\ -2(-x + 3) - 4 & \text{se } x - 3 < 0 \end{cases} = \begin{cases} -2x + 2 & \text{se } x \geq 3 \\ 2x - 10 & \text{se } x < 3 \end{cases}$

76. $y = a|x - b| + c$

- a) O mínimo absoluto da função é 0 e é atingido em $\frac{2}{3}$. Assim, a função pode ser definida por uma expressão do tipo $y = a \left| x - \frac{2}{3} \right|$. Uma vez que $(0, 2)$ é um ponto do gráfico da função:

$$2 = a \left| 0 - \frac{2}{3} \right| \Leftrightarrow 2 = \frac{2}{3}a \Leftrightarrow a = 3$$

Logo, $a = 3, b = \frac{2}{3}$ e $c = 0$.

- b) O mínimo absoluto da função é 2 e é atingido em 0. Assim, a função pode ser definida por uma expressão do tipo $y = a|x| + 2$. Uma vez que $(1, 3)$ é um ponto do gráfico da função:

$$3 = a|1| + 2 \Leftrightarrow 3 = a + 2 \Leftrightarrow a = 1$$

Logo, $a = 1, b = 0$ e $c = 2$.

- c) O mínimo absoluto da função é -3 e é atingido em 6. Assim, a função pode ser definida por uma expressão do tipo $y = a|x - 6| - 3$. Uma vez que $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$ é um ponto do gráfico da função:

$$0 = a \left| \frac{3}{2} - 6 \right| - 3 \Leftrightarrow 3 = \frac{9}{2}a \Leftrightarrow a = \frac{2}{3}$$

Logo, $a = \frac{2}{3}, b = 6$ e $c = -3$.

- d) O máximo absoluto da função é 5 e é atingido em -4 . Assim, a função pode ser definida por uma expressão do tipo $y = a|x + 4| + 5$. Uma vez que $(0, 0)$ é um ponto do gráfico da função:

$$0 = a|0 + 4| + 5 \Leftrightarrow -5 = 4a \Leftrightarrow a = -\frac{5}{4}$$

Logo, $a = -\frac{5}{4}, b = -4$ e $c = 5$.

77.

- a) O máximo absoluto da função é 5 e é atingido em 1.

Assim, a função pode ser definida por uma expressão do tipo $y = a|x - 1| + 5$.

Uma vez que $(-1, 3)$ é um ponto do gráfico da função:

$$3 = a|-1 - 1| + 5 \Leftrightarrow -2 = 2a \Leftrightarrow a = -1$$

Logo, $y = -|x - 1| + 5$.

- b) O contradomínio da função é $[-4, +\infty[$, logo a função tem mínimo absoluto -4 . Esse mínimo é atingido em -1 , de acordo com a monotonia da função.

Assim, a função pode ser definida por uma expressão do tipo $y = a|x + 1| - 4$.

Uma vez que $(-3, 0)$ é um ponto do gráfico da função:

$$0 = a|-3 + 1| - 4 \Leftrightarrow 4 = 2a \Leftrightarrow a = 2$$

Logo, $y = 2|x + 1| - 4$.

78.

- a) $|x| = 6 \Leftrightarrow x = 6 \vee x = -6$

C.S. = $\{-6, 6\}$

- b) $2|x| = 6 \Leftrightarrow |x| = 3 \Leftrightarrow x = 3 \vee x = -3$

C.S. = $\{-3, 3\}$

- c) $2 + |x| = 6 \Leftrightarrow |x| = 4 \Leftrightarrow x = 4 \vee x = -4$

C.S. = $\{-4, 4\}$

79.

a) $|x| < 6 \Leftrightarrow x < 6 \wedge x > -6$

C.S. = $] -6, 6[$

b) $|x| \geq 6 \Leftrightarrow x \geq 6 \vee x \leq -6$

C.S. = $] -\infty, -6] \cup [6, +\infty[$

c) $-3 + |x| > 6 \Leftrightarrow |x| > 9 \Leftrightarrow x > 9 \vee x < -9$

C.S. = $] -\infty, -9[\cup]9, +\infty[$

d) $-3|x| \geq -6 \Leftrightarrow 3|x| \leq 6 \Leftrightarrow |x| \leq 2 \Leftrightarrow x \leq 2 \wedge x \geq -2$

C.S. = $[-2, 2]$

80.

a) $|x - 1| = 3 \Leftrightarrow x - 1 = 3 \vee x - 1 = -3 \Leftrightarrow x = 4 \vee x = -2$

C.S. = $\{-2, 4\}$

b) $|x + 2| + 3 = 0 \Leftrightarrow |x + 2| = -3$ Equação impossível

C.S. = \emptyset

c) $5 + |x| > -1 \Leftrightarrow |x| > -6$ Condição universal

C.S. = \mathbb{R}

d) $8 + |x| > 8 \Leftrightarrow |x| > 0 \Leftrightarrow x > 0 \vee x < 0$

C.S. = $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

e) $|2x - 1| - 5 < 0 \Leftrightarrow |2x - 1| < 5 \Leftrightarrow 2x - 1 < 5 \wedge 2x - 1 > -5 \Leftrightarrow 2x < 6 \wedge 2x > -4$

$\Leftrightarrow x < 3 \wedge x > -2$

C.S. = $] -2, 3[$

f) $|1 - 4x| \geq 3 \Leftrightarrow 1 - 4x \geq 3 \vee 1 - 4x \leq -3 \Leftrightarrow -4x \geq 2 \vee -4x \leq -4 \Leftrightarrow 4x \leq -2 \vee 4x \geq 4$

$\Leftrightarrow x \leq -\frac{1}{2} \vee x \geq 1$

C.S. = $] -\infty, -\frac{1}{2}] \cup [1, +\infty[$

g) $3 + |x - 2| \leq 3 \Leftrightarrow |x - 2| \leq 0 \Leftrightarrow x - 2 \leq 0 \wedge x - 2 \geq 0$

$\Leftrightarrow x \leq 2 \wedge x \geq 2$

$\Leftrightarrow x = 2$

C.S. = $\{2\}$

h) $-\frac{1}{3}|2x| < 1 \Leftrightarrow \frac{1}{3}|2x| > -1 \Leftrightarrow |2x| > -3$ Condição universal

C.S. = \mathbb{R}

81.

a) $|x - 3| = |x - 5| \Leftrightarrow x - 3 = x - 5 \vee x - 3 = -x + 5$

$\Leftrightarrow \underbrace{0x = -2}_{\text{Eq. impossível}} \vee 2x = 8$

$\Leftrightarrow x = 4$

C.S. = $\{4\}$

$$\text{b)} |x+1| \geq |x-4| \Leftrightarrow (x+1)^2 \geq (x-4)^2 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 \geq x^2 - 8x + 16$$

$$\Leftrightarrow 10x \geq 15$$

$$\Leftrightarrow x \geq \frac{3}{2}$$

$$\text{C.S.} = \left[\frac{3}{2}, +\infty\right[$$

$$\text{c)} |x^2 - 3x| = 4 \Leftrightarrow x^2 - 3x = 4 \vee x^2 - 3x = -4 \Leftrightarrow x^2 - 3x - 4 = 0 \vee x^2 - 3x + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{2} \vee x = \frac{3 \pm \sqrt{9-16}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{3 \pm 5}{2} \Leftrightarrow x = 4 \vee x = -1$$

Eq.impossível em \mathbb{R}

$$\text{C.S.} = \{-1, 4\}$$

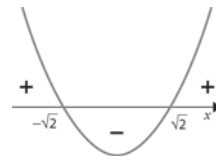
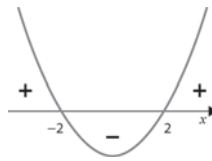
$$\text{d)} |x^2 - 3| - 1 < 0 \Leftrightarrow |x^2 - 3| < 1 \Leftrightarrow x^2 - 3 < 1 \wedge x^2 - 3 > -1$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4 < 0 \wedge x^2 - 2 > 0$$

Cálculos auxiliares

$$x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \vee x = -2$$

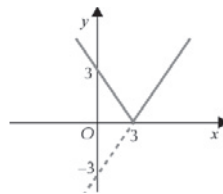
$$x^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{2} \vee x = -\sqrt{2}$$



$$\text{C.S.} =]-2, -\sqrt{2}[\cup]\sqrt{2}, 2[$$

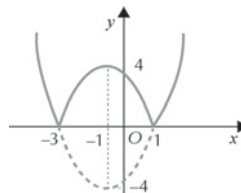
82.

a)



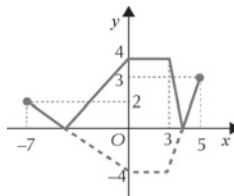
$$D' = [0, +\infty[$$

b)



$$D' = [0, +\infty[$$

c)



$$D' = [0, 4]$$

83. $f(x) = a(x - 3)^2 + k$

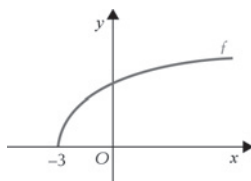
a) $f(x) = -(x - 3)^2 - 2$

A parábola que representa a função tem concavidade voltada para baixo. A função tem máximo -2 . Logo, $D_f' =]-\infty, -2]$.

b) O contradomínio de $|f(x)|$ é diferente de $[0, +\infty[$ se a função f não tiver zeros. Se $a < 0$, para que a função f não tenha zeros tem de se ter $k < 0$. Se $a > 0$, para que a função f não tenha zeros tem de se ter $k > 0$. Assim, no caso de a e k terem o mesmo sinal, o contradomínio de $|f(x)|$ é diferente de $[0, +\infty[$.

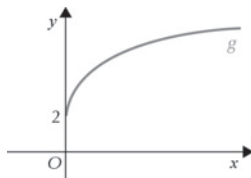
84.

a) $f(x) = \sqrt{x + 3}$



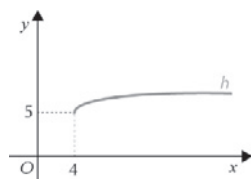
$D_f = [-3, +\infty[$

b) $g(x) = \sqrt{x} + 2$



$D_g = [0, +\infty[$

c) $h(x) = \frac{1}{3}\sqrt{x - 4} + 5$



$D_h = [4, +\infty[$

85. $f(x) = 5x - 1$ $g(x) = \sqrt{2x - 1}$

$D_f = \mathbb{R}$

$D_g = \{x \in \mathbb{R} : 2x - 1 > 0\} = \left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$

$D_{f \circ g} = \{x \in D_g : g(x) \in D_f\} = \left\{x \in \left[\frac{1}{2}, +\infty\right[: g(x) \in \mathbb{R}\right\} = \left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$

$f \circ g(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{2x - 1}) = 5\sqrt{2x - 1} - 1$

$D_{g \circ f} = \{x \in D_f : f(x) \in D_g\} = \left\{x \in \mathbb{R} : f(x) \in \left[\frac{1}{2}, +\infty\right]\right\} = \left[\frac{3}{10}, +\infty\right[$

Cálculo auxiliar

$f(x) \in \left[\frac{1}{2}, +\infty\right[\Leftrightarrow 5x - 1 \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow 5x \geq \frac{3}{2} \Leftrightarrow x \geq \frac{3}{10}$

$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(5x - 1) = \sqrt{2(5x - 1) - 1} = \sqrt{10x - 2 - 1} = \sqrt{10x - 3}$

86.

a) $f(x) = \sqrt{-x}$

$D_f = \{x \in \mathbb{R} : -x \geq 0\} = \mathbb{R}_0^-$

Cálculo auxiliar

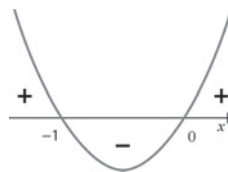
$-x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 0$

b) $g(x) = \sqrt{x^2 + x}$

$$D_g = \{x \in \mathbb{R}: x^2 + x \geq 0\} =]-\infty, -1] \cup [0, +\infty[$$

Cálculo auxiliar

$$\begin{aligned} x^2 + x = 0 &\Leftrightarrow x(x+1) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \vee x = -1 \end{aligned}$$



c) $h(x) = \sqrt{x^2 + 1}$

$$D_h = \left\{ x \in \mathbb{R}: \underbrace{x^2 + 1 \geq 0}_{\text{Condição universal}} \right\} = \mathbb{R}$$

d) $D_i = \{x \in \mathbb{R}: i(x) \geq 0\} =]-\infty, -1] \cup \{2\}$

87.

a) $V = \frac{4}{3}\pi r^3 \Leftrightarrow 3V = 4\pi r^3 \Leftrightarrow r^3 = \frac{3V}{4\pi} \Leftrightarrow r = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}$

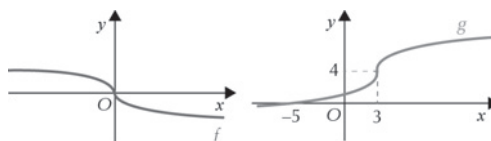
b) $V = \pi r^2 \times 2r \Leftrightarrow V = 2\pi r^3 \Leftrightarrow r^3 = \frac{V}{2\pi} \Leftrightarrow r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$

88.

a) $f(x) = \sqrt[3]{-x} \quad D_f = \mathbb{R}$

$g(x) = 2\sqrt[3]{x-3} + 4 \quad D_g = \mathbb{R}$

b)



A função f obtém-se da representação gráfica da função $y = \sqrt[3]{x}$ segundo uma reflexão de eixo Oy . A função g obtém-se da representação gráfica da função $y = \sqrt[3]{x}$ segundo uma dilatação vertical de coeficiente 2, seguida de uma translação de vetor $(3, 4)$.

89. $D_i = \{x \in \mathbb{R}: i(x) \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}$

90. $h(t) = 0 \Leftrightarrow 2 - \sqrt[3]{t} = 0 \Leftrightarrow \sqrt[3]{t} = 2 \Leftrightarrow t = 2^3 \Leftrightarrow t = 8$
 $10 + 8 = 18$. Assim, o reservatório fica vazio às 18 horas.

91.

a) $\sqrt{3x-2} - 1 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{3x-2} = 1$
 $\Rightarrow 3x - 2 = 1^2$
 $\Leftrightarrow 3x = 2 + 1$
 $\Leftrightarrow 3x = 3 \Leftrightarrow x = 1$

Verificação:

$\sqrt{3 \times 1 - 2} - 1 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{3 - 2} - 1 = 0 \Leftrightarrow 1 - 1 = 0$, que é uma proposição verdadeira, logo 1 é solução da equação.

C.S. = $\{1\}$

$$\begin{aligned}
\text{b) } \sqrt{2x-4} + x = 2 &\Leftrightarrow \sqrt{2x-4} = -x + 2 \\
&\Rightarrow 2x - 4 = (-x + 2)^2 \\
&\Leftrightarrow 2x - 4 = x^2 - 4x + 4 \\
&\Leftrightarrow x^2 - 6x + 8 = 0 \\
&\Leftrightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 32}}{2} \\
&\Leftrightarrow x = \frac{6 \pm 2}{2} \\
&\Leftrightarrow x = 4 \vee x = 2
\end{aligned}$$

Verificação:

Se $x = 4$, então $\sqrt{2 \times 4 - 4} + 4 = 2 \Leftrightarrow \sqrt{8 - 4} + 4 = 2 \Leftrightarrow \sqrt{4} + 4 = 2 \Leftrightarrow 6 = 2$, que é uma proposição falsa, logo 4 não é solução da equação.

Se $x = 2$, então $\sqrt{2 \times 2 - 4} + 2 = 2 \Leftrightarrow \sqrt{4 - 4} + 2 = 2 \Leftrightarrow \sqrt{0} + 2 = 2 \Leftrightarrow 2 = 2$, que é uma proposição verdadeira, logo 2 é solução da equação.

$$\text{C.S.} = \{2\}$$

$$\begin{aligned}
\text{c) } \sqrt{2x-4} - \sqrt{3x+1} = 0 &\Leftrightarrow \sqrt{2x-4} = \sqrt{3x+1} \\
&\Rightarrow 2x - 4 = 3x + 1 \\
&\Leftrightarrow -x = 5 \\
&\Leftrightarrow x = -5
\end{aligned}$$

Verificação:

$\sqrt{2 \times 5 - 4} - \sqrt{3 \times 5 + 1} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{6} - \sqrt{16} = 0$, que é uma proposição falsa, logo -5 não é solução da equação.

$$\text{C.S.} = \emptyset$$

$$\begin{aligned}
\text{d) } \sqrt{x+3} - \sqrt{2x-1} - 1 = 0 &\Leftrightarrow \sqrt{x+3} = \sqrt{2x-1} + 1 \\
&\Rightarrow x + 3 = (\sqrt{2x-1} + 1)^2 \\
&\Leftrightarrow x + 3 = 2x - 1 + 2\sqrt{2x-1} + 1 \\
&\Leftrightarrow 2\sqrt{2x-1} = -x + 3 \\
&\Rightarrow 4(2x-1) = (-x+3)^2 \\
&\Leftrightarrow 8x - 4 = x^2 - 6x + 9 \\
&\Leftrightarrow x^2 - 14x + 13 = 0 \\
&\Leftrightarrow x = \frac{14 \pm \sqrt{196 - 52}}{2} \\
&\Leftrightarrow x = \frac{14 \pm 12}{2} \\
&\Leftrightarrow x = 14 \vee x = 1
\end{aligned}$$

Verificação:

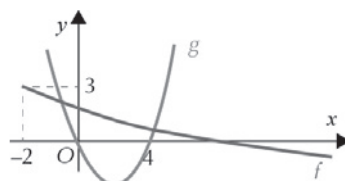
Se $x = 14$, então $\sqrt{14+3} - \sqrt{2 \times 14 - 1} - 1 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{17} - \sqrt{27} - 1 = 0$, que é uma proposição falsa, logo 14 não é solução da equação.

Se $x = 1$, então $\sqrt{1+3} - \sqrt{2 \times 1 - 1} - 1 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{4} - \sqrt{1} - 1 = 0 \Leftrightarrow 2 - 1 - 1 = 0$, que é uma proposição verdadeira, logo 1 é solução da equação.

$$\text{C.S.} = \{1\}$$

92.

a)

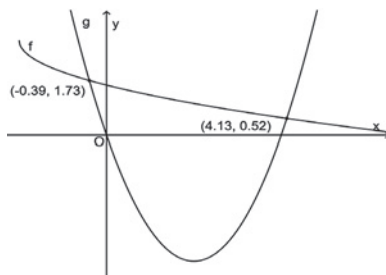


$$\begin{aligned} \text{b) } f(x) = 0 &\Leftrightarrow 3 - \sqrt{x+2} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x+2} = 3 \\ &\Rightarrow x+2 = 3^2 \\ &\Leftrightarrow x = 9 - 2 \\ &\Leftrightarrow x = 7 \end{aligned}$$

Verificação:

$3 - \sqrt{7+2} = 0 \Leftrightarrow 3 - \sqrt{9} = 0 \Leftrightarrow 3 - 3 = 0$, que é uma proposição verdadeira, logo 7 é solução da equação. A função f tem um zero: 7

$$\text{c) } f(x) = g(x) \Leftrightarrow 3 - \sqrt{x+2} = x^2 - 4x$$



As soluções da equação são $x \approx -0,4$ e $x \approx 4,1$.

Uma vez que a representação gráfica da função g é uma parábola e que a função f é estritamente decrescente em $[-2, +\infty[$, as duas soluções encontradas são as únicas soluções da equação.

93.

$$\text{a) } D = \{x \in \mathbb{R}: x - 4 \geq 0\} = [4, +\infty[$$

$$\begin{aligned} \sqrt{x-4} - 1 &\geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x-4} \geq 1 \\ &\Leftrightarrow x-4 \geq 1 \text{ (} y = \sqrt{x-4} \text{ é uma função crescente)} \\ &\Leftrightarrow x \geq 5 \end{aligned}$$

$$\text{Logo, C.S.} = [4, +\infty[\cap [5, +\infty[= [5, +\infty[.$$

$$\text{b) } D = \{x \in \mathbb{R}: 2x + 3 \geq 0\} = \left[-\frac{3}{2}, +\infty\right[$$

$$\begin{aligned} \sqrt{2x+3} < 2 &\Leftrightarrow 2x+3 < 4 \text{ (} y = \sqrt{2x+3} \text{ é uma função crescente)} \\ &\Leftrightarrow 2x < 1 \Leftrightarrow x < \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\text{Logo, C.S.} = \left[-\frac{3}{2}, +\infty\right[\cap \left]-\infty, \frac{1}{2}\right[= \left[-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right[.$$

94.

a) $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$ é uma função polinomial.

b) $g(x) = \frac{1}{2x} + 1$ não é uma função polinomial.

c) $h(x) = x^{\frac{1}{2}} + 3x - 2$ não é uma função polinomial.

d) $i(x) = x^2 + 3x - 2$ é uma função polinomial.

e) $j(x) = \sqrt{2}x^7 + 3x^4 - 1$ é uma função polinomial.

95.

a) Às 10 horas, decorreram 2 horas desde as 8 horas.

$$P(2) = -2^3 + 6 \times 2^2 + 15 \times 2 = -8 + 24 + 30 = 46$$

O trabalhador produziu 46 litros de gelado.

b) $P(1) = -1^3 + 6 \times 1^2 + 15 \times 1 = -1 + 6 + 15 = 20$

$$P(2) - P(1) = 46 - 20 = 26$$

Entre as 9 horas e as 10 horas, o trabalhador produziu 26 litros de gelado.

96.

a) $f(-2) = 4 \times (-2)^3 + 8 \times (-2)^2 - (-2) - 2 = -32 + 32 + 2 - 2 = 0$

Logo, -2 é um zero da função f .

b) $f(x) = 4x^3 + 8x^2 - x - 2$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 4 & 8 & -1 & -2 \\ -2 & & -8 & 0 & 2 \\ \hline & 4 & 0 & -1 & 0 \end{array}$$

$$4x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \vee x = -\frac{1}{2}$$

Logo, os outros zeros de f são $\frac{1}{2}$ e $-\frac{1}{2}$.

c) Assim, $f(x) = 4(x+2)\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)$.

97.

a) $f(x) = (x-1)^3 = (x-1)^2(x-1) = (x^2-2x+1)(x-1) = x^3-3x^2+3x-1$, por exemplo.

b) $f(x) = (x-1)(x^2+x+1) = x^3-1$, por exemplo.

c) $f(x) = x(x-1)^2 = x^3-2x^2+x$, por exemplo.

98.

a) $f(x) = 0 \Leftrightarrow -5x + 1 = 0 \Leftrightarrow -5x = -1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{5}$

O zero de f é $\frac{1}{5}$.

b) $g(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1+48}}{6} \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm 7}{6} \Leftrightarrow x = \frac{4}{3} \vee x = -1$

Os zeros de g são $\frac{4}{3}$ e -1 .

c) $h(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 - 24 = 0 \Leftrightarrow x^3 = 24 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{24} \Leftrightarrow x = 2\sqrt[3]{3}$

O zero de h é $2\sqrt[3]{3}$.

$$\begin{aligned}
 \text{d) } i(x) = 0 &\Leftrightarrow -x^3 + 16x = 0 \Leftrightarrow x(-x^2 + 16) = 0 \\
 &\Leftrightarrow x = 0 \vee -x^2 + 16 = 0 \\
 &\Leftrightarrow x = 0 \vee x^2 = 16 \\
 &\Leftrightarrow x = 0 \vee x = 4 \vee x = -4
 \end{aligned}$$

Os zeros de i são 0, 4 e -4 .

$$j(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^4 - 8x^3 + 7x^2 + 4x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \vee 2x^2 - 1 = 0$$

| Cálculo auxiliar | | | | | |
|------------------|---|----|----|----|----|
| 2 | 2 | -8 | 7 | 4 | -4 |
| 2 | | 4 | -8 | -2 | 4 |
| 2 | 2 | -4 | -1 | 2 | 0 |
| 2 | | 4 | 0 | -2 | |
| 2 | 2 | 0 | -1 | 0 | |

$$\Leftrightarrow x = 2 \vee x^2 = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = 2 \vee x = \frac{\sqrt{2}}{2} \vee x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Os zeros de j são 2 , $\frac{\sqrt{2}}{2}$ e $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

99.

- a) $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, 0] \cup [3, +\infty[$
b) $g(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, 0[\cup]1, 3[$
c) $f(x) \leq g(x) \Leftrightarrow x \in [0, 2] \cup [3, +\infty[$
d) $f(x+4) < 0 \Leftrightarrow x \in]-4, -1[$

100.

a) $(-x+1)(x^2-5x+6) > 0$

| Cálculos auxiliares | |
|--|--|
| $-x+1=0 \Leftrightarrow x=1$ | |
| $x^2-5x+6=0 \Leftrightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2}$ | |
| $\Leftrightarrow x = \frac{5 \pm 1}{2} \Leftrightarrow x = 2 \vee x = 3$ | |

| x | $-\infty$ | 1 | | 2 | | 3 | $+\infty$ |
|--------------------|-----------|---|---|---|---|---|-----------|
| $-x+1$ | + | 0 | - | - | - | - | - |
| x^2-5x+6 | + | + | + | 0 | - | 0 | + |
| $(-x+1)(x^2-5x+6)$ | + | 0 | - | 0 | + | 0 | - |

$$\text{C.S.} =]-\infty, 1[\cup]2, 3[$$

b) $f(x) \leq 0 \Leftrightarrow 2x^3 + x^2 - 5x + 2 \leq 0$

Cálculos auxiliares

| | | | | |
|---|---|---|----|---|
| 1 | 2 | 1 | -5 | 2 |
| | 2 | 3 | -2 | |
| | 2 | 3 | -2 | 0 |

$$2x^2 + 3x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 16}}{4}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm 5}{4} \Leftrightarrow x = -2 \vee x = \frac{1}{2}$$

| | | | | | | | |
|-----------------------|-----------|------|-----|---------------|-----|-----|-----------|
| x | $-\infty$ | -2 | | $\frac{1}{2}$ | | 1 | $+\infty$ |
| $x - 1$ | $-$ | $-$ | $-$ | $-$ | $-$ | 0 | $+$ |
| $2x^2 + 3x - 2$ | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ | $+$ | $+$ |
| $2x^3 + x^2 - 5x + 2$ | $-$ | 0 | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ |

C.S. = $] -\infty, -2] \cup [\frac{1}{2}, 1]$

c) $x^4 < 27x \Leftrightarrow x^4 - 27x < 0 \Leftrightarrow x(x^3 - 27) < 0$

Cálculo auxiliar

$$x^3 - 27 = 0 \Leftrightarrow x^3 = 27 \Leftrightarrow x = 3$$

| | | | | | |
|-------------|-----------|-----|-----|-----|-----------|
| x | $-\infty$ | 0 | | 3 | $+\infty$ |
| x | $-$ | 0 | $+$ | $+$ | $+$ |
| $x^3 - 27$ | $-$ | $-$ | $-$ | 0 | $+$ |
| $x^4 - 27x$ | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ |

C.S. = $]0, 3[$

d) $-x^5 + 2x^3 \geq 0 \Leftrightarrow x^3(-x^2 + 2) \geq 0$

Cálculo auxiliar

$$-x^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 2$$

$$\Leftrightarrow x = \sqrt{2} \vee x = -\sqrt{2}$$

| | | | | | | | |
|---------------|-----------|-------------|-----|-----|-----|------------|-----------|
| x | $-\infty$ | $-\sqrt{2}$ | | 0 | | $\sqrt{2}$ | $+\infty$ |
| x^3 | $-$ | $-$ | $-$ | 0 | $+$ | $+$ | $+$ |
| $-x^2 + 2$ | $-$ | 0 | $+$ | $+$ | $+$ | 0 | $-$ |
| $-x^5 + 2x^3$ | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ | 0 | $-$ |

C.S. = $] -\infty, -\sqrt{2}] \cup [0, \sqrt{2}]$

101.

a) $f(0) = 3 \times 0^2 + 2 = 0 + 2 = 2$

$$f\left(2\frac{1}{2}\right) = 3 \times \left(2\frac{1}{2}\right)^2 + 2 = 3 \times 2 + 2 = 6 + 2 = 8$$

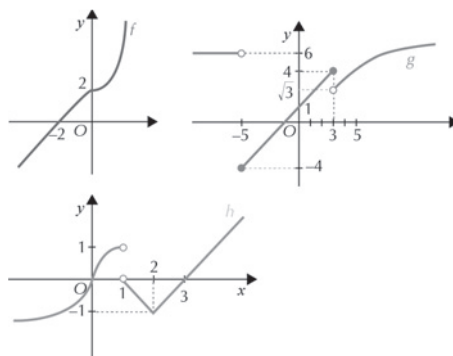
$$g(12) = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

$$g(-5) = -5 + 1 = -4$$

$$h(-8) = \sqrt[3]{-8} = -2$$

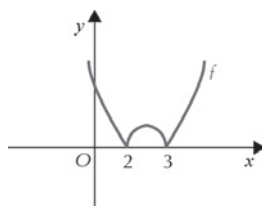
$h(1)$ não está definido.

b)



102.

a)

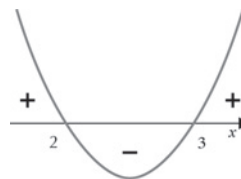


$$b) f(x) = |x^2 - 5x + 6| = \begin{cases} x^2 - 5x + 6 & \text{se } x^2 - 5x + 6 \geq 0 \\ -x^2 + 5x - 6 & \text{se } x^2 - 5x + 6 < 0 \end{cases} = \begin{cases} x^2 - 5x + 6 & \text{se } x \leq 2 \vee x \geq 3 \\ -x^2 + 5x - 6 & \text{se } 2 < x < 3 \end{cases}$$

Cálculo auxiliar

$$x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{5 \pm 1}{2} \Leftrightarrow x = 2 \vee x = 3$$



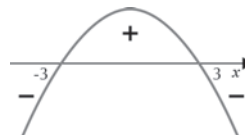
103.

$$a) g(x) = |9 - x^2| = \begin{cases} 9 - x^2 & \text{se } 9 - x^2 \geq 0 \\ -9 + x^2 & \text{se } 9 - x^2 < 0 \end{cases} = \begin{cases} 9 - x^2 & \text{se } -3 \leq x \leq 3 \\ -9 + x^2 & \text{se } x < -3 \vee x > 3 \end{cases}$$

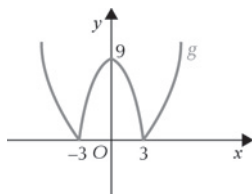
Cálculo auxiliar

$$9 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 9$$

$$\Leftrightarrow x = 3 \vee x = -3$$



b)



Unidade 6 – Operações algébricas com funções

Páginas 134 a 139

104.

a) $(f + g)(0) = f(0) + g(0) = 0^2 + 3 = 0 + 3 = 3$

$$(f - g)(1) = f(1) - g(1) = 1^2 - 2 = 1 - 2 = -1$$

b) g é uma função afim, logo é do tipo $g(x) = ax + b$.

$$a = \frac{3-2}{0-1} = -1$$

Como $(0, 3)$ pertence ao gráfico da função, então $b = 3$.

Logo, $g(x) = -x + 3$.

i. $D_{f+g} = D_f \cap D_g = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}$

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = x^2 - x + 3$$

ii. $D_{f-g} = D_f \cap D_g = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}$

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x) = x^2 - (-x + 3) = x^2 + x - 3$$

iii. $D_{f \times g} = D_f \cap D_g = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}$

$$(f \times g)(x) = f(x) \times g(x) = x^2(-x + 3) = -x^3 + 3x^2$$

105. $D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap \{x \in D_g: g(x) \neq 0\} = [-1, +\infty[\cap \{x \in \mathbb{R}_0^+: \sqrt{x} - 2 \neq 0\} = \mathbb{R}_0^+ \setminus \{4\}$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R}: x + 1 \geq 0\} = [-1, +\infty[$$

$$D_g = \{x \in \mathbb{R}: x \geq 0\} = [0, +\infty[= \mathbb{R}_0^+$$

Cálculo auxiliar

$$\sqrt{x} - 2 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 2 \Rightarrow x = 4$$

Verificação:

$\sqrt{4} - 2 = 0 \Leftrightarrow 2 - 2 = 0$, que é uma proposição verdadeira, logo 2 é solução da equação.

106.

a) $D_f =]-\infty, 4]$

$$D_g = [-6, 6]$$

b) $(f + g)(0) = f(0) + g(0) = 2 + 1 = 3$

$$(f \times g)(2) = f(2) \times g(2) = 6 \times 0 = 0$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(4) = \frac{f(4)}{g(4)} = \frac{6}{-1} = -6$$

$\left(\frac{f}{g}\right)(6)$ não está definida, pois 6 não pertence ao domínio de f .

$$f^3(-10) = (-2)^3 = -8$$

$$g^{\frac{1}{2}}(-6) = \sqrt{-6} = 1$$

c) $D_{f+g} = D_f \cap D_g =]-\infty, 4] \cap [-6, 6] = [-6, 4]$

$$D_{f \times g} = D_f \cap D_g =]-\infty, 4] \cap [-6, 6] = [-6, 4]$$

$$D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap \{x \in D_g: g(x) \neq 0\} =]-\infty, 4] \cap \{x \in [-6, 6]: x \neq 2\} = [-6, 4] \setminus \{2\}$$

$$D_{\frac{g}{f}} = g \cap \{x \in D_f: f(x) \neq 0\} = [-6, 6] \cap]-\infty, 4] = [-6, 4]$$

$$D_{f^3} = D_f =]-\infty, 4]$$

$$D_{\frac{1}{f^2}} = \{x \in D_f : f(x) \geq 0\} = [0, 4]$$

$$D_{\frac{1}{g^2}} = \{x \in D_g : g(x) \geq 0\} = [-6, 2]$$

107.

$$\text{a) } h(-1) + h(1) + h(4) = (f+g)(-1) + f^{\frac{1}{3}}(1) + \left(\frac{f}{g}\right)(4)$$

$$= f(-1) + g(-1) + \sqrt[3]{f(1)} + \frac{f(4)}{g(4)}$$

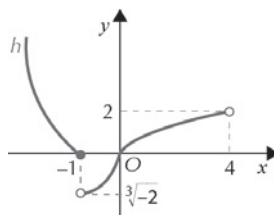
$$= 2 \times (-1) + (-1)^2 + 1 + \sqrt[3]{2 \times 1} + \frac{2 \times 4}{4^2 + 1}$$

$$= -2 + 1 + 1 + \sqrt[3]{2} + \frac{8}{17}$$

$$= \sqrt[3]{2} + \frac{8}{17}$$

$$\text{b) } h(x) = \begin{cases} (f+g)(x) & \text{se } x \leq -1 \\ f^{\frac{1}{3}}(x) & \text{se } -1 < x < 4 \\ \left(\frac{f}{g}\right)(x) & \text{se } x \geq 4 \end{cases} = \begin{cases} x^2 + 2x + 1 & \text{se } x \leq -1 \\ \sqrt[3]{2x} & \text{se } -1 < x < 4 \\ \frac{2x}{x^2+1} & \text{se } x \geq 4 \end{cases}$$

c)



108.

$$\text{a) } f(x) = |x - 2| = \begin{cases} x - 2 & \text{se } x - 2 \geq 0 \\ x + 2 & \text{se } x - 2 < 0 \end{cases} = \begin{cases} x - 2 & \text{se } x \geq 2 \\ -x + 2 & \text{se } x < 2 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{se } x \geq 2 \\ x + 1 & \text{se } x < 2 \end{cases} \quad \text{Logo, } (f+g)(x) = \begin{cases} x - 2 + \sqrt{x} & \text{se } x \geq 2 \\ -x + 2 + x + 1 & \text{se } x < 2 \end{cases} = \begin{cases} \sqrt{x} + x - 2 & \text{se } x \geq 2 \\ 3 & \text{se } x < 2 \end{cases}$$

b) Se $x \in [2, +\infty[$, então:

$$(f+g)(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} + x - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x} = -x + 2$$

$$\Rightarrow x = (-x + 2)^2$$

$$\Leftrightarrow x = x^2 - 4x + 4$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{5 \pm 3}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = 4 \vee x = 1$$

Ora, $1 \notin [2, +\infty[$, logo não pode ser um zero da função.

Se $x = 4$, então $\sqrt{4} + 4 - 2 = 0 \Leftrightarrow 2 + 4 - 2 = 0 \Leftrightarrow 4 = 0$, que é uma proposição falsa, logo 4 não é solução da equação e, portanto, 4 não é zero da função.

Logo, a função não tem zeros no intervalo $[2, +\infty[$.

Se $x \in]-\infty, 2[$, então $(f + g)(x) = 0 \Leftrightarrow 3 = 0$, que é uma proposição falsa, logo a função não tem zeros no intervalo $] -\infty, 2[$.

Assim, a função $f + g$ não tem zeros.

Aprende Fazendo

Páginas 140 a 150

1. Os pontos $(1, 0)$ e $(-3, 8)$ pertencem ao gráfico da função. Assim, o declive da reta que representa a função é:

$$\frac{0-8}{1-(-3)} = \frac{-8}{4} = -2$$

A única opção que representa uma função afim em que o coeficiente de x é -2 é a opção C.

(Opção C)

2. A função g é representada graficamente por uma reta de declive negativo. Essa reta intersesta obrigatoriamente o eixo Ox num único ponto, pelo que a função tem um único zero.

(Opção B)

$$\begin{aligned} 3. \quad g(x) = 0 &\Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2} \\ &\Leftrightarrow x = \frac{2 \pm 4}{2} \Leftrightarrow x = 3 \vee x = -1 \end{aligned}$$

Assim, a função g intersesta o eixo Ox em dois pontos.

A reta de equação $x = \frac{3-1}{2} \Leftrightarrow x = 1$ é o eixo de simetria da parábola que representa graficamente a função.

A função g é estritamente crescente no intervalo $[1, +\infty[$, pelo que, em particular, é estritamente crescente em $[2, 6]$. $g(1) = 1^2 - 2 \times 1 - 3 = 1 - 2 - 3 = -4$

Logo, $D'_g = [-4, +\infty[$, pelo que 2 pertence ao contradomínio de g .

(Opção D)

4. Qualquer função quadrática intersesta necessariamente o eixo Oy já que será sempre possível determinar a imagem de 0.

(Opção D)

5. A parábola tem concavidade voltada para baixo, pelo que $a < 0$. A abcissa do vértice é negativa, pelo que $h < 0$. A ordenada do vértice é positiva, pelo que $k > 0$.

(Opção D)

6. Se $a < 0$, então a reta que representa a função tem declive negativo, pelo que ou é a reta representada na opção B ou na opção D. Se $\frac{b}{a} > 0$, então $b < 0$, logo a opção correta é a opção D.

(Opção D)

7. Para que a função não tenha zeros reais:

$$\Delta < 0 \Leftrightarrow 4^2 - 4 \times (-1) \times k < 0 \Leftrightarrow 16 + 4k < 0 \Leftrightarrow 4k < -16 \Leftrightarrow k < -4$$

Ou seja, $k \in]-\infty, -4[$.

(Opção B)

8. A abscissa do vértice é: $\frac{-a}{4} = 2 \Leftrightarrow -a = 8 \Leftrightarrow a = -8$

A ordenada do vértice é:

$$f(2) = -2 \Leftrightarrow 2 \times 2^2 - 8 \times 2 - b = -2 \Leftrightarrow 8 - 16 - b = -2 \Leftrightarrow -b = 6 \Leftrightarrow b = -6$$

(Opção A)

- 9.

| | | | | | | | | | |
|-----------|-----------|------|-----|------|-----|-----|-----|-----|-----------|
| x | $-\infty$ | -3 | | -1 | | 1 | | 4 | $+\infty$ |
| $1 - x^2$ | $-$ | $-$ | $-$ | 0 | $+$ | 0 | $-$ | $-$ | $-$ |
| $f(x)$ | $-$ | 0 | $+$ | $+$ | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ |
| $g(x)$ | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ | 0 | $+$ | 0 | $-$ |

$$g(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, -3] \cup [-1, 4]$$

(Opção B)

10. A parábola que representa a função tem concavidade voltada para baixo. Logo, exclui-se a opção A.

Nas restantes opções, a abscissa do vértice da parábola é 6.

Na opção B, tem-se que $f(6) = 12$, mas a altura máxima atingida pelo projétil é 72 metros, pelo que se exclui esta opção.

Na opção C, $f(12) = -0,5 \times (12 - 6)^2 + 72 = 54$. Mas o projétil cai a 12 metros da base de lançamento. Assim, exclui-se também esta opção.

(Opção D)

11. A função tem um mínimo absoluto, logo a parábola que a representa tem concavidade voltada para cima. Se $f(-3) = f(5) = -2$, então a equação $f(x) = -1$ tem uma solução menor que -3 e outra solução maior que 5.

A inequação $f(x) < -1$ terá como conjunto-solução um intervalo cujos extremos são essas duas soluções.

O único intervalo nestas condições é o representado na opção B.

(Opção B)

12. $f(x) = g(x) \Leftrightarrow (x - 1)^2 - 4 = ax - 4$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 - ax = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + (-2 - a)x + 1 = 0$$

Para que esta equação tenha apenas uma solução:

$$(-2 - a)^2 - 4 \times 1 \times 1 = 0 \Leftrightarrow 4 + 4a + a^2 - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow a^2 + 4a = 0$$

$$\Leftrightarrow a(a + 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow a = 0 \vee a = -4$$

(Opção A)

13.

| | | | | | |
|--------|-----------|------|-----|-----|-----------|
| x | $-\infty$ | -2 | | 1 | $+\infty$ |
| $f(x)$ | $-$ | 0 | $+$ | $+$ | $+$ |
| $g(x)$ | $+$ | $+$ | $+$ | 0 | $-$ |
| $h(x)$ | $-$ | 0 | $+$ | 0 | $-$ |

A opção que corresponde a este quadro de sinais é a C.

(Opção C)

$$\begin{aligned}
 14. \quad f(x) = 0 &\Leftrightarrow 4 - x + \sqrt{x-2} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x-2} = x - 4 \\
 &\Rightarrow x - 2 = (x - 4)^2 \\
 &\Leftrightarrow x - 2 = x^2 - 8x + 16 \\
 &\Leftrightarrow x^2 - 9x + 18 = 0 \\
 &\Leftrightarrow x = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 72}}{2} \\
 &\Leftrightarrow x = \frac{9 \pm 3}{2} \\
 &\Leftrightarrow x = 6 \vee x = 3
 \end{aligned}$$

Verificação:

Se $x = 6$, então $4 - 6 + \sqrt{6-2} = 0 \Leftrightarrow -2 + \sqrt{4} = 0 \Leftrightarrow -2 + 2 = 0$, que é uma proposição verdadeira, logo 6 é um zero da função f .

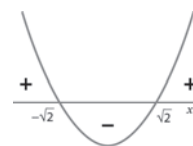
Se $x = 3$, então $4 - 3 + \sqrt{3-2} = 0 \Leftrightarrow 1 + \sqrt{1} = 0 \Leftrightarrow 1 + 1 = 0$, que é uma proposição falsa, logo 3 não é um zero da função f .

(Opção C)

$$\begin{aligned}
 15. \quad D_f &= \{x \in \mathbb{R} : |x^2 - 1| - 1 \geq 0\} \\
 |x^2 - 1| - 1 \geq 0 &\Leftrightarrow |x^2 - 1| \geq 1 \Leftrightarrow x^2 - 1 \geq 1 \vee x^2 - 1 \leq -1 \\
 &\Leftrightarrow x^2 - 2 \geq 0 \vee x^2 \leq 0
 \end{aligned}$$

Cálculo auxiliar

$$\begin{aligned}
 x^2 - 2 &= 0 \Leftrightarrow x^2 = 2 \\
 &\Leftrightarrow x = \sqrt{2} \vee x = -\sqrt{2}
 \end{aligned}$$



$$C.S. =]-\infty, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, +\infty[\cup \{0\}$$

(Opção A)

16.

$$a) D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap \{x \in D_g : g(x) \neq 0\} =]-\infty, 3] \cap \{x \in \mathbb{R}_0^+ : 2 - \sqrt{2x} \neq 0\} = [0, 3] \setminus \{2\}$$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : 6 - 2x \geq 0\} =]-\infty, 3]$$

Cálculo auxiliar

$$6 - 2x \geq 0 \Leftrightarrow -2x \geq -6 \Leftrightarrow 2x \leq 6 \Leftrightarrow x \leq 3$$

$$D_g = \mathbb{R}_0^+$$

Cálculo auxiliar

$$2 - \sqrt{2x} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2x} = 2 \Rightarrow 2x = 4 \Leftrightarrow x = 2$$

Verificação:

$2 - \sqrt{2 \times 2} = 0 \Leftrightarrow 2 - \sqrt{4} = 0 \Leftrightarrow 2 - 2 = 0$, que é uma proposição verdadeira, logo 2 é solução da equação.

(Opção C)

$$\text{b)} (g \circ f)(1) = g(f(1)) = g(\sqrt{6-2 \times 1}) = g(\sqrt{4}) = g(2) = 2 - \sqrt{2 \times 2} = 0$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(1) = \frac{f(1)}{g(1)} = \frac{\sqrt{6-2 \times 1}}{2 - \sqrt{2 \times 1}} = \frac{\sqrt{4}}{2 - \sqrt{2}} = \frac{2}{2 - \sqrt{2}} \times \frac{2 + \sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}} = \frac{4 + 2\sqrt{2}}{4 - 2} = \frac{4 + 2\sqrt{2}}{2} = 2 + \sqrt{2}$$

$$g\left(\frac{1}{2}\right) = 2 - \sqrt{2 \times \frac{1}{2}} = 2 - \sqrt{1} = 1, \text{ logo } g^{-1}(1) = \frac{1}{2}$$

$$(g - f)(2) = g(2) - f(2) = 2 - \sqrt{2 \times 2} - \sqrt{6 - 2 \times 2} = 2 - \sqrt{4} - \sqrt{6 - 4} = 2 - 2 - \sqrt{2} = -\sqrt{2}$$

(Opção D)

17. A representação gráfica da função f é um segmento de reta de extremos nos pontos de coordenadas $(-2, 2)$ e $(4, -1)$. Assim, o contradomínio de f é $[-1, 2]$.

O contradomínio de g é então $[1, 4]$, uma vez que o gráfico de g se obtém do gráfico de f por meio de uma reflexão de eixo Ox , seguida de uma translação de vetor $(2, 3)$.

Cálculos auxiliares

$$f(-2) = -\frac{-2}{2} + 1 = 1 + 1 = 2$$

$$f(4) = -\frac{4}{2} + 1 = -2 + 1 = -1$$

(Opção B)

$$18. f(x) \leq g(x) \Leftrightarrow \sqrt[3]{x} \leq \sqrt{x} \Leftrightarrow x \leq \sqrt{x^3}$$

$$\Rightarrow x^2 \leq x^3$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x^3 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow x^2(1 - x) \leq 0$$

| | | | | |
|--------------|---|---|---|-----------|
| x | 0 | | 1 | $+\infty$ |
| x^2 | 0 | + | + | + |
| $1 - x$ | + | + | 0 | - |
| $x^2(1 - x)$ | 0 | + | 0 | - |

Logo, C.S. = $\{0\} \cup [1, +\infty[$

(Opção B)

$$19. f(x) = (a - 1)x + 2a$$

- a) Para que f seja estritamente decrescente, então:

$$a - 1 < 0 \Leftrightarrow a < 1 \Leftrightarrow a \in]-\infty, 1[$$

- b) Se o gráfico de f intersecta o eixo Ox no ponto de abscissa -1 , então:

$$f(-1) = 0 \Leftrightarrow (a - 1) \times (-1) + 2a = 0 \Leftrightarrow -a + 1 + 2a = 0 \Leftrightarrow a = -1$$

- c) Para que o gráfico de f seja uma reta paralela ao eixo das abscissas:

$$a - 1 = 0 \Leftrightarrow a = 1$$

20. $f(x) = -x^2 + 5x - 6$

a) $f(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 5x - 6 = 0$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 24}}{-2}$$

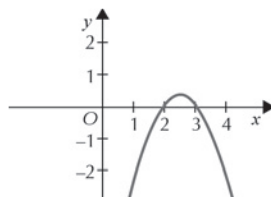
$$\Leftrightarrow x = \frac{-5 \pm 1}{-2}$$

$$\Leftrightarrow x = 2 \vee x = 3$$

Os zeros de f são 2 e 3.

b) O eixo de simetria do gráfico de f é $x = \frac{2+3}{2} \Leftrightarrow x = \frac{5}{2}$.

c)

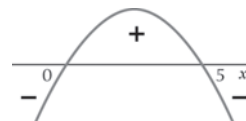


d) A função não é sobrejetiva, uma vez que o seu conjunto de chegada é \mathbb{R} , que é diferente do seu contradomínio.

e) $f(x) \leq -6 \Leftrightarrow -x^2 + 5x - 6 \leq -6 \Leftrightarrow -x^2 + 5x \leq 0$

Cálculo auxiliar

$$-x^2 + 5x = 0 \Leftrightarrow x(-x + 5) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 5$$



$$\text{C.S.} =]-\infty, 0] \cup [5, +\infty[$$

f) $D'_{|f|} = [0, +\infty[$

21. $f(x) = 2|x - 1| + 4$

a) Interseção com o eixo Oy :

$$f(0) = 2|0 - 1| + 4 = 2 + 4 = 6$$

Logo, o ponto de interseção do gráfico de f com o eixo das ordenadas tem coordenadas (0, 6).

Interseção com o eixo Ox :

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow 2|x - 1| + 4 = 0 \Leftrightarrow |x - 1| = -2 \quad \text{Equação impossível.}$$

Logo, o gráfico de f não intersesta o eixo das abcissas.

b) $D'_f = [4, +\infty[$

c) $f(x) < 6 \Leftrightarrow 2|x - 1| + 4 < 6 \Leftrightarrow 2|x - 1| < 2 \Leftrightarrow |x - 1| < 1$

$$\Leftrightarrow x - 1 < 1 \wedge x - 1 > -1$$

$$\Leftrightarrow x < 2 \wedge x > 0$$

$$\text{C.S.} =]0, 2[$$

d) A função é injetiva em $]1, +\infty[$, por exemplo.

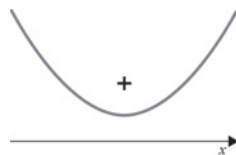
22.

a) $2x^2 + 5x + 6 \geq 0$

Cálculo auxiliar

$$2x^2 + 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 48}}{2}$$

Equação impossível em \mathbb{R} .



C.S. = \mathbb{R}

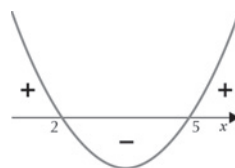
b) $(x - 3)^2 \leq x - 1 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 - x + 1 \leq 0 \Leftrightarrow x^2 - 7x + 10 \leq 0$

Cálculo auxiliar

$$x^2 - 7x + 10 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 40}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{7 \pm 3}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = 5 \vee x = 2$$



C.S. = $[2, 5]$

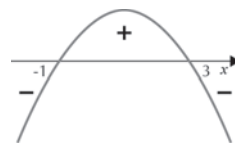
c) $2x - 1 < (x - 2)(x - 2) \Leftrightarrow 2x - 1 < x^2 - 4 \Leftrightarrow -x^2 + 2x + 3 < 0$

Cálculo auxiliar

$$-x^2 + 2x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 12}}{-2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm 4}{-2}$$

$$\Leftrightarrow x = -1 \vee x = 3$$



C.S. = $] -\infty, -1[\cup] 3, +\infty[$

d) $(x^2 - 4)(1 - x^2) > 0$

| x | $-\infty$ | -2 | | -1 | | 1 | | 2 | $+\infty$ |
|----------------------|-----------|------|---|------|---|-----|---|-----|-----------|
| $x^2 - 4$ | + | 0 | - | - | - | - | - | 0 | + |
| $1 - x^2$ | - | - | - | 0 | + | 0 | - | - | - |
| $(x^2 - 4)(1 - x^2)$ | - | 0 | + | 0 | - | 0 | + | 0 | - |

C.S. = $] -2, -1[\cup] 1, 2[$

23.

a) $V = \pi \times 3^2 \times 3 = 27\pi \text{ m}^3 = 27\,000 \times \pi \text{ litros}$

$$\frac{27\,000 \times \pi}{100 \times 60} = \frac{27}{6} \pi \approx 14 \text{ horas}$$

b) $27\,000 \times \pi - 2 \times 60 \times 100 \approx 72\,823 \text{ litros}$

c) $D_v = \left[0, \frac{27}{6}\pi\right]$

$$D'_v = [0, 27\pi]$$

d) Como a piscina tem a forma de um cilindro a função v é uma função afim.

Uma vez que $v(0) = 27\pi$ e $v\left(\frac{27}{6}\pi\right) = 0$, então o declive da reta que representa esta função é

$$\frac{27\pi - 0}{0 - \frac{27}{6}\pi} = -6 \text{ e a ordenada na origem é } 27\pi. \text{ Logo, } v(t) = 27\pi - 6t.$$

24. $f(x) = 2x^2 - 4x + 1$

a) Abcissa do vértice: $\frac{-(-4)}{2 \times 2} = 1$

Ordenada do vértice: $f(1) = 2 \times 1^2 - 4 \times 1 + 1 = 2 - 4 + 1 = -1$

Logo, $f(x) = 2(x - 1)^2 - 1$.

b) A função f é estritamente decrescente em $]-\infty, 1]$ e é estritamente crescente em $[1, +\infty[$, tem um mínimo absoluto igual a -1 em 1.

c) Se $k > 1$, a função $f(x) + k$ é sempre positiva.

d) $D_f = \mathbb{R}$, logo $\forall x \in D_f, -x \in D_f$

$f(-x) = 2(-x)^2 - 4(-x) + 1 = 2x^2 + 4x + 1$

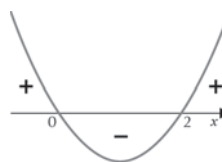
Ou seja, não é verdade que $f(-x) = f(x), \forall x \in D_f$, logo f não é uma função par e, portanto, o seu gráfico não é simétrico em relação ao eixo Oy , pelo que a afirmação é falsa.

e) $D_g = \{x \in \mathbb{R}: f(x) - 1 \geq 0\} =]-\infty, 0] \cup [2, +\infty[$

$f(x) - 1 \geq 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 4x + 1 - 1 \geq 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 4x \geq 0$

Cálculo auxiliar

$2x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow 2x(x - 2) = 0$
 $\Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2$



25. $f(x) = (1 - k)x^2 + 2x + 1$

a) $f(0) = 1$

Logo, $A(0, 1)$.

$f(x) = 1 \Leftrightarrow (1 - k)x^2 + 2x + 1 = 1 \Leftrightarrow (1 - k)x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow x((1 - k)x + 2) = 0$

$\Leftrightarrow x = 0 \vee (1 - k)x = 2$

$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{2}{1 - k}$

Logo, $B\left(\frac{2}{1 - k}, 1\right)$.

$\overline{AB} = \sqrt{\left(0 - \frac{2}{1 - k}\right)^2 + (1 - 1)^2} = \sqrt{\left(\frac{2}{1 - k}\right)^2} = \frac{2}{1 - k}$

b) Para que a equação $f(x) = 0$ tenha duas soluções distintas, $\Delta > 0$.

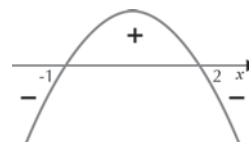
$\Delta > 0 \Leftrightarrow 2^2 - 4(1 - k) \times 1 > 0 \Leftrightarrow 4 - 4 + k > 0 \Leftrightarrow k > 0$

c) $f(x) = -2x^2 + 2x + 1$

i. $-2x^2 + 2x + 1 \leq -3 \Leftrightarrow -2x^2 + 2x + 4 \leq 0$

Cálculo auxiliar

$-2x^2 + 2x + 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 8}}{2}$
 $\Leftrightarrow x = \frac{1 \pm 3}{2}$
 $\Leftrightarrow x = 2 \vee x = -1$



C.S. = $]-\infty, -1] \cup [2, +\infty[$

$$\begin{aligned}
 \text{ii. } g(x) = 0 &\Leftrightarrow f\left(\frac{x}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow -2\left(\frac{x}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{2}\right) + 1 = 0 \Leftrightarrow -\frac{x^2}{2} + x + 1 = 0 \\
 &\Leftrightarrow -x^2 + 2x + 2 = 0 \\
 &\Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+8}}{-2} \\
 &\Leftrightarrow x = \frac{2 \pm 2\sqrt{3}}{2} \\
 &\Leftrightarrow x = 1 - \sqrt{3} \vee x = 1 + \sqrt{3}
 \end{aligned}$$

Logo, os zeros de g são $1 - \sqrt{3}$ e $1 + \sqrt{3}$.

$$\begin{aligned}
 \text{iii. } h(x) &= -2f(x-3) + 1 = -2[-2(x-3)^2 + 2(x-3) + 1] + 1 \\
 &= -2(-2(x^2 - 6x + 9) + 2x - 6 + 1) + 1 \\
 &= -2(-2x^2 + 12x - 18 + 2x - 5) + 1 \\
 &= 4x^2 - 28x + 47
 \end{aligned}$$

$$\text{Abcissa do vértice: } \frac{-(-28)}{2 \times 4} = \frac{7}{2}$$

$$\text{Ordenada do vértice: } h\left(\frac{7}{2}\right) = 4\left(\frac{7}{2}\right)^2 - 28 \times \frac{7}{2} + 47 = 49 - 98 + 47 = -2$$

Como a parábola que representa graficamente a função tem concavidade voltada para cima, então, $D'_h = [-2, +\infty[$.

$$26. h(t) = -t^2 + 5t + 10$$

$$\text{a) } h(3) = -3^2 + 5 \times 3 + 10 = -9 + 15 + 10 = 16$$

A altura do foguete ao fim de 2 segundos é 16 metros.

b) O gráfico da função é uma parábola com concavidade voltada para baixo.

$$\text{Abissa do vértice: } \frac{-5}{2 \times (-1)} = \frac{5}{2}$$

$$\text{Ordenada do vértice: } h\left(\frac{5}{2}\right) = -\left(\frac{5}{2}\right)^2 + 5 \times \frac{5}{2} + 10 = -\frac{25}{4} + \frac{25}{2} + 10 = 16,25$$

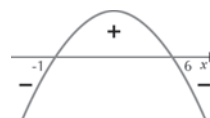
A altura máxima atingida é 16,25 metros.

c) Para $t \geq 0$:

$$h(t) \geq 4 \Leftrightarrow -t^2 + 5t + 10 \geq 4 \Leftrightarrow -t^2 + 5t + 6 \geq 0$$

Cálculo auxiliar

$$\begin{aligned}
 -t^2 + 5t + 6 = 0 &\Leftrightarrow t = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 24}}{-2} \Leftrightarrow t = \frac{5 \pm 7}{2} \\
 &\Leftrightarrow t = 6 \vee t = -1
 \end{aligned}$$



Logo, $t \in [0, 6[$.

A luz útil de cada foguete dura 6 segundos.

27.

a) $\overline{AE} = x = \overline{AD} = \overline{DE}$

$$\overline{AB} = 6$$

Pelo Teorema de Pitágoras:

$$\overline{DE}^2 = \overline{CB}^2 + \left(\frac{1}{2}\overline{AE}\right)^2 \Leftrightarrow x^2 = \overline{CB}^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \overline{CB}^2 = x^2 - \frac{x^2}{4} \Leftrightarrow \overline{CB}^2 = \frac{3}{4}x^2$$

Logo, $\overline{CB} = \frac{\sqrt{3}}{2}x$.

$$\overline{DC} = \overline{AB} - \frac{1}{2}\overline{AE} = 6 - \frac{x}{2}$$

Assim:

$$\begin{aligned} A(x) &= \frac{(\overline{AB} + \overline{DC}) \times \overline{CB}}{2} = \frac{\left(6 + 6 - \frac{x}{2}\right) \times \frac{\sqrt{3}}{2}x}{2} \\ &= \left(12 - \frac{x}{2}\right) \frac{\sqrt{3}}{4}x \\ &= \frac{12\sqrt{3}}{4}x - \frac{\sqrt{3}}{8}x^2 \\ &= \frac{24\sqrt{3}}{8}x - \frac{\sqrt{3}}{8}x^2 \\ &= \frac{\sqrt{3}}{8}(24x - x^2) \end{aligned}$$

b) $A(x) = 10\sqrt{3} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{8}(24x - x^2) = 10\sqrt{3} \Leftrightarrow 24x - x^2 = 80$

$$\Leftrightarrow -x^2 + 24x - 80 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-24 \pm \sqrt{24^2 - 4 \times 80}}{-2}$$

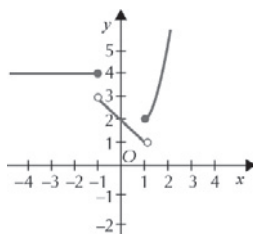
$$\Leftrightarrow x = \frac{24 \pm 16}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = 20 \vee x = 4$$

Como $x \leq 6$, então $x = 4$.

28.

a)



b) $f(-\sqrt[3]{3}) - f(0) + f(\sqrt{2}) = 4 - (2 - 0) + (\sqrt{2}^2 + 1) = 4 - 2 + 3 = 5$

c) $D_f' =]1, +\infty[$

d) Se $x \in]-\infty, 1]$: $f(x) = 0 \Leftrightarrow 4 = 0$, que é uma proposição falsa, logo a função não tem zeros neste intervalo.

Se $x \in]-1, 1[$: $f(x) = 0 \Leftrightarrow 2 - x = 0 \Leftrightarrow x = 2$

Mas $2 \notin]-1, 1[$, logo a função não tem zeros neste intervalo.

Se $x \in [1, +\infty[$: $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 1 = 0$, que é uma equação impossível em \mathbb{R} , pelo que a função também não tem zeros neste intervalo.

Logo, a função f não tem zeros.

- e) Se $k \in [2, 3[$, então a equação $f(x) = k$ tem exatamente duas soluções.

29.

a) $5 \times 6 + 3 \times 4 = 30 + 12 = 42$

A Maria pagou 42 euros.

b) $5 \times 6 + 3 \times (x - 6) = 60 \Leftrightarrow 30 + 3x - 18 = 60 \Leftrightarrow 3x = 48 \Leftrightarrow x = 16$

A Maria foi a 16 aulas.

c) $f(x) = \begin{cases} 5x & \text{se } x \leq 6 \\ 5 \times 6 + 3(x - 6) & \text{se } x > 6 \end{cases} = \begin{cases} 5x & \text{se } x \leq 6 \\ 12 + 3x & \text{se } x > 6 \end{cases}$

30.

- a) Se $x \leq -2$, o gráfico da função f é uma reta que contém os pontos de coordenadas $(-4, 0)$ e $(-2, 3)$.

O declive da reta é $\frac{0-3}{-4-(-2)} = \frac{3}{2}$.

Então, a equação reduzida da reta é da forma $f(x) = \frac{3}{2}x + b$.

$$f(-4) = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{2} \times (-4) + b = 0 \Leftrightarrow b = 6$$

Logo, $f(x) = \frac{3}{2}x + 6$ se $x \in]-\infty, -2]$.

Se $-2 < x < 0$, a função é constante.

Logo, $f(x) = 3$ se $x \in]-2, 0[$.

Se $x \geq 0$, o gráfico da função f é uma parábola de vértice $(2, 2)$ e em que um dos zeros é o ponto de coordenadas $(0, 0)$.

Assim, $f(x) = a(x - 2)^2 + 2$.

$$f(0) = 0 \Leftrightarrow a \times (-2)^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow 4a = -2 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{2}$$

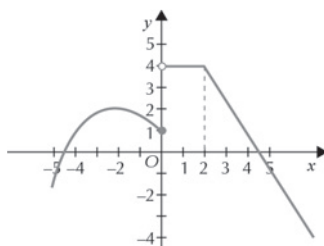
Logo:

$$f(x) = -\frac{1}{2}(x - 2)^2 + 2 = -\frac{1}{2}(x^2 - 4x + 4) + 2 = -\frac{1}{2}x^2 + 2x - 2 + 2 = -\frac{1}{2}x^2 + 2x \text{ se } x \in [0, +\infty[.$$

$$\text{Assim, } f(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}x + 6 & \text{se } x \leq -2 \\ 3 & \text{se } -2 < x < 0 \\ -\frac{1}{2}x^2 + 2x & \text{se } x \geq 0 \end{cases}.$$

- b) $-2f(x) > 0 \Leftrightarrow f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, -4[\cup]4, +\infty[$

c)



d) $h(x) = c(x + 1) - 2$

O gráfico da função h , obtém-se do gráfico da função f por meio de uma translação de vetor $(-1, -2)$. Assim, $D'_h =]-\infty, 1]$ e um dos zeros da função h é 1.

O outro zero da função h é a solução da equação:

$$\frac{3}{2}(x + 1) + 6 - 2 = 0 \Leftrightarrow 3(x + 1) + 8 = 0 \Leftrightarrow x + 1 = -\frac{8}{3} \Leftrightarrow x = -\frac{11}{3}$$

e) A função f não admite inversa por não se tratar de uma função injetiva, uma vez que, por exemplo, $f(0) = f(4) = 0$.

31.

a) $1 - \frac{|x+1|}{2} > -2 \Leftrightarrow -\frac{|x+1|}{2} > -3 \Leftrightarrow \frac{|x+1|}{2} < 3$

$$\Leftrightarrow |x + 1| < 6$$

$$\Leftrightarrow x + 1 < 6 \wedge x + 1 > -6$$

$$\Leftrightarrow x < 5 \wedge x > -7$$

$$\text{C.S.} =]-7, 5[$$

b) $|4x + 1| = x \Leftrightarrow (4x + 1 = x \vee 4x + 1 = -x) \wedge x \geq 0$

$$\Leftrightarrow (3x = -1 \vee 5x = -1) \wedge x \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x = -\frac{1}{3} \vee x = -\frac{1}{5}\right) \wedge x \geq 0$$

$$\text{C.S.} = \emptyset$$

c) $\frac{3}{|x^2-9|} > 0 \Leftrightarrow |x^2 - 9| > 0 \Leftrightarrow x^2 - 9 \neq 0$

$$\Leftrightarrow x \neq 3 \wedge x \neq -3$$

$$\text{C.S.} = \mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}$$

d) $|1 - 2x| = |3x - 2| \Leftrightarrow (1 - 2x)^2 = (3x - 2)^2$

$$\Leftrightarrow 1 - 4x + 4x^2 = 9x^2 - 12x + 4$$

$$\Leftrightarrow -5x^2 + 8x - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-8 \pm \sqrt{64 - 60}}{-10}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{8 \pm 2}{10}$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \vee x = \frac{3}{5}$$

$$\text{C.S.} = \left\{\frac{3}{5}, 1\right\}$$

$$\begin{aligned}
 \text{e)} \quad -2|x-1| > 2x &\Leftrightarrow |x-1| < -x \\
 &\Leftrightarrow (x-1 < -x \wedge x-1 > x) \wedge -x \geq 0 \\
 &\Leftrightarrow 2x < 1 \wedge \underbrace{-1 > 0}_{\substack{\text{Proposição} \\ \text{falsa}}} \wedge x \leq 0
 \end{aligned}$$

$$\text{C.S.} = \emptyset$$

$$\begin{aligned}
 \text{f)} \quad |x^2 + 4x + 4| > 0 &\Leftrightarrow x^2 + 4x + 4 \neq 0 \Leftrightarrow (x+2)^2 \neq 0 \\
 &\Leftrightarrow x+2 \neq 0 \\
 &\Leftrightarrow x \neq -2
 \end{aligned}$$

$$\text{C.S.} = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$$

$$\begin{aligned}
 \text{g)} \quad |4x+1| < |2-x| &\Leftrightarrow (4x+1)^2 < (2-x)^2 \\
 &\Leftrightarrow 16x^2 + 8x + 1 < 4 - 4x + x^2 \\
 &\Leftrightarrow 15x^2 + 12x - 3 < 0 \\
 &\Leftrightarrow 5x^2 + 4x - 1 < 0
 \end{aligned}$$

Cálculo auxiliar

$$\begin{aligned}
 5x^2 + 4x - 1 = 0 &\Leftrightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{16+20}}{10} \\
 &\Leftrightarrow x = \frac{-4 \pm 6}{10} \\
 &\Leftrightarrow x = -1 \vee x = \frac{1}{5}
 \end{aligned}$$



$$\text{C.S.} = \left] -1, \frac{1}{5} \right[$$

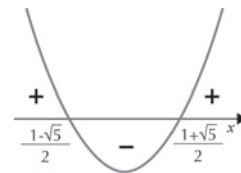
$$\begin{aligned}
 \text{h)} \quad |x^2 - x - 2| \leq 0 &\Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \\
 &\Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} \\
 &\Leftrightarrow x = \frac{1 \pm 3}{2} \\
 &\Leftrightarrow x = 2 \vee x = -1
 \end{aligned}$$

$$\text{C.S.} = \{-1, 2\}$$

$$\text{i)} \quad |x^2 - x| \geq 1 \Leftrightarrow x^2 - x \geq 1 \vee x^2 - x \leq -1 \Leftrightarrow x^2 - x - 1 \leq 0 \vee x^2 - x + 1 \geq 0$$

Cálculos auxiliares

$$\begin{aligned}
 x^2 - x - 1 = 0 &\Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \\
 &\Leftrightarrow x = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \vee x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\
 x^2 - x + 1 = 0 &\Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1-4}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2} \\
 &\text{Equação impossível em } \mathbb{R}.
 \end{aligned}$$



$$\text{C.S.} = \left] -\infty, \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right] \cup \left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}, +\infty \right[$$

32.

- a) O gráfico de g obtém-se do gráfico da função definida por $y = |x|$ por meio de uma translação de vetor $(2, 0)$, seguida de uma reflexão em relação ao eixo Ox , seguida de uma translação de vetor $(0, 5)$.

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad g(x) = 0 &\Leftrightarrow -|x-2| + 5 = 0 \Leftrightarrow |x-2| = 5 \\ &\Leftrightarrow x-2 = 5 \vee x-2 = -5 \\ &\Leftrightarrow x = 7 \vee x = -3 \end{aligned}$$

Logo, os zeros de g são -3 e 7 .

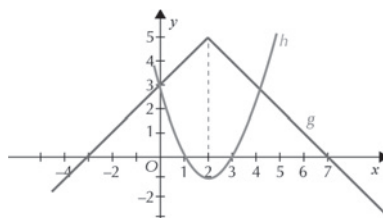
$$h(x) = 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 = 1 \Leftrightarrow x-2 = 1 \vee x-2 = -1 \Leftrightarrow x = 3 \vee x = 1$$

Logo, os zeros de h são 1 e 3 .

$$\begin{aligned} \text{c)} \quad g(x) \geq 1 &\Leftrightarrow -|x-2| + 5 \geq 1 \\ &\Leftrightarrow -|x-2| \geq -4 \\ &\Leftrightarrow |x-2| \leq 4 \\ &\Leftrightarrow x-2 \leq 4 \wedge x-2 \geq -4 \\ &\Leftrightarrow x \leq 6 \wedge x \geq -2 \end{aligned} \quad \text{C.S.} = [-2, 6]$$

$$\text{d)} \quad g(x) = -|x-2| + 5 = \begin{cases} -(x-2) + 5 & \text{se } x-2 \geq 0 \\ -(-x+2) + 5 & \text{se } x-2 < 0 \end{cases} = \begin{cases} -x+7 & \text{se } x \geq 2 \\ x+3 & \text{se } x < 2 \end{cases}$$

e)



$$\text{C.S.} = [0, 4]$$

33.

a) $f(x) = |2x| - 1$

$$D_f = \mathbb{R}, \text{ logo } \forall x \in D_f, -x \in D_f$$

$$f(-x) = |2(-x)| - 1 = |-2x| - 1 = |2x| - 1 = f(x), \forall x \in D_f, \text{ ou seja, } f \text{ é uma função par.}$$

b) $f(x) = 2x^3 - 3x$

$$D_f = \mathbb{R}, \text{ logo } \forall x \in D_f, -x \in D_f$$

$$f(-x) = 2(-x)^3 - 3(-x) = -2x^3 + 3x = -f(x), \forall x \in D_f, \text{ ou seja, } f \text{ é uma função ímpar.}$$

c) $f(x) = x|5x|$

$$D_f = \mathbb{R}, \text{ logo } \forall x \in D_f, -x \in D_f$$

$$f(-x) = -x|5(-x)| = -x|5x| = -f(x), \forall x \in D_f, \text{ ou seja, } f \text{ é uma função ímpar.}$$

d) $f(x) = 5\sqrt[3]{x}$

$$D_f = \mathbb{R}, \text{ logo } \forall x \in D_f, -x \in D_f$$

$$f(-x) = 5\sqrt[3]{(-x)} = -5\sqrt[3]{x} = -f(x), \forall x \in D_f, \text{ ou seja, } f \text{ é uma função ímpar.}$$

e) $f(x) = 5x^2 - 3x^4$

$$D_f = \mathbb{R}, \text{ logo } \forall x \in D_f, -x \in D_f$$

$$f(-x) = 5(-x)^2 - 3(-x)^4 = 5x^2 - 3x^4 = f(x), \forall x \in D_f, \text{ ou seja, } f \text{ é uma função par.}$$

f) $f(x) = 1 + \sqrt{16 - x^2}$

$D_f = \{x \in \mathbb{R} : 16 - x^2 \geq 0\} = [-4, 4]$, logo $\forall x \in D_f, -x \in D_f$

Cálculo auxiliar

$16 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 4 \vee x = -4$



$f(-x) = 1 + \sqrt{16 - (-x)^2} = 1 + \sqrt{16 - x^2} = f(x)$, $\forall x \in D_f$, ou seja, f é uma função par.

34.

a) $\sqrt{6 - x} = -x \Rightarrow 6 - x = (-x)^2$

$\Leftrightarrow 6 - x = x^2$

$\Leftrightarrow -x^2 - x + 6 = 0$

$\Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 24}}{-2}$

$\Leftrightarrow x = \frac{1 \pm 5}{-2}$

$\Leftrightarrow x = 2 \vee x = -3$

Verificação:

Se $x = 2$, então $\sqrt{6 - 2} = -2 \Leftrightarrow \sqrt{4} = -2$, que é uma proposição falsa, logo 2 não é solução da equação.

Se $x = -3$, então $\sqrt{6 - (-3)} = -(-3) \Leftrightarrow \sqrt{9} = 3$, que é uma proposição verdadeira, logo -3 é solução da equação.

C.S. = $\{-3\}$

b) $\sqrt{x^2 - x} - 3\sqrt{x} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - x} = 3\sqrt{x}$

$\Rightarrow x^2 - x = 9x$

$\Leftrightarrow x^2 - 10x = 0$

$\Leftrightarrow x(x - 10) = 0$

$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = 10$

Verificação:

Se $x = 0$, então $\sqrt{0^2 - 0} - 3\sqrt{0} = 0 \Leftrightarrow 0 - 0 = 0$, que é uma proposição verdadeira, logo 0 é solução da equação.

Se $x = 10$, então $\sqrt{10^2 - 10} - 3\sqrt{10} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{90} - 3\sqrt{10} = 0 \Leftrightarrow 3\sqrt{10} - 3\sqrt{10} = 0$, que é uma proposição verdadeira, logo 10 é solução da equação.

C.S. = $\{0, 10\}$

c) $\sqrt{3x - 5} = \sqrt{x + 2} + 1 \Rightarrow 3x - 5 = (\sqrt{x + 2} + 1)^2$

$\Leftrightarrow 3x - 5 = x + 2 + 2\sqrt{x + 2} + 1$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{x + 2} = 2x - 8$

$\Leftrightarrow \sqrt{x + 2} = x - 4$

$\Rightarrow x + 2 = (x - 4)^2$

$\Leftrightarrow x + 2 = x^2 - 8x + 16$

$\Leftrightarrow x^2 - 9x + 14 = 0$

$$\Leftrightarrow x = \frac{9 \pm \sqrt{81-56}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{9 \pm 5}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = 7 \vee x = 2$$

Se $x = 7$, então $\sqrt{3 \times 7 - 5} = \sqrt{7+2} + 1 \Leftrightarrow \sqrt{21-5} = \sqrt{9} + 1 \Leftrightarrow \sqrt{16} = 3 + 1 \Leftrightarrow 4 = 4$, que é uma proposição verdadeira, logo 7 é solução da equação.

Se $x = 2$, então $\sqrt{3 \times 2 - 5} = \sqrt{2+2} + 1 \Leftrightarrow \sqrt{6-5} = \sqrt{4} + 1 \Leftrightarrow \sqrt{1} = 1 + 1 \Leftrightarrow 1 = 2$, que é uma proposição falsa, logo 2 não é solução da equação.

$$\text{C.S.} = \{7\}$$

$$\text{d)} \quad \sqrt[3]{2x-5} = 3 \Leftrightarrow 2x-5 = 3^3 \Leftrightarrow 2x = 27+5 \Leftrightarrow x = 16$$

$$\text{C.S.} = \{16\}$$

35.

$$\text{a)} \quad T(15) = 2\pi \sqrt{\frac{15}{980}} \approx 0,8 \text{ s}$$

$$\text{b)} \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{c}{980}} \Leftrightarrow \frac{T}{2\pi} = \sqrt{\frac{c}{980}} \Leftrightarrow \left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 = \frac{c}{980} \Leftrightarrow c = 980 \times \frac{1}{4} \left(\frac{T}{\pi}\right)^2 \Leftrightarrow c = 245 \left(\frac{T}{\pi}\right)^2$$

$$\text{c)} \quad c(\sqrt[3]{3}) = 245 \left(\frac{\sqrt[3]{3}}{\pi}\right)^2 \approx 51,6 \text{ cm}$$

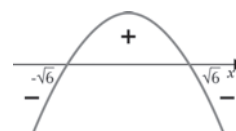
Este valor representa o comprimento de um pêndulo de período igual a $\sqrt[3]{3}$ segundos.

36.

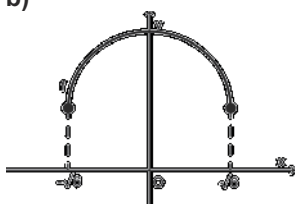
$$\text{a)} \quad D_f = \{x \in \mathbb{R} : 6 - x^2 \geq 0\} = [-\sqrt{6}, \sqrt{6}]$$

Cálculo auxiliar

$$6 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{6} \vee x = -\sqrt{6}$$



b)



A função f é estritamente crescente em $[-\sqrt{6}, 0]$ e é estritamente decrescente em $[0, \sqrt{6}]$.

$$\begin{aligned} \text{c)} \quad f(x) = g(x) &\Leftrightarrow \sqrt{6-x^2} + 2 = 2 - x \Leftrightarrow \sqrt{6-x^2} = -x \\ &\Rightarrow 6 - x^2 = x^2 \\ &\Leftrightarrow 2x^2 = 6 \\ &\Leftrightarrow x^2 = 3 \\ &\Leftrightarrow x = \sqrt{3} \vee x = -\sqrt{3} \end{aligned}$$

Verificação:

Se $x = \sqrt{3}$, então $\sqrt{6 - (\sqrt{3})^2} + 2 = 2 - \sqrt{3} \Leftrightarrow \sqrt{6-3} + 2 = 2 - \sqrt{3} \Leftrightarrow \sqrt{3} + 2 = 2 - \sqrt{3}$, que é uma proposição falsa, logo $\sqrt{3}$ não é solução da equação.

Se $x = -\sqrt{3}$, então $\sqrt{6 - (-\sqrt{3})^2} + 2 = 2 - (-\sqrt{3}) \Leftrightarrow \sqrt{6-3} + 2 = 2 + \sqrt{3} \Leftrightarrow \sqrt{3} + 2 = 2 + \sqrt{3}$, que é uma proposição verdadeira, logo $-\sqrt{3}$ é solução da equação.

$$f(-\sqrt{3}) = \sqrt{6 - (-\sqrt{3})^2} + 2 = \sqrt{6-3} + 2 = 2 + \sqrt{3}$$

Logo, as coordenadas do ponto de interseção das duas funções são $(-\sqrt{3}, 2 + \sqrt{3})$.

$$\begin{aligned} \text{d) } (g \circ f)(-2) &= g(f(-2)) = g(\sqrt{6 - (-2)^2} + 2) = g(\sqrt{6-4} + 2) \\ &= g(\sqrt{2} + 2) \\ &= 2 - (\sqrt{2} + 2) \\ &= -\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\text{e) } D_{f \circ g} = \{x \in D_g : g(x) \in D_f\} = \{x \in \mathbb{R} : g(x) \in [-\sqrt{6}, \sqrt{6}]\} = [2 - \sqrt{6}, 2 + \sqrt{6}]$$

Cálculo auxiliar

$$\begin{aligned} g(x) \in [-\sqrt{6}, \sqrt{6}] &\Leftrightarrow 2 - x \geq -\sqrt{6} \wedge 2 - x \leq \sqrt{6} \\ &\Leftrightarrow -x \geq -2 - \sqrt{6} \wedge -x \leq -2 + \sqrt{6} \\ &\Leftrightarrow x \leq 2 + \sqrt{6} \wedge x \geq 2 - \sqrt{6} \end{aligned}$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(2 - x) = \sqrt{6 - (2 - x)^2} + 2$$

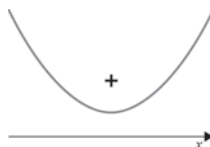
Conjunto de chegada: \mathbb{R}

37.

$$\text{a) } 2(3x - 2)(2x - 1)(x + 1)^2 \leq 0$$

Cálculos auxiliares

$$\begin{aligned} 3x - 2 &= 0 \Leftrightarrow x = \frac{2}{3} \\ 2x - 1 &= 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \\ (x + 1)^2 &= 0 \Leftrightarrow x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \end{aligned}$$



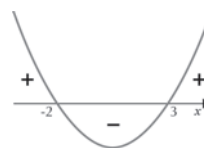
| x | $-\infty$ | -1 | | $\frac{1}{2}$ | | $\frac{2}{3}$ | $+\infty$ |
|------------------------------|-----------|------|---|---------------|---|---------------|-----------|
| $2(3x - 2)$ | - | - | - | - | - | 0 | + |
| $2x - 1$ | - | - | - | 0 | + | + | + |
| $(x + 1)^2$ | + | 0 | + | + | + | + | + |
| $2(3x - 2)(2x - 1)(x + 1)^2$ | + | 0 | + | 0 | - | 0 | + |

$$\text{C.S.} = \left[\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right] \cup \{-1\}$$

$$\text{b) } (2x - 1)(x^2 - x - 6) \geq 0$$

Cálculos auxiliares

$$\begin{aligned} 2x - 1 &= 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \\ x^2 - x - 6 &= 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm 5}{2} \\ &\Leftrightarrow x = 3 \vee x = -2 \end{aligned}$$



| | | | | | | | |
|-------------------------|-----------|------|-----|---------------|-----|-----|-----------|
| x | $-\infty$ | -2 | | $\frac{1}{2}$ | | 3 | $+\infty$ |
| $2x - 1$ | $-$ | $-$ | $-$ | 0 | $+$ | $+$ | $+$ |
| $x^2 - x - 6$ | $+$ | 0 | $-$ | $-$ | $-$ | 0 | $+$ |
| $(2x - 1)(x^2 - x - 6)$ | $-$ | 0 | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ |

$$\text{C.S.} = \left[-2, \frac{1}{2}\right] \cup [3, +\infty[$$

c) $f(x) < 0 \Leftrightarrow -2x^3 + 3x^2 + 5x - 6 < 0 \Leftrightarrow (x - 2)(-2x^2 - x + 3) < 0$

Cálculos auxiliares

| | | | | |
|---|----|----|---|----|
| 2 | -2 | 3 | 5 | -6 |
| | -2 | -1 | 3 | 0 |

$-2x^2 - x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{-4} \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm 5}{-4} \Leftrightarrow x = -\frac{3}{2} \vee x = 1$

| | | | | | | | |
|--------------------------|-----------|----------------|-----|-----|-----|-----|-----------|
| x | $-\infty$ | $-\frac{3}{2}$ | | 1 | | 2 | $+\infty$ |
| $x - 2$ | $-$ | $-$ | $-$ | $-$ | $-$ | 0 | $+$ |
| $-2x^2 - x + 3$ | $-$ | 0 | $+$ | 0 | $-$ | $-$ | $-$ |
| $(x - 2)(-2x^2 - x + 3)$ | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ | 0 | $-$ |

$$\text{C.S.} = \left]-\frac{3}{2}, 1\right[\cup]2, +\infty[$$

d) $x^3 - x^2 \leq 2x \Leftrightarrow x^3 - x^2 - 2x \leq 0 \Leftrightarrow x(x^2 - x - 2) \leq 0$

Cálculo auxiliar

$x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm 3}{2} \Leftrightarrow x = 2 \vee x = -1$

| | | | | | | | |
|------------------|-----------|------|-----|-----|-----|-----|-----------|
| x | $-\infty$ | -1 | | 0 | | 2 | $+\infty$ |
| x | $-$ | $-$ | $-$ | 0 | $+$ | $+$ | $+$ |
| $x^2 - x - 2$ | $+$ | 0 | $-$ | $-$ | $-$ | 0 | $+$ |
| $x(x^2 - x - 2)$ | $-$ | 0 | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ |

$$\text{C.S.} =]-\infty, -1] \cup [0, 2]$$

38.

a) $f(-1) = (-1)^4 + 2 \times (-1)^3 - 16 \times (-1)^2 - 2 \times (-1) + 15 = 1 - 2 - 16 + 2 + 15 = 0$, logo -1 é zero de f .

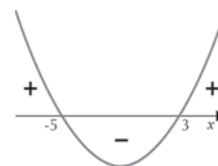
$f(1) = 1^4 + 2 \times 1^3 - 16 \times 1^2 - 2 \times 1 + 15 = 1 + 2 - 16 - 2 + 15 = 0$, logo 1 é zero de f .

b) $f(x) > 0 \Leftrightarrow x^4 + 2x^3 - 16x^2 - 2x + 15 > 0 \Leftrightarrow (x + 1)(x - 1)(x^2 + 2x - 15) > 0$
 $\Leftrightarrow (x^2 - 1)(x^2 + 2x - 15) > 0$

Cálculos auxiliares

| | | | | | |
|----|---|----|-----|-----|-----|
| -1 | 1 | 2 | -16 | -2 | 15 |
| | | -1 | -1 | 17 | -15 |
| 1 | 1 | 1 | -17 | 15 | 0 |
| | | 1 | 2 | -15 | |
| | 1 | 2 | -15 | 0 | |

$$x^2 + 2x - 15 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 60}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm 8}{2} \Leftrightarrow x = -5 \vee x = 3$$



| | | | | | | | | | |
|-------------------|-----------|------|---|------|---|-----|---|-----|-----------|
| x | $-\infty$ | -5 | | -1 | | 1 | | 3 | $+\infty$ |
| $x^2 - 1$ | + | + | + | 0 | - | 0 | + | + | + |
| $x^2 + 2x - 15$ | + | 0 | - | - | - | - | - | 0 | + |
| $(x^2 - 1)$ | + | 0 | - | 0 | + | 0 | - | 0 | + |
| $(x^2 + 2x - 15)$ | | | | | | | | | |

$$C.S. =]-\infty, -5[\cup]-1, 1[\cup]3, +\infty[$$

39.

$$a) R(4\pi\sqrt{3}) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{4\pi\sqrt{3}}{\pi}} = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{\sqrt{3}} = \sqrt[4]{3}$$

$$b) V(x) = \frac{4}{3} \pi [R(x)]^3 = \frac{4}{3} \pi \times \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{x}{\pi}}\right)^3$$

$$= \frac{4}{3} \pi \times \frac{1}{8} \times \frac{x}{\pi} \sqrt{\frac{x}{\pi}} = \frac{x}{6} \sqrt{\frac{x}{\pi}}$$

$$c) V(x) = \frac{1}{2} x \Leftrightarrow \frac{x}{6} \sqrt{\frac{x}{\pi}} = \frac{x}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{x}{\pi}} = 3$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{\pi} = 9 \Leftrightarrow x = 9\pi$$

40.

$$a) g(x) = |4 - x| = \begin{cases} 4 - x & \text{se } 4 - x \geq 0 \\ -4 + x & \text{se } 4 - x < 0 \end{cases} = \begin{cases} 4 - x & \text{se } x \leq 4 \\ -4 + x & \text{se } x > 4 \end{cases}$$

Assim:

$$(f - g)(x) = \begin{cases} 3x - 1 - (4 - x) & \text{se } x < 2 \\ x^2 - 4 - (4 - x) & \text{se } 2 \leq x \leq 4 \\ x^2 - 4 - (-4 + x) & \text{se } x > 4 \end{cases} = \begin{cases} 4x - 5 & \text{se } x < 2 \\ x^2 + x - 8 & \text{se } 2 \leq x \leq 4 \\ x^2 - x & \text{se } x > 4 \end{cases}$$

b) Se $x \in]-\infty, 2[$:

$$(f - g)(x) < 1 \Leftrightarrow 4x - 5 < 1$$

$$\Leftrightarrow 4x < 6$$

$$\Leftrightarrow x < \frac{3}{2}$$

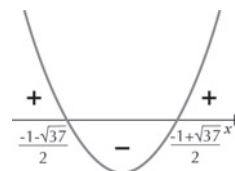
$$\text{Logo, } x \in]-\infty, \frac{3}{2}[.$$

$$\text{Se } x \in [2, 4], (f - g)(x) < 1 \Leftrightarrow x^2 + x - 8 < 1 \Leftrightarrow x^2 + x - 9 < 0$$

Cálculo auxiliar

$$x^2 + x - 9 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+36}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-1 + \sqrt{37}}{2} \vee x = \frac{-1 - \sqrt{37}}{2}$$



Logo, $x \in \left[2, \frac{-1 + \sqrt{37}}{2}\right]$.

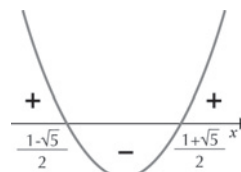
Se $x \in]4, +\infty[$, $(f - g)(x) < 1 \Leftrightarrow x^2 - x < 1$

$$\Leftrightarrow x^2 - x - 1 < 0$$

Cálculo auxiliar

$$x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \vee x = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$



Logo, neste intervalo não há valores de x para os quais $(f - g)(x) < 1$.

Assim, C.S. = $]-\infty, \frac{3}{2}[\cup \left[2, \frac{-1 + \sqrt{37}}{2}\right]$.

$$41. (x - 2)^2 + 1 = mx + 4 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 + 1 - mx - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + (-4 - m)x + 1 = 0$$

Para esta equação ter apenas uma solução,

$$(-4 - m)^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow 16 + 8m + m^2 - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow m^2 + 8m + 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow m = \frac{-8 \pm \sqrt{64 - 48}}{2}$$

$$\Leftrightarrow m = \frac{-8 \pm 4}{2}$$

$$\Leftrightarrow m = -6 \vee m = -2$$

Se $m = -6$, então:

$$x^2 + 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x + 1)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -1$$

A ordenada do ponto de interseção é $y = -6 \times (-1) + 4 = 10$.

Logo, se $m = -6$ tem-se o ponto de interseção de coordenadas $(-1, 10)$.

Se $m = -2$, então:

$$x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 1$$

A ordenada do ponto de interseção é $y = -2 \times 1 + 4 = 2$.

Logo, se $m = -2$ tem-se o ponto de interseção de coordenadas $(1, 2)$.

42. Seja g a função que associa a cada valor de x a área do triângulo $[ABC]$.

$$\begin{aligned}f(x) = 0 &\Leftrightarrow \sqrt{x-1} = 0 \\&\Rightarrow x-1 = 0 \\&\Leftrightarrow x = 1\end{aligned}$$

Verificação:

$\sqrt{1-1} = 0$, que é uma proposição verdadeira, logo 1 é zero de f .

Logo:

$\overline{BC} = 2 \times (x-1)$ e a altura do triângulo $[ABC]$ é $\sqrt{x-1}$.

Assim:

$$\begin{aligned}g(x) &= \frac{2 \times (x-1) \times \sqrt{x-1}}{2} \\&= (x-1)\sqrt{x-1} \\g(x) = 27 &\Leftrightarrow (x-1)\sqrt{x-1} = 3^3 \\&\Rightarrow (x-1)^2(x-1) = 3^6 \\&\Leftrightarrow (x-1)^3 = 9^3 \\&\Leftrightarrow x-1 = 9 \\&\Leftrightarrow x = 10\end{aligned}$$

Verificação:

$(10-1)\sqrt{10-1} = 27 \Leftrightarrow 9 \times 3 = 27$, que é uma proposição verdadeira, logo 10 é solução da equação.

Desafios

Página 151

1.

a) Consideremos $f(x) = x + 0,23x = 1,23x$ e $g(x) = x - 0,23x = 0,77x$.

Assim, $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(1,23x) = 0,77 \times 1,23x = 0,9471x$.

b) Não. Segundo a alínea anterior fica com um valor diferente e inferior ao inicial. O comprador ficou a ganhar, vai acabar por comprar o carro por um valor mais baixo.

c) Claramente que não. Se fossem inversas uma da outra, teríamos $(g \circ f)(x) = x$, o que não é verdade pela primeira alínea.

d) Se fizermos $f(x) = y$, obtemos $y = \frac{100}{123} \approx 0,813008x$.

Assim, $f^1(x) \approx 0,813008$.

e) O vendedor teria de aplicar uma função correspondente à inversa de f . Ou seja, segundo a alínea anterior, um desconto de aproximadamente 81,3008%.

2.

a) Consideremos $h(x) = x - 200$ e $p(x) = 0,9x$.

Temos $(h \circ p)(x) = h(0,9x) = 0,9x - 200$.

Por outro lado, $(p \circ h)(x) = p(x - 200) = 0,9(x - 200) = 0,9x - 180$.

b) De acordo com a alínea anterior, não é indiferente.

c) De acordo com a alínea a), o valor fica mais baixo quando se aplica primeiro o desconto dos 200 euros e só depois se retiram os 10%. O comprador fica a ganhar 20 euros.

3.

a) Consideramos $s(x) = 0,97x$ e $t(x) = 0,95x$.

Temos $(t \circ s)(x) = t(0,97x) = 0,95 \times 0,97x = 0,9215x$.

Por outro lado, $(s \circ t)(x) = s(0,95x) = 0,97 \times 0,95x = 0,9215x$.

b) Segundo a alínea anterior, é indiferente a ordem pela qual aplicamos os dois descontos.

4.

a) Temos:

$$\begin{aligned} w(x) &= t\left(s\left(p\left(h\left(g(f(x))\right)\right)\right)\right) = t(s(p(h(0,9471x)))) \\ &= t(s(0,9(0,9471x - 200))) \\ &= 0,82935(0,9471x - 200) \end{aligned}$$

b) Temos:

$$\begin{aligned} w(x) = y &\Leftrightarrow 0,9471x - 200 = \frac{y}{0,82935} \\ \Leftrightarrow x &= \frac{1}{0,9471} \left(\frac{y}{0,82935} + 200 \right) \\ \text{Assim, } w^{-1}(x) &= \frac{1}{0,9471} \left(\frac{x}{0,82935} + 200 \right). \end{aligned}$$

c) Esta é uma função que a cada valor depois dos descontos faz corresponder o valor antes dos descontos.

d) O valor marcado no carro é $w^{-1}(23394,5) = 29\,995$ euros.

Tema V – Estatística

Unidade 2 – Somatório

Páginas 155 e 156

1.

a) $u_n = 2n - 1, n \in \{1, 2, \dots, 5\}$

b) $\sum_{i=1}^5 (2n-1)$

2.

a) $a_1 + a_2 + \dots + a_{2017} = \sum_{i=1}^{2017} a_i$

b) $a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{10}x^{10} = \sum_{i=1}^{10} (a_i x^i)$

c) $3^2 + 3^3 + \dots + 3^8 = \sum_{i=2}^8 3^i$

3.

a) $\sum_{i=1}^6 2^{i-1} = 2^{1-1} + 2^{2-1} + 2^{3-1} + 2^{4-1} + 2^{5-1} + 2^{6-1} = 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5$
 $= 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32$
 $= 63$

b) $\sum_{i=4}^7 (1-i) = (1-4) + (1-5) + (1-6) + (1-7)$
 $= -3 - 4 - 5 - 6$
 $= -18$

c) $\sum_{i=1}^{10} 2 = 10 \times 2 = 20$

4.

a) $\sum_{i=4}^{50} x_i = \sum_{i=1}^{50} x_i - 2 - 4 - 7 = 200 - 13 = 187$

b) $\sum_{i=1}^{50} \sqrt{5}x_i = \sqrt{5} \sum_{i=1}^{50} x_i = 200\sqrt{5}$

c) $\sum_{i=3}^{50} \frac{x_i}{2} = \frac{1}{2} \sum_{i=3}^{50} x_i = \frac{1}{2} (200 - 2 - 4) = 97$

5.

a) Proposição verdadeira.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{100} 2i &= 2 \times 1 + 2 \times 2 + 2 \times 3 + \dots + 2 \times 100 \\ &= 2 \times (1 + 2 + 3 + \dots + 100) \\ &= 2 \sum_{i=1}^{100} i \end{aligned}$$

b) Proposição falsa.

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{100} (2+i) &= (2+1) + (2+2) + (2+3) + \cdots + (2+100) \\ &= 2 \times 100 + \sum_{i=1}^{100} i \\ &\neq 2 + \sum_{i=1}^{100} i\end{aligned}$$

c) Proposição verdadeira.

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{100} (2+i) &= (2+1) + (2+2) + (2+3) + \cdots + (2+100) \\ &= 2 \times 100 + \sum_{i=1}^{100} i \\ &= \sum_{i=1}^{100} 2 + \sum_{i=1}^{100} i\end{aligned}$$

Unidade 3 – Conceitos fundamentais

Páginas 157 a 162

6. A população é o conjunto de todos os associados da DECO.

A amostra é o conjunto dos 397 associados inquiridos.

A variável estatística é o grau de satisfação com os atuais prestadores de serviço televisivo.

7.

a) O tempo de exposição solar é uma variável quantitativa contínua.

b) O número de dias de férias é uma variável quantitativa discreta.

c) O número de gelados comprados numa semana é uma variável quantitativa discreta.

d) A temperatura registada às 16h é uma variável quantitativa contínua.

e) O número de pessoas na praia às 18h é uma variável quantitativa discreta.

8. O conjunto de valores da amostra $\tilde{x} = (1, 2, 3, 2, 3, 1, 0, 5, 1)$ é $\tilde{x} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

9. Por exemplo, $\tilde{x} = (10, 10, 10, 10, 11, 12)$ ou $\tilde{x} = (12, 10, 10, 11, 10, 12)$.

10. Seja $\tilde{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ uma variável aleatória de dimensão n com m valores distintos, onde $1 \leq m \leq n$.

Tem-se que $N_j = \#\{i \in \{1, \dots, n\}: x_i \leq \tilde{x}_j\}$.

Por outro lado, $n_j = \#\{i \in \{1, \dots, n\}: x_i = \tilde{x}_j\}$ e $\sum_{j=1}^m n_j = n$.

Para qualquer $j \in \{1, \dots, m\}$ tem-se então:

$$N_j = \#\{i \in \{1, \dots, n\}: x_i \leq \tilde{x}_j\} = n_1 + n_2 + \cdots + n_j \leq n_1 + n_2 + \cdots + n_j + \cdots + n_m = n$$

Logo, $N_j \leq n$, qualquer que seja $j \in \{1, \dots, m\}$.

11.

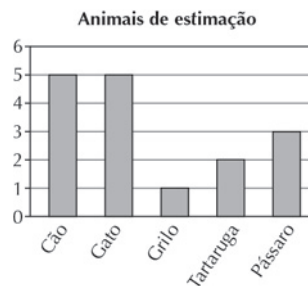
a)

| \tilde{x}_i | n_i | f_i |
|---------------|-------|----------------|
| 0 | 5 | $\frac{1}{4}$ |
| 1 | 3 | $\frac{3}{20}$ |
| 2 | 4 | $\frac{1}{5}$ |
| 3 | 3 | $\frac{3}{20}$ |
| 4 | 2 | $\frac{1}{10}$ |
| 5 | 3 | $\frac{3}{20}$ |

b) $N_3 = 5 + 3 + 4 + 3 = 15$

c) $F_2 = \frac{1}{4} + \frac{3}{20} + \frac{1}{5} = \frac{12}{20} = 0,6$

12.



Unidade 4 – Medidas de localização

Páginas 163 a 174

13.

a) A moda é 1.

b) Não existe moda.

c) Há dois valores para a moda: 1 e 3.

14. A classe modal é [110,130[.

$$15. \quad \bar{x} = \frac{\sum_{j=1}^m \tilde{x}_j n_j}{n} = \sum_{j=1}^m \left(\tilde{x}_j \times \frac{n_j}{n} \right) = \sum_{j=1}^m \tilde{x}_j f_j$$

$$16. \quad \bar{x} = \frac{0 \times 2 + 1 \times 8 + 2 \times 10 + 3 \times 5 + 4 \times 1}{2 + 8 + 10 + 5 + 1} = \frac{0 + 8 + 20 + 15 + 4}{26} = \frac{47}{26} \approx 1,8$$

17.

a)

| Notas obtidas no teste de Matemática | n_i |
|--------------------------------------|-------|
| [11, 14[| 3 |
| [14, 17[| 3 |
| [17, 20[| 9 |

$$\text{b) } \bar{x} = \frac{12 + 14 + 17 + 13 + 19 + 19 + 16 + 18 + 17 + 18 + 19 + 16 + 11 + 18 + 19}{15} = \frac{246}{15} = 16,4$$

$$\text{c) } \bar{x} \approx \frac{12,5 \times 3 + 15,5 \times 3 + 18,5 \times 9}{15} = \frac{250,5}{15} = 16,7$$

18.

a) Ordenando os dados: 10, 11, 13, 14, 14, 16, 17, 19, 20

$$Me = x_{\left(\frac{9+1}{2}\right)} = x_{(5)} = 14$$

b) Ordenando os dados: 10, 11, 13, 14, 14, 16, 17, 19, 200

$$Me = x_{\left(\frac{9+1}{2}\right)} = x_{(5)} = 14$$

c) Ordenando os dados: 10, 11, 13, 14, 15, 16, 17, 19, 20

$$Me = x_{\left(\frac{9+1}{2}\right)} = x_{(5)} = 15$$

d) Ordenando os dados: 10, 11, 13, 14, 14, 16, 16, 17, 19, 20

$$Me = \frac{x_{\left(\frac{10}{2}\right)} + x_{\left(\frac{10}{2} + 1\right)}}{2} = \frac{x_{(5)} + x_{(6)}}{2} = \frac{14 + 16}{2} = 15$$

19.

a) Ordenando os dados: 2,98; 3,09; 3,15; 3,44; 3,45; 3,68; 3,70; 3,78; 4,01; 4,10

$$n = 10$$

$$\frac{25 \times 10}{100} = 2,5 \text{ que não é um número inteiro. Então, } P_{25} = x_{([2,5] + 1)} = x_{(3)} = 3,15.$$

$$\frac{50 \times 10}{100} = 5 \text{ que é um número inteiro. Então, } P_{50} = \frac{x_{(5)} + x_{(6)}}{2} = \frac{3,45 + 3,68}{2} = 3,565.$$

$$\frac{75 \times 10}{100} = 7,5 \text{ que não é um número inteiro. Então, } P_{75} = x_{([7,5] + 1)} = x_{(8)} = 3,78.$$

$$P_{100} = x_{(10)} = 4,01$$

$$\text{b) } \frac{90 \times 10}{100} = 9 \text{ que é um número inteiro. Então, } P_{90} = \frac{x_{(9)} + x_{(10)}}{2} = \frac{4,01 + 4,10}{2} = 4,055.$$

Podemos afirmar que, pelo menos, 90% dos valores da amostra são inferiores ou iguais a 4,055.

20.

a)

| Número de peixes capturados | n_i |
|-----------------------------|-------|
| [0, 3[| 3 |
| [3, 6[| 3 |
| [6, 9[| 8 |
| [9, 12[| 2 |

$$\text{b) } \frac{75 \times 16}{100} = 12 \text{ que é um número inteiro. Então, } P_{75} = \frac{x_{(12)} + x_{(13)}}{2} = \frac{7 + 8}{2} = 7,5.$$

Logo, há quatro participantes que ganharam o prêmio, uma vez que capturaram mais de 7,5 peixes.

$$\text{c) } \frac{50 \times 16}{100} = 8 \text{ que é um número inteiro. Então, } Me = P_{50} = \frac{x_{(8)} + x_{(9)}}{2} = \frac{6 + 6}{2} = 6.$$

d) $3 + 3 < \frac{75 \times 16}{100} < 3 + 3 + 8$

Logo, $P_{75} \in [6, 9[$. Assim, P_{75} é a solução da equação:

$$3 \times 3 + 3 \times 3 + 8 \times (x - 6) = 12 \times 3 \Leftrightarrow 18 + 8x - 48 = 36 \Leftrightarrow 8x = 66 \Leftrightarrow x = 8,25$$

Logo, $P_{75} = 8,25$.

Este valor não coincide com o valor exato que é 7,5 e foi calculado na alínea b).

21.

a) $\bar{x} = \frac{67 + 69 + 76 + 94 + 56 + 58 + 69 + 78 + 69 + 95 + 48 + 44 + 85 + 69 + 67 + 72}{16} = 69,75 \text{ min}$

b) $\bar{x} = \frac{69,75}{60} = 1,1625 \text{ h}$

22.

a) Como $x_{(n)} = \max\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, tem-se que $\sum_{i=1}^n x_i \leq \sum_{i=1}^n x_{(n)} = nx_{(n)}$. Logo, $\sum_{i=1}^n x_i \leq nx_{(n)}$

b) $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \leq \frac{nx_{(n)}}{n} = x_{(n)}$

Logo, $\bar{x} \leq x_{(n)}$.

c) Uma vez que $x_{(n)} = \max\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, então todos os valores da amostra podem ser escritos na forma $x_i = x_{(n)} - k_i$, com $k_i \geq 0$. Assim:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_{(n)} - k_i)}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n x_{(n)} - \sum_{i=1}^n k_i}{n} = \frac{nx_{(n)} - \sum_{i=1}^n k_i}{n}$$

Por hipótese, existe algum valor da amostra inferior a $x_{(n)}$, logo existe algum $k_i > 0$. Então,

$$\bar{x} = x_{(n)} - \frac{\sum_{i=1}^n k_i}{n} < x_{(n)}.$$

23. $\bar{x} = \frac{8 \times 15 - 18 + 12}{8} = 14,25 \text{ anos}$

24. $\bar{x} = \frac{1 \times 12 + 3 \times 14 + 5 \times 24}{12 + 14 + 24} = 3,48$

Unidade 5 – Medidas de dispersão

Páginas 175 a 183

25. $\sum_{i=1}^n d_i = 0 \Leftrightarrow (10-12,4) + (13-12,4) + (11-12,4) + \sum_{i=4}^n d_i = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=4}^n d_i = 3,2$

26.

a) $\sum_{i=1}^5 d_i = 0 \Leftrightarrow 1 - 3 + 0 + 1 + d_5 = 0 \Leftrightarrow d_5 = 1$

$$\begin{aligned}
 \text{b)} \quad d_5 &= x_5 - \bar{x} \Leftrightarrow 1 = 11 - \bar{x} \Leftrightarrow \bar{x} = 10 \\
 d_4 &= x_4 - \bar{x} \Leftrightarrow 1 = x_4 - 10 \Leftrightarrow x_4 = 11 \\
 d_3 &= x_3 - \bar{x} \Leftrightarrow 0 = x_3 - 10 \Leftrightarrow x_3 = 10 \\
 d_2 &= x_2 - \bar{x} \Leftrightarrow -3 = x_2 - 10 \Leftrightarrow x_2 = 7 \\
 d_1 &= x_1 - \bar{x} \Leftrightarrow 1 = x_1 - 10 \Leftrightarrow x_1 = 11
 \end{aligned}$$

27. Uma vez que $y_{\sim} = x_{\sim} + h$, tem-se que $\bar{y} = \bar{x} + h$.

$$\begin{aligned}
 SS_y &= \sum_{i=1}^n y_i^2 - n\bar{y}^2 = \sum_{i=1}^n (x_i + h)^2 - n(\bar{x} + h)^2 \\
 &= \sum_{i=1}^n (x_i^2 + 2x_i h + h^2) - n(\bar{x}^2 + 2h\bar{x} + h^2) \\
 &= \sum_{i=1}^n x_i^2 + 2h \sum_{i=1}^n x_i + \sum_{i=1}^n h^2 - n\bar{x}^2 - 2nh\bar{x} - nh^2 \\
 &= \sum_{i=1}^n x_i^2 + 2nh \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} + nh^2 - n\bar{x}^2 - 2nh\bar{x} - nh^2 \\
 &= \sum_{i=1}^n x_i^2 + 2nh\bar{x} - n\bar{x}^2 - 2nh\bar{x} \\
 &= \sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2 = SS_x
 \end{aligned}$$

28.

a) $y_i = 3x_i + 1$

b) $SS_y = 3^2 SS_x = 9 \times 26 = 234$

29.

a) $\bar{x} = \frac{12 + 14 + 16 + 10 + 16 + 15 + 13 + 10 + 9 + 15}{10} = \frac{130}{10} = 13$

$$\bar{y} = \frac{10 + 15 + 10 + 19 + 13}{5} = \frac{67}{5} = 13,4$$

b) $s_x = \sqrt{\frac{SS_x}{10-1}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{10} x_i^2 - 10 \times 13^2}{9}} = \sqrt{\frac{1752 - 1690}{9}} \approx 2,62 \text{ (2 c.d.)}$

$$s_y = \sqrt{\frac{SS_y}{5-1}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^5 y_i^2 - 5 \times 13,4^2}{4}} = \sqrt{\frac{955 - 897,8}{4}} \approx 3,78 \text{ (2 c.d.)}$$

Os valores da amostra y_{\sim} encontram-se mais dispersos em relação à média da amostra do que os valores da amostra x_{\sim} .

30. Propriedade: Seja $x_{\sim} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ uma amostra de dimensão n , com $n > 1$, de uma variável estatística x quantitativa. Tem-se que $s_x = 0$ se e só se $x_1 = x_2 = \dots = x_n$.

Demonstração:

$s_x = 0 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{SS_x}{n-1}} = 0 \Leftrightarrow SS_x = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2 = \dots = x_n$, como vimos na propriedade demonstrada na página 177 do manual.

Propriedade: Seja $\tilde{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ uma amostra de dimensão n , com $n > 1$ de uma variável estatística x quantitativa e seja h um número real.

O desvio-padrão s_y , correspondente à amostra $\tilde{y} = \tilde{x} + h$, pode ser obtido a partir do desvio-padrão s_x através da igualdade $s_y = s_x$.

Demonstração:

Já vimos que $SS_y = SS_x$ (página 178, exercício 27).

$$\text{Então, } s_y = \sqrt{\frac{SS_y}{n-1}} = \sqrt{\frac{SS_x}{n-1}} = s_x.$$

Propriedade: Seja $\tilde{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ uma amostra de dimensão n , com $n > 1$ de uma variável estatística x quantitativa e seja α um número real.

O desvio-padrão s_y , correspondente à amostra $\tilde{y} = \alpha \tilde{x}$, pode ser obtido a partir do desvio-padrão s_x através da igualdade $s_y = |\alpha|s_x$.

Demonstração:

Já vimos que $SS_y = \alpha^2 SS_x$ (propriedade demonstrada na página 178).

Então:

$$s_y = \sqrt{\frac{SS_y}{n-1}} = \sqrt{\frac{\alpha^2 SS_x}{n-1}} = |\alpha| \sqrt{\frac{SS_x}{n-1}} = |\alpha|s_x$$

31.

a) $74 = \bar{x} + 2s_x$.

Então, a proporção de elementos da amostra superiores a 74 é inferior a $\frac{1}{2^2} = 25\%$.

b) $[26, 74] = [\bar{x} - 2s_x, \bar{x} + 2s_x]$.

A proporção de valores da amostra que pertencem a este intervalo é, no máximo, $1 - \frac{1}{2^2} = 75\%$.

Assim, o número de elementos da amostra neste intervalo é, no máximo, $60 \times 75\% = 45$ elementos.

Aprende Fazendo

Páginas 188 a 196

1. $\bar{x} = \frac{0 \times 4 + 1 \times 6 + 2 \times 3 + 3 \times 2}{4 + 6 + 3 + 2} = \frac{18}{15} = 1,2$

(Opção C)

2. Ordenando os dados: 1, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5

$$n = 14$$

$$Me = \frac{x_{(7)} + x_{(8)}}{2} = \frac{3 + 3}{2} = 3$$

(Opção D)

$$3. \quad \bar{x} = 7 \Leftrightarrow \frac{3 + 4 + 1 + 0 + 1 + 5 + 6 + 3 + 7 + 2 + k}{11} = 7$$

$$\Leftrightarrow 32 + k = 77$$

$$\Leftrightarrow k = 45$$

(Opção C)

$$4. \quad 1040 + 1040 \times 2,5\% = 1066$$

(Opção D)

$$5. \quad \sum_{i=1}^3 d_i = 0 \Leftrightarrow (11 - 10,2) + (-1) + d_3 = 0$$

$$\Leftrightarrow d_3 = 0,2$$

(Opção A)

$$6. \quad 6 + 5 + 2 + 4 + 1 = 18$$

$$\frac{40 \times 18}{100} = 7,2$$

$$6 < \frac{40 \times 18}{100} < 6 + 5$$

Logo, $P_{40} \in [750, 1000[$. Assim, P_{40} é a solução da equação:

$$6 \times 250 + 5 \times (x - 750) = 7,2 \times 250 \Leftrightarrow 1500 + 5x - 3750 = 1800 \Leftrightarrow 5x = 4050 \Leftrightarrow x = 810$$

Logo, $P_{40} = 810$.

(Opção D)

7. A afirmação I é verdadeira, já que o total das idades passa a ser menor e, portanto, a média diminui. A afirmação II pode ser falsa, uma vez que nada se sabe quanto à dispersão dos dados. A afirmação III pode ser falsa, uma vez que não se sabe a média inicial das idades.

(Opção B)

$$8. \quad \bar{y} = 4 \times \bar{x} - 3 = 4 \times 5 - 3 = 17$$

$$s_y = 4s_x = 4 \times 2 = 8$$

(Opção B)

9. A afirmação I é verdadeira, uma vez que os valores da amostra não são todos iguais, logo o valor da média não é o maior deles. A afirmação II é verdadeira, uma vez que, como os valores da amostra não são todos iguais, o desvio-padrão não pode ser zero.

A afirmação III pode ser falsa, se os valores centrais da distribuição forem diferentes de 10.

(Opção C)

10. O desvio-padrão de qualquer distribuição é sempre não negativo, pelo que se elimina a opção A. Como os valores da amostra não são todos iguais, então o desvio-padrão não é zero, pelo que se elimina a opção C. Também decorre de os valores da amostra não serem todos iguais que a média não é igual ao maior deles, pelo que se elimina a opção D.

(Opção B)

$$11. d_1 + d_2 + d_3 + d_4 = 0 \Leftrightarrow -1,4 + 1,5 + 0,5 + d_4 = 0 \Leftrightarrow d_4 = -0,6$$

$$SS_x = (-1,4)^2 + 1,5^2 + 0,5^2 + (-0,6)^2 = 4,82$$

$$s_x = \sqrt{\frac{4,82}{4-1}} \approx 1,3$$

(Opção A)

$$12. 4 = \bar{x} + 3s_x$$

Então, a proporção de elementos da amostra inferiores a 4 é inferior a $\frac{1}{3^2} \approx 11\%$, ou seja, o número de elementos da amostra inferiores a 4 é, no máximo, 4. Logo, a afirmação C é necessariamente verdadeira.

(Opção C)

13.

$$a) \bar{x} = \frac{21 + 23 + 26 + 19 + 19}{5} = 21,6 \text{ anos}$$

$$\bar{y} = 21,6 + 13 = 34,6 \text{ anos}$$

$$b) SS_x = \sum_{i=1}^5 x_i^2 - 5 \times \bar{x}^2 = 21^2 + 23^2 + 26^2 + 19^2 + 19^2 - 5 \times 21,6^2 = 35,2$$

$$SS_y = SS_x = 35,2 \text{ anos}^2$$

$$14. \bar{x} = \frac{17 \times 3 + 18 \times 22 + 19 \times 44 + 20 \times 42 + 21 \times 22 + 22 \times 10 + 23 \times 6 + 24 \times 1}{3 + 22 + 44 + 42 + 22 + 10 + 6 + 1} = \frac{2967}{150} = 19,78$$

$$SS_x = \sum_{j=1}^8 \left(\tilde{x}_j - \bar{x} \right)^2 n_j$$

$$= (17 - 19,78)^2 \times 3 + (18 - 19,78)^2 \times 22 + (19 - 19,78)^2 \times 44 + (20 - 19,78)^2 \times 42 \\ + (21 - 19,78)^2 \times 22 + (22 - 19,78)^2 \times 10 + (23 - 19,78)^2 \times 6 + (24 - 19,78)^2 \times 1 \\ = 283,74$$

$$s_x^2 = \frac{SS_x}{150 - 1} = \frac{283,74}{149} \approx 1,90$$

$$s_x = \sqrt{s_x^2} = \sqrt{\frac{283,74}{149}} \approx 1,38$$

15.

$$a) \bar{x} = \frac{7 + 12 + 24 + 36 + 14 + 5 + 41 + 17 + 19 + 24 + 31 + 12 + 6 + 19 + 42 + 46 + 51 + 17 + 4 + 19 + 12 + 25 + 32 + 16}{24} \\ = 22,125$$

Ordenando os dados da amostra:

(4, 5, 6, 7, 12, 12, 12, 14, 16, 17, 17, 19, 19, 19, 24, 24, 25, 31, 32, 36, 41, 42, 46, 51)

Como a dimensão da amostra é 24, que é um número par, o valor da mediana é dado por:

$$Me = \frac{x_{\left(\frac{24}{2}\right)} + x_{\left(\frac{24}{2}+1\right)}}{2} = \frac{x_{12} + x_{13}}{2} = \frac{19+19}{2} = \frac{38}{2} = 19$$

b) $\frac{75 \times 24}{100} = 18$ que é um número inteiro.

Então, $P_{75} = \frac{x_{(18)} + x_{(19)}}{2} = \frac{31 + 32}{2} = 31,5$.

c)

| Número de doentes por hora | n_i |
|----------------------------|-------|
| [0, 10[| 4 |
| [10, 20[| 10 |
| [20, 30[| 3 |
| [30, 40[| 3 |
| [40, 50[| 3 |
| [50, 60[| 1 |

i. $\bar{x} = \frac{5 \times 4 + 15 \times 10 + 25 \times 3 + 35 \times 3 + 45 \times 3 + 55 \times 1}{24} = 22,5$

$\frac{50 \times 24}{100} = 12$, que é um número inteiro.

Então, $Me = P_{50} = \frac{x_{(12)} + x_{(13)}}{2} = \frac{19 + 19}{2} = 19$.

ii. $4 + 10 + 3 < \frac{75 \times 24}{100} < 4 + 10 + 3 + 3$

Logo, $P_{75} \in [30, 40[$.

Assim, P_{75} é a solução da equação:

$$4 \times 10 + 10 \times 10 + 3 \times 10 + 3 \times (x - 30) = 18 \times 10 \Leftrightarrow 170 + 3x - 90 = 180 \Leftrightarrow 3x = 100$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{100}{3}$$

Logo, $P_{75} = \frac{100}{3}$.

d) Os valores mais corretos são os que se obtiveram na alínea a), pois foram calculados usando os dados da amostra.

16.

a) $\bar{x} = \frac{5 \times 7 + 15 \times 5 + 25 \times 10 + 35 \times 1 + 45 \times 3 + 55 \times 2 + 65 \times 2}{7+5+10+1+3+2+2} = \frac{770}{30} \approx 25,7$

b) $7 < \frac{25 \times 30}{100} < 7 + 5$

Logo, $P_{25} \in [10, 20[$.

Assim, P_{25} é a solução da equação:

$$7 \times 10 + 5 \times (x - 10) = 7,5 \times 10 \Leftrightarrow 70 + 5x - 50 = 75 \Leftrightarrow 5x = 55$$

$$\Leftrightarrow x = 11$$

Logo, $P_{25} = 11$.

$$7 + 5 + 10 + 1 + 3 < \frac{90 \times 30}{100} < 7 + 5 + 10 + 1 + 3 + 2$$

Logo, $P_{90} \in [50, 60[$.

Assim, P_{90} é a solução da equação:

$$7 \times 10 + 5 \times 10 + 10 \times 10 + 1 \times 10 + 3 \times 10 + 2 \times (x - 50) = 27 \times 10 \Leftrightarrow 260 + 2x - 100 = 270$$

$$\Leftrightarrow 2x = 110$$

$$\Leftrightarrow x = 55$$

Logo, $P_{90} = 55$.

$$7 + 5 + 10 + 1 + 3 + 2 < \frac{95 \times 30}{100} < 7 + 5 + 10 + 1 + 3 + 2 + 2$$

Logo, $P_{95} \in [60, 70[$.

Assim, P_{95} é a solução da equação:

$$7 \times 10 + 5 \times 10 + 10 \times 10 + 1 \times 10 + 3 \times 10 + 2 \times 10 + 2 \times (x - 60) = 28,5 \times 10$$

$$\Leftrightarrow 280 + 2x - 120 = 285$$

$$\Leftrightarrow 2x = 125$$

$$\Leftrightarrow x = 62,5$$

Logo, $P_{95} = 62,5$.

17.

a) $x_n = 3n + 4, n \in \{1, 2, \dots, 5\}$

b) $\sum_{i=1}^5 (3i + 4)$

18.

a)

| x_i | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|-------|---------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|
| n_i | $0,2 \times 25 = 5$ | $0,28 \times 25 = 7$ | $0,28 \times 25 = 7$ | $0,04 \times 25 = 1$ | $0,16 \times 25 = 4$ | $0,04 \times 25 = 1$ |

b) $\bar{x} = \frac{0 \times 5 + 1 \times 7 + 2 \times 7 + 3 \times 1 + 4 \times 4 + 5 \times 1}{25} = \frac{45}{25} = 1,8$

c) $\frac{75 \times 25}{100} = 18,75$ que não é um número inteiro.

Então, $P_{75} = x_{(19)} = 2$.

Logo, há 6 (= 1 + 4 + 1) colegas do Pedro com mais tios que o percentil 75 da amostra.

19.

a) $\bar{y} = 7\bar{x} - 3 = 7 \times 20 - 3 = 137$

$$s_y = 7s_x = 7 \times 2,5 = 17,5$$

b) $s_x = 2,5 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{SS_x}{30 - 1}} = 2,5 \Leftrightarrow \frac{SS_x}{29} = 6,25 \Leftrightarrow SS_x = 181,25$

$$SS_y = 7^2 \times SS_x = 49 \times 181,25 = 8881,25$$

$$s_y^2 = \frac{SS_y}{30 - 1} = \frac{8881,25}{29} = 306,25$$

20.

a) $\bar{x} = \frac{10,9 + 11,1 + 9,9 + 10,3 + 10,6 + 11,3 + 10,8}{7} = 10,7$ segundos

- b) $\frac{25 \times 7}{100}$ que não é um número inteiro. Então, $P_{25} = x_{(2)} = 10,3$. Podemos então concluir que pelo menos 25% dos valores da amostra são inferiores ou iguais a 10,3 segundos.

$$21. \sum_{i=0}^n i^5 = 0^5 + \sum_{i=1}^n i^5 = \sum_{i=1}^n i^5$$

$$22. \bar{x} = \frac{20 \times 10 + 38 \times 12 + 22 \times 14}{20 + 38 + 22} = \frac{964}{80} = 12,05$$

23.

$$a) \bar{x} = \frac{0,5 + 0,6 + 0,6 + 0,7 + \dots + 4,1 + 4,1 + 4,2}{40} = 2,345 \text{ mm}$$

b)

| Diâmetro (em mm) | n_i |
|------------------|-------|
| [0,5; 1[| 7 |
| [1; 1,5[| 6 |
| [1,5; 2[| 4 |
| [2; 2,5[| 5 |
| [2,5; 3[| 3 |
| [3; 3,5[| 3 |
| [3,5; 4[| 7 |
| [4; 4,5[| 5 |

$$\bar{x} = \frac{0,75 \times 7 + 1,25 \times 6 + 1,75 \times 4 + 2,25 \times 5 + 2,75 \times 3 + 3,25 \times 3 + 3,75 \times 7 + 4,25 \times 5}{40} = 2,4125 \text{ mm}$$

- c) 75% dos valores da amostra são inferiores ao percentil de ordem 75.

24.

$$a) \bar{x} = \frac{35 + 0 + 10 + 77 + 65 + 1 + 26 + 78 + 2 + 1 + 2 + 76 + 11 + 3 + 2 + 62 + 1 + 118 + 16 + 30 + 12 + 83 + 39 + 71}{24} \approx 34,2$$

$$s_x = \sqrt{\frac{SS_x}{24 - 1}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{24} x_i^2 - 24 \times 34,2^2}{23}} = \sqrt{\frac{56679 - 28071,36}{23}} \approx 35,3$$

$$b) \bar{x} \approx \frac{34,2 \times 24 + 14 \times 5}{24} \approx 37,1$$

25.

a) Ordenando os dados da amostra:

(5, 6, 7, 7, 8, 9, 11, 12, 12, 13, 15, 16, 17, 18, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 29, 32, 35, 36, 37, 41, 44, 45, 49, 62, 65)

Assim:

$$\frac{25 \times 32}{100} = 8 \text{ que é um número inteiro. Então, } P_{25} = \frac{x_{(8)} + x_{(9)}}{2} = \frac{12 + 12}{2} = 12.$$

$$\frac{50 \times 32}{100} = 16 \text{ que é um número inteiro. Então, } P_{50} = \frac{x_{(16)} + x_{(17)}}{2} = \frac{19 + 20}{2} = 19,5.$$

$$\frac{75 \times 32}{100} = 24 \text{ que é um número inteiro. Então, } P_{75} = \frac{x_{(24)} + x_{(25)}}{2} = \frac{36 + 37}{2} = 36,5.$$

b) $\frac{70 \times 32}{100} = 22,4$ que não é um número inteiro.

Então, $P_{70} = x_{(23)} = 35$.

Logo, o percurso com menor duração, entre os 30% dos percursos com maior duração, tem 36 minutos.

26.

a) $\frac{10 \times 18}{100} = 1,8$ que não é um número inteiro. Então, $P_{10} = x_{(2)} = 8,1$ °C.

$\frac{15 \times 18}{100} = 2,7$ que não é um número inteiro. Então, $P_{15} = x_{(3)} = 8,5$ °C.

$\frac{50 \times 18}{100} = 9$ que é um número inteiro. Então, $P_{50} = \frac{x_{(9)} + x_{10}}{2} = \frac{10,9 + 11}{2} = 10,95$ °C.

$\frac{75 \times 18}{100} = 13,5$ que não é um número inteiro. Então, $P_{75} = x_{(14)} = 12,6$ °C.

$\frac{85 \times 18}{100} = 15,3$ que não é um número inteiro. Então, $P_{85} = x_{(16)} = 13,4$ °C.

b) $x_{(11)} = 11,6$

Sendo k a ordem do percentil que se procura, pretende-se que $\frac{18k}{100}$ seja não inteiro e que

$\left\lceil \frac{18k}{100} \right\rceil + 1 = 11$. Então tem-se que $10 < \frac{18k}{100} < 11$, logo $55,6 < k < 61,1$. Logo, 11,6 corresponde

aos percentis de ordens 56, 57, 58, 59, 60 e 61.

c) 15 distritos apresentaram temperaturas mínimas superiores ao percentil de ordem 15.

d) Todos os percentis referentes às temperaturas mínimas do mês de agosto de 2014 são mais baixos do que os percentis de igual ordem referentes às temperaturas mínimas do mês de julho de 2013, o que significa que foram, em geral, mais baixas em agosto de 2014 do que em julho de 2013.

27.

a) $\bar{x} = \frac{7 + 9 + 6 + 5 + 10 + 5 + 7}{7} = \frac{49}{7} = 7$

b) O lucro médio diário é $5 \times 7 = 35$ euros.

c) O lucro médio diário na semana seguinte é $(7 + 2) \times 5 = 45$ euros.

28.

a) $d_1 = x_1 - \bar{x} \Leftrightarrow -1 = 4 - \bar{x} \Leftrightarrow \bar{x} = 5$

b) $\tilde{x} = (4, 4, 4, 4, x_{(5)})$

Então:

$\bar{x} = 5 \Leftrightarrow \frac{4 + 4 + 4 + 4 + x_{(5)}}{5} = 5 \Leftrightarrow 16 + x_{(5)} = 25 \Leftrightarrow x_{(5)} = 9$

Logo, $\tilde{x} = \{4, 9\}$.

c) $s_x = \sqrt{\frac{SS_x}{5-1}} = \sqrt{\frac{(4-5)^2 \times 4 + (9-5)^2 \times 1}{4}} = \sqrt{\frac{20}{4}} = \sqrt{5}$

29.

a) $\tilde{y} = 4\tilde{x} - 3$

b) $\bar{x} = \frac{2+8+3+2+1+3+0}{7} = \frac{19}{7} \approx 2,71$

$$s_x = \sqrt{\frac{2^2 + 8^2 + 3^2 + 2^2 + 1^2 + 3^2 + 0^2 - 7 \times \left(\frac{19}{7}\right)^2}{7-1}} \approx 2,56$$

c) $\bar{y} = 4\bar{x} - 3 \approx 4 \times 2,71 - 3 = 7,84$

$$s_y \approx 4 \times 2,56 = 10,24$$

d) $SS_y = 4^2 SS_x \Leftrightarrow SS_x = \frac{1}{16} SS_y$

30. $x_{(15)} = 6$ vai ser substituído por $x_{(15)} + h = 6 + h$. Seja \tilde{y} a nova amostra. Então:

$$\bar{y} > x_{(14)} \Leftrightarrow \frac{4+3+3+2+1+3+0+0+6+h+2+4+3+5+0+1}{15} > 5$$

$$\Leftrightarrow \frac{37+h}{15} > 5$$

$$\Leftrightarrow 37+h > 75 \Leftrightarrow h > 38$$

31.

a) $d_1 + d_2 + d_3 + d_4 = 0 \Leftrightarrow 4 - 5 + 0,5 + d_4 = 0 \Leftrightarrow d_4 = 0,5$

$$\text{Logo, } s_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^4 d_i^2}{4-1}} = \sqrt{\frac{4^2 + (-5)^2 + (0,5)^2 + (0,5)^2}{4}} = \sqrt{\frac{41,5}{3}} \approx 3,7.$$

b) $d_4 = 0,5 \Leftrightarrow x_4 - \bar{x} = 0,5 \Leftrightarrow 0 - \bar{x} = 0,5 \Leftrightarrow \bar{x} = -0,5$

32.

a) $\bar{x} = \frac{6+5+7+5,1+5,2+6,4+6,7+6,8+5,9+5,8+6,7+7,1}{12} = \frac{73,7}{12} \approx 6,14 \text{ l}$

b) $x_{(8)} = x_{(9)} = 6,7$

Sendo k a ordem do percentil que se procura, pretende-se que $\frac{12k}{100}$ seja não inteiro e que

$$\left\lceil \frac{12k}{100} \right\rceil + 1 = 8 \text{ ou } \left\lceil \frac{12k}{100} \right\rceil + 1 = 9. \text{ Então tem-se que } 7 < \frac{12k}{100} < 9, \text{ logo } 58,3 < k < 75.$$

Logo, 5,7 corresponde aos percentis de ordens k , com $k \in \{59, 60, \dots, 74\}$.

33.

a) $\bar{x} = 20 \times 1,35 = 27 \text{ euros}$

b) $23 \times 27 = 621 \text{ euros}$

c) $s_x^2 = (1,35 \times 15)^2 = 410,0625 \text{ euros}^2$

$$34. 0 = 10 - \frac{10}{3} \times 3 = \bar{x} - \frac{10}{3} s_x$$

Então, a percentagem de valores da amostra que são inferiores a 0 é, no máximo, $\frac{1}{\left(\frac{10}{3}\right)^2} = 9\%$.

$$35. \bar{x} = 3,5 \Leftrightarrow \frac{2 \times 1 + 5 \times 2 + 6 \times 3 + k \times 4}{2 + 5 + 6 + k} = 3,5 \Leftrightarrow 30 + 4k = 3,5(13 + k) \Leftrightarrow 4k - 3,5k = 45,5 - 30$$

$$\Leftrightarrow 0,5k = 15,5$$

$$\Leftrightarrow k = 31$$

36.

$$a) \bar{x} \geq 13,5 \Leftrightarrow \frac{36 \times 13 - 12 + x}{36} \geq 13,5 \Leftrightarrow 456 + x \geq 486 \Leftrightarrow x \geq 30$$

Logo, não é possível obter média igual ou superior a 13,5 melhorando apenas a nota de direito.

b) Seja k o total das classificações do António, de forma a que a sua média seja 13,5.

$$\frac{k}{36} = 13,5 \Leftrightarrow k = 486$$

Com média 12 as suas classificações somam 468. Logo, $486 - 468 = 18$.

Para obter média igual a 13,5, o António terá de melhorar 18 valores.

37.

$$a) \bar{x} = \frac{2 + 5 + 7 + 5 + 3 + 0 + 9 + 12 + 17 + 6}{10} = \frac{66}{10} = 6,6$$

$$\bar{y} = \frac{0 + 6 + 9 + 3 + 6 + 4 + 7 + 3 + 7}{9} = \frac{45}{9} = 5$$

$$\bar{z} = \frac{10\bar{x} + 9\bar{y}}{19} = \frac{10 \times 6,6 + 9 \times 5}{19} = \frac{111}{19}$$

$$b) SS_x = \sum_{i=1}^{10} x_i^2 - 10\bar{x}^2 = 662 - 10 \times 43,52 = 226,4$$

$10 - 1 = 9$ graus de liberdade

$$SS_y = \sum_{i=1}^9 y_i^2 - 9\bar{y}^2 = 285 - 9 \times 25 = 60$$

$9 - 1 = 8$ graus de liberdade

$$SS_z = \sum_{i=1}^{19} z_i^2 - 19\bar{z}^2 = 947 - 19 \times \left(\frac{111}{19}\right)^2 \approx 298,53$$

$19 - 1 = 18$ graus de liberdade

$$\begin{aligned} c) SS_z &= \sum_{i=1}^{19} (z_i - \bar{z})^2 \\ &= \sum_{i=1}^{10} (x_i - \bar{z})^2 + \sum_{i=1}^9 (y_i - \bar{z})^2 \\ &= \sum_{i=1}^{10} (x_i^2 - 2x_i\bar{z} + \bar{z}^2) + \sum_{i=1}^9 (y_i^2 - 2y_i\bar{z} + \bar{z}^2) \\ &= \sum_{i=1}^{10} x_i^2 - 2\bar{z} \sum_{i=1}^{10} x_i + \sum_{i=1}^{10} \bar{z}^2 + \sum_{i=1}^9 y_i^2 - 2\bar{z} \sum_{i=1}^9 y_i + \sum_{i=1}^9 \bar{z}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^{10} x_i^2 - 10\bar{x}^2 + 10\bar{x}^2 - 2\bar{z} \times 10 \frac{\sum_{i=1}^{10} x_i}{10} + \sum_{i=1}^{10} \bar{z}^2 + \sum_{i=1}^9 y_i^2 - 9\bar{y}^2 + 9\bar{y}^2 \\
&\quad - 2\bar{z} \times 9 \frac{\sum_{i=1}^9 y_i}{9} + \sum_{i=1}^9 \bar{z}^2 \\
&= SS_x + 10\bar{x}^2 - 2\bar{z} \times 10\bar{x} + 10\bar{z}^2 + SS_y + 9\bar{y}^2 - 2\bar{z} \times 9\bar{y} + 9\bar{z}^2 \\
&= SS_x + SS_y + 10(\bar{x}^2 - 2\bar{x}\bar{z} + \bar{z}^2) + 9(\bar{y}^2 - 2\bar{y}\bar{z} + \bar{z}^2) \\
&= SS_x + SS_y + 10(\bar{x} - \bar{z})^2 + 9(\bar{y} - \bar{z})^2
\end{aligned}$$

d) Joaquim: $s_x = \sqrt{\frac{SS_x}{9}} = \mathbf{v} \approx 5,02$ (2 c.d.)

Afonso: $s_y = \sqrt{\frac{SS_y}{8}} = \sqrt{\frac{60}{8}} \approx 2,74$ (2 c.d.)

Logo, o Joaquim teve mais variabilidade no número de rifas vendidas.

38.

a) $\sum_{i=1}^{200} y_i = \sum_{i=1}^{200} 3(x_i - 5) = 3 \sum_{i=1}^{200} (x_i - 5) = 3 \sum_{i=1}^{200} x_i - 3 \sum_{i=1}^{200} 5 = 3 \times 30 - 3 \times 5 \times 200 = -2910$

b) $\sum_{i=1}^{200} (x_i + y_i) = \sum_{i=1}^{200} x_i + \sum_{i=1}^{200} y_i = 30 - 2910 = -2880$

Por outro lado:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{200} (x_i + y_i) &= \sum_{i=1}^4 (x_i + y_i) + \sum_{i=5}^{200} (x_i + y_i) \\
&= \sum_{i=1}^4 (x_i + 3(x_i - 5)) + \sum_{i=5}^{200} (x_i + y_i) \\
&= \sum_{i=1}^4 (4x_i - 15) + \sum_{i=5}^{200} (x_i + y_i) \\
&= 4 \sum_{i=1}^4 x_i - \sum_{i=1}^4 15 + \sum_{i=5}^{200} (x_i + y_i) \\
&= 4 \times 10 - 4 \times 15 + \sum_{i=5}^{200} (x_i + y_i) \\
&= -20 + \sum_{i=5}^{200} (x_i + y_i)
\end{aligned}$$

Logo:

$$-20 + \sum_{i=5}^{200} (x_i + y_i) = -2880 \Leftrightarrow \sum_{i=5}^{200} (x_i + y_i) = -2860$$

39. $x_{(n)}$ vai ser substituído por $x_{(n)} + h$. Seja \tilde{y} a nova amostra.

Então:

$$\begin{aligned}\bar{y} > x_{(n-1)} &\Leftrightarrow \frac{\sum_{i=1}^n x_{(n)} + h}{n} > x_{(n-1)} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n x_{(n)} + h > nx_{(n-1)} \\ &\Leftrightarrow h > nx_{(n-1)} - \sum_{i=1}^n x_{(n)} \\ &\Leftrightarrow h > nx_{(n-1)} - n \frac{\sum_{i=1}^n x_{(n)}}{n} \\ &\Leftrightarrow h > nx_{(n-1)} - n\bar{x} \\ &\Leftrightarrow h > n(x_{(n-1)} - \bar{x})\end{aligned}$$

A média não traduz bem a localização central da nova amostra, pois é superior a $n - 1$ elementos da amostra.

40.

a) A amostra A tem dimensão n , sendo $n > 1$. Desses n valores da variável, há r valores fora do intervalo $[\bar{x} - 2s, \bar{x} + 2s]$. Ou seja, para $i \in \{1, \dots, r\}$, $x_i \notin [\bar{x} - 2s, \bar{x} + 2s]$.

Logo:

$$\begin{aligned}x_i < \bar{x} - 2s \vee x_i > \bar{x} + 2s &\Leftrightarrow x_i - \bar{x} < -2s \vee x_i - \bar{x} > 2s \\ &\Leftrightarrow |x_i - \bar{x}| > 2s\end{aligned}$$

Uma vez que $|x_i - \bar{x}| \geq 0$, daqui vem que:

$$(x_i - \bar{x})^2 > (2s)^2 \Leftrightarrow (x_i - \bar{x})^2 > 4s^2$$

b) Da alínea anterior vem que, para $i \in \{1, \dots, r\}$, $(x_i - \bar{x})^2 > 4s^2$.

$$\text{Então, } \sum_{i=1}^r (x_i - \bar{x})^2 > \sum_{i=1}^r 4s^2 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^r (x_i - \bar{x})^2 > 4rs^2.$$

$$\text{c) } \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^r (x_i - \bar{x})^2 + \sum_{i=r+1}^n (x_i - \bar{x})^2 > \sum_{i=1}^r (x_i - \bar{x})^2 > 4rs^2$$

$$\text{Tem-se então que } \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 > 4rs^2.$$

$$\text{d) } s_x^2 = \frac{SS_x}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1} > \frac{4rs^2}{n-1}$$

Logo:

$$s_x^2 > \frac{4rs^2}{n-1} \Leftrightarrow (n-1)s_x^2 > 4rs^2$$

Assim:

$$\begin{aligned}(n-1)s_x^2 > 4rs^2 &\Leftrightarrow ns_x^2 - s_x^2 > 4rs^2 \\ &\Rightarrow ns_x^2 > 4rs^2, \text{ ou seja, } ns^2 > 4rs^2\end{aligned}$$

Daqui resulta que:

$$n > 4r \Leftrightarrow 4r < n \Leftrightarrow r < \frac{1}{4}n \Leftrightarrow r < 0,25n$$

e) Da alínea a), conclui-se que $(x_i - \bar{x})^2 > k^2 s^2$.

Pelo que, da alínea b), $\sum_{i=1}^r (x_i - \bar{x})^2 > k^2 r s^2$ e, da alínea c), $\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 > k^2 r s^2$.

Então, pela alínea d), $(n-1)s^2 > 4rs^2$ e $ns^2 > k^2 rs^2$, logo:

$$n > k^2 r \Leftrightarrow k^2 r < n \Leftrightarrow r < \frac{1}{k^2} n$$

Desafios

Página 197

1.

a) Temos a seguinte amostra de sinuosidades:

$$x = (340/165, 108/108, 135/89, 897/491, 147/90, 258/115, 1038/696, 180/91, 145/66, 829/363)$$

Para esta amostra a média $\bar{x} \approx 1,8231$.

b) Para esta amostra obtemos $SS_x \approx 1,5264$ e desvio-padrão $S_x = \sqrt{\frac{SS_x}{9}} \approx 0,41183$.

2.

a) Consultar o portal <http://pimeariver.com>.

b) Intuitivamente, a melhor estimativa é dada pela média e desvio-padrão apresentada no portal.

Por duas razões: a amostra é muito maior e muito mais diversificada. As sinuosidades dos rios dependem do tipo de relevo e do tipo de solo.

Uma amostra que contenha rios de vários países e zonas do mundo contém uma maior diversidade de situações e, portanto, deve fornecer melhores estimativas.

06.

**PROPOSTAS
DE RESOLUÇÃO**
**CADERNO DE EXERCÍCIOS
E TESTES**

Materiais disponíveis em

20 AULA DIGITAL
PROFESSOR

Exercícios de aplicação

Tema I – Lógica e teoria dos conjuntos

Páginas 4 a 9

1.

- 1.1. "O menor número primo." – designação
 - 1.2. "A soma de 2 com 3 é igual a 5." – proposição
 - 1.3. "Existe um número natural cujo dobro é 3." – proposição
 - 1.4. " π é um número racional." – proposição
 - 1.5. "A circunferência de centro A e raio 3." – designação
 - 1.6. "A soma das amplitudes dos ângulos internos de qualquer triângulo é 180° ." – proposição
2. "A soma de 2 com 3 é 5." – proposição verdadeira
"Existe um número natural cujo dobro é 3." – proposição falsa
" π é um número racional." – proposição falsa
"15 é um número primo." – proposição falsa
"A soma das amplitudes dos ângulos internos de qualquer triângulo é 180° ." – proposição verdadeira

3.

- 3.1. a) $p \wedge q$: "A Lua é um satélite natural da Terra e a Terra é o terceiro planeta a contar do Sol."
b) $q \vee r$: "A Terra é o terceiro planeta a contar do Sol ou Marte é conhecido como o planeta azul."
c) $q \wedge (\sim r)$: "A Terra é o terceiro planeta a contar do Sol e Marte não é conhecido como o planeta azul."
d) $\sim(p \vee q) \Leftrightarrow \sim p \wedge \sim q$: "Nem a Lua é um satélite natural da Terra nem a Terra é o terceiro planeta a contar do Sol."
e) $q \Rightarrow (\sim r)$: "Se a Terra é o terceiro planeta a contar do Sol, então Marte não é conhecido como o planeta azul."
f) $p \Leftrightarrow q$: "A Lua é um satélite natural da Terra se e só se Marte é conhecido como o planeta azul."
- 3.2. a) "A Terra é o terceiro planeta a contar do Sol e Marte é conhecido como o planeta azul." – $q \wedge r$
b) "A Lua é um satélite natural da Terra ou Marte é conhecido como o planeta azul." – $p \vee r$
c) "Nem a Lua é um satélite natural da Terra nem Marte é conhecido como o planeta azul." – $\sim p \wedge \sim r$
d) "Se Marte é conhecido como o planeta azul, então a Lua não é um satélite natural da Terra."
– $r \Rightarrow \sim p$
- 3.3. $p \wedge q$: (Verdadeiro \wedge Verdadeiro) \Leftrightarrow Verdadeiro
 $q \vee r$: (Verdadeiro \vee Falso) \Leftrightarrow Verdadeiro
 $q \wedge \sim r$: (Verdadeiro \wedge Verdadeiro) \Leftrightarrow Verdadeiro
 $\sim(p \vee q)$: $\sim(\text{Verdadeiro} \vee \text{Verdadeiro}) \Leftrightarrow \sim \text{Verdadeiro} \Leftrightarrow$ Falso
 $q \Rightarrow \sim r$: (Verdadeiro \Rightarrow Verdadeiro) \Leftrightarrow Verdadeiro
 $q \Leftrightarrow r$: (Verdadeiro \Leftrightarrow Falso) \Leftrightarrow Falso
 $q \wedge r$: (Verdadeiro \wedge Falso) \Leftrightarrow Falso
 $p \vee r$: (Verdadeiro \vee Falso) \Leftrightarrow Verdadeiro
 $\sim p \wedge \sim r$: (Falso \wedge Verdadeiro) \Leftrightarrow Falso
 $r \Rightarrow \sim p$: (Falso \Rightarrow Falso) \Leftrightarrow Verdadeiro

4.

4.1. "O número 2 não é um número par ou não é primo."

4.2. "O número 9 não é um número ímpar ou é primo."

4.3. "O número 6 é um número ímpar ou é primo."

4.4. "O número 11 é um número par e não é primo."

4.5. "O número 3 é um número ímpar e é um número primo."

5.

5.1. a) $p \wedge q \wedge r$: $[(\text{Verdadeiro} \wedge \text{Falso}) \wedge \text{Verdadeiro}] \Leftrightarrow (\text{Falso} \wedge \text{Verdadeiro}) \Leftrightarrow \text{Falso}$

b) $\sim p \wedge q \wedge r$: $[(\text{Falso} \wedge \text{Falso}) \wedge \text{Verdadeiro}] \Leftrightarrow (\text{Falso} \wedge \text{Verdadeiro}) \Leftrightarrow \text{Falso}$

c) $(p \wedge q) \Rightarrow r$: $[(\text{Verdadeiro} \wedge \text{Falso}) \Rightarrow \text{Verdadeiro}] \Leftrightarrow (\text{Falso} \Rightarrow \text{Verdadeiro}) \Leftrightarrow \text{Verdadeiro}$

d) $p \wedge \sim q \Rightarrow \sim r$: $(\text{Verdadeiro} \wedge \text{Verdadeiro} \Rightarrow \text{Falso}) \Leftrightarrow (\text{Verdadeiro} \Rightarrow \text{Falso}) \Leftrightarrow \text{Falso}$

e) $\sim p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$: $[\text{Falso} \Rightarrow (\text{Falso} \Rightarrow \text{Verdadeiro})] \Leftrightarrow (\text{Falso} \Rightarrow \text{Verdadeiro}) \Leftrightarrow \text{Verdadeiro}$

5.2. a) $\sim(p \wedge q \wedge r) \Leftrightarrow \sim p \vee \sim q \vee \sim r$

b) $\sim(\sim p \wedge q \wedge r) \Leftrightarrow p \vee \sim q \vee \sim r$

c) $\sim((p \wedge q) \Rightarrow r) \Leftrightarrow p \wedge q \wedge \sim r$

d) $\sim(p \wedge \sim q \Rightarrow \sim r) \Leftrightarrow p \wedge \sim q \wedge r$

e) $\sim(\sim p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \Leftrightarrow \sim p \wedge \sim(q \Rightarrow r) \Leftrightarrow \sim p \wedge q \wedge \sim r$

6. A proposição $p \vee q$ é verdadeira, logo uma vez que a proposição p é verdadeira, então q tem de ser verdadeira.

6.1. $p \wedge q$: $(\text{Falso} \wedge \text{Verdadeiro}) \Leftrightarrow \text{Falso}$

6.2. $\sim p \vee q$: $(\text{Verdadeiro} \vee \text{Verdadeiro}) \Leftrightarrow \text{Verdadeiro}$

6.3. $\sim(\sim p \wedge q)$: $[\sim(\text{Verdadeiro} \wedge \text{Verdadeiro})] \Leftrightarrow \sim \text{Verdadeiro} \Leftrightarrow \text{Falso}$

6.4. $p \Rightarrow \sim q$: $(\text{Falso} \Rightarrow \text{Falso}) \Leftrightarrow \text{Verdadeiro}$

6.5. $p \Leftrightarrow \sim q$: $(\text{Falso} \Leftrightarrow \text{Falso}) \Leftrightarrow \text{Verdadeiro}$

7. (I) $(\sim p \vee \sim q) \wedge (p \wedge q)$

| p | q | $\sim p$ | $\sim q$ | $\sim p \vee \sim q$ | $p \wedge q$ | $(\sim p \vee \sim q) \wedge (p \wedge q)$ |
|-----|-----|----------|----------|----------------------|--------------|--|
| V | V | F | F | F | V | F |
| V | F | F | V | V | F | F |
| F | V | V | F | V | F | F |
| F | F | V | V | V | F | F |

Não é uma tautologia.

(II) $\sim(\sim p) \wedge (p \vee \sim q)$

| p | q | $\sim p$ | $\sim(\sim p)$ | $\sim q$ | $p \vee \sim q$ | $\sim(\sim p) \wedge (p \vee \sim q)$ |
|-----|-----|----------|----------------|----------|-----------------|---------------------------------------|
| V | V | F | V | F | V | V |
| V | F | F | V | V | V | V |
| F | V | V | F | F | F | F |
| F | F | V | F | V | V | F |

Não é uma tautologia.

(III) $\sim(p \vee \sim q) \Leftrightarrow (\sim p \wedge q)$

| p | q | $\sim q$ | $p \vee \sim q$ | $\sim(p \vee \sim q)$ | $\sim p$ | $\sim p \wedge q$ | $\sim(p \vee \sim q) \Leftrightarrow (\sim p \wedge q)$ |
|-----|-----|----------|-----------------|-----------------------|----------|-------------------|---|
| V | V | F | V | F | F | F | V |
| V | F | V | V | F | F | F | V |
| F | V | F | F | V | V | V | V |
| F | F | V | V | F | V | F | V |

É uma tautologia.

$$(IV) \sim [(p \wedge q) \wedge \sim (p \vee q)]$$

| p | q | $p \wedge q$ | $p \vee q$ | $\sim (p \vee q)$ | $(p \wedge q) \wedge \sim (p \vee q)$ | $\sim [(p \wedge q) \wedge \sim (p \vee q)]$ |
|-----|-----|--------------|------------|-------------------|---------------------------------------|--|
| V | V | V | V | F | F | V |
| V | F | F | V | F | F | V |
| F | V | F | V | F | F | V |
| F | F | F | F | V | F | V |

É uma tautologia.

$$(V) (\sim p \vee (p \wedge q)) \vee (p \wedge \sim q)$$

| p | q | $\sim p$ | $p \wedge q$ | $\sim p \vee (p \wedge q)$ | $\sim q$ | $p \wedge \sim q$ | $(\sim p \vee (p \wedge q)) \vee (p \wedge \sim q)$ |
|-----|-----|----------|--------------|----------------------------|----------|-------------------|---|
| V | V | F | V | V | F | F | V |
| V | F | F | F | F | V | V | V |
| F | V | V | F | V | F | F | V |
| F | F | V | F | V | V | F | V |

É uma tautologia.

8.

$$8.1. \sim p \Rightarrow p$$

$$\Leftrightarrow \sim \sim p \vee p$$

$$\Leftrightarrow p \vee p$$

$$\Leftrightarrow p$$

$$8.2. (p \Rightarrow q) \Rightarrow q$$

$$\Leftrightarrow \sim (p \Rightarrow q) \vee q$$

$$\Leftrightarrow (p \wedge \sim q) \vee q$$

$$\Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (\sim q \vee q)$$

$$\Leftrightarrow (p \vee q) \wedge V$$

$$\Leftrightarrow p \vee q$$

$$8.3. (p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r)$$

$$\Leftrightarrow (\sim p \vee q) \wedge (\sim p \vee r)$$

$$\Leftrightarrow \sim p \vee (q \wedge r)$$

$$\Leftrightarrow p \Rightarrow (q \wedge r)$$

$$\Leftrightarrow p \Rightarrow (r \wedge q)$$

$$8.4. p \Rightarrow (q \vee r)$$

$$\Leftrightarrow \sim p \vee (q \vee r)$$

$$\Leftrightarrow \sim p \vee q \vee r$$

$$\Leftrightarrow \sim (p \wedge \sim q) \vee r$$

$$\Leftrightarrow (p \wedge \sim q) \Rightarrow r$$

9.

$$9.1. (p \vee q) \wedge \sim p$$

$$\Leftrightarrow (p \wedge \sim p) \vee (q \wedge \sim p)$$

$$\Leftrightarrow F \vee (q \wedge \sim p)$$

$$\Leftrightarrow q \wedge \sim p$$

$$9.2. (p \Rightarrow q) \wedge (\sim p \Rightarrow q)$$

$$\Leftrightarrow (\sim p \vee q) \wedge (p \vee q)$$

$$\Leftrightarrow (\sim p \wedge p) \vee q \Leftrightarrow F \vee q$$

$$\Leftrightarrow q$$

$$9.3. p \wedge (p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow \sim q)$$

$$\Leftrightarrow p \wedge (\sim p \vee q) \wedge (\sim p \vee \sim q)$$

$$\Leftrightarrow (p \wedge \sim p) \vee (p \wedge q) \wedge (\sim p \vee \sim q)$$

$$\Leftrightarrow F \vee (p \wedge q) \wedge (\sim p \vee \sim q)$$

$$\Leftrightarrow (p \wedge q) \wedge (\sim p \vee \sim q)$$

$$\Leftrightarrow p \wedge [(q \wedge \sim p) \vee (q \wedge \sim q)]$$

$$\Leftrightarrow p \wedge [(q \wedge \sim p) \vee F]$$

$$\Leftrightarrow p \wedge (q \wedge \sim p)$$

$$\Leftrightarrow p \wedge \sim p \wedge q$$

$$\Leftrightarrow F \wedge q$$

$$\Leftrightarrow F$$

$$9.4. \sim p \wedge (p \vee q) \Rightarrow (p \vee q) \wedge q$$

$$\Leftrightarrow \sim (\sim p \wedge (p \vee q)) \vee ((p \vee q) \wedge q)$$

$$\Leftrightarrow p \vee \sim (p \vee q) \vee (p \vee q) \vee q$$

$$\Leftrightarrow (p \vee q) \vee \sim (p \vee q) \vee (p \wedge q)$$

$$\Leftrightarrow V \vee (p \wedge q)$$

$$\Leftrightarrow V$$

$$9.5. \sim (\sim p \Rightarrow \sim q)$$

$$\Leftrightarrow \sim p \wedge \sim \sim q$$

$$\Leftrightarrow \sim p \wedge q$$

$$9.6. \sim (p \vee q) \vee (\sim p \wedge q)$$

$$\Leftrightarrow (\sim p \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge q)$$

$$\Leftrightarrow \sim p \wedge (\sim q \vee q)$$

$$\Leftrightarrow \sim p \wedge V$$

$$\Leftrightarrow \sim p$$

10.

10.1. Como $p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$ é uma proposição falsa, então p é uma proposição verdadeira e $q \Rightarrow r$ é uma proposição falsa.

Logo, uma vez que $q \Rightarrow r$ é uma proposição falsa, tem-se que q é uma proposição verdadeira e r é uma proposição falsa.

10.2. Como $\sim(p \Rightarrow q) \wedge r$ é uma proposição verdadeira, então $\sim(p \Rightarrow q)$ é uma proposição verdadeira e r é uma proposição verdadeira.

Sendo $\sim(p \Rightarrow q)$ uma proposição verdadeira, então $p \Rightarrow q$ é uma proposição falsa e, portanto, p é uma proposição verdadeira e q é uma proposição falsa.

11. Sabe-se que $\sim(\sim(r \Rightarrow q) \wedge q) \Rightarrow r$ é uma proposição verdadeira. Ora:

$$\begin{aligned} & \sim(\sim(r \Rightarrow q) \wedge q) \\ \Leftrightarrow & (p \Rightarrow q) \vee \sim q \\ \Leftrightarrow & \sim p \vee q \vee \sim q \\ \Leftrightarrow & \sim p \vee V \Leftrightarrow V \end{aligned}$$

Logo, para que a proposição do enunciado seja verdadeira, r tem de ser uma proposição verdadeira.

12. $\sim(\sim p \vee (\sim q \Rightarrow p))$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow & p \wedge \sim(\sim q \Rightarrow p) \\ \Leftrightarrow & p \wedge (\sim q \wedge \sim p) \\ \Leftrightarrow & p \wedge \sim p \wedge \sim q \\ \Leftrightarrow & F \wedge \sim q \\ \Leftrightarrow & F \end{aligned}$$

Como r é uma proposição falsa, então tem-se (Falso \Rightarrow Falso) \Leftrightarrow Verdadeiro, logo a proposição dada é verdadeira.

13.

13.1. $x^2 > 4 \Leftrightarrow x > 2$

13.2. $x > 3 \Rightarrow x^2 > 9$

13.3. $x^3 = 27 \Leftrightarrow x = 3$

13.4. $|x| = 3 \Leftrightarrow x = 3 \vee x = -3$

13.5. $x + 1 > 3 \Leftrightarrow x > 4$

13.6. $|x + 1| > 2 \Leftrightarrow x > 1$

13.7. $x = 0 \Rightarrow x^2 - x = 0$

13.8. $x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 1$

14.

14.1. “Todos os quadrados de números reais são positivos ou nulos.”: $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$

14.2. “Existe pelo menos um número real no intervalo $[0, 1]$.”: $\exists x \in \mathbb{R}: x \in [0, 1]$

14.3. “Todo o número real é inferior ao seu inverso.”: $\forall x \in \mathbb{R}, x < \frac{1}{x}$

14.4. “A equação $2x + 3 = 9$ tem uma solução em \mathbb{N} .”: $\exists x \in \mathbb{N}: 2x + 3 = 9$

14.5. “Todos os números naturais são positivos.”: $\forall x \in \mathbb{N}, x > 0$

14.6. “Nem todos os números inteiros são positivos.”: $\exists x \in \mathbb{Z}: x \leq 0$

- 14.7.** "Há números naturais que são solução da inequação $2x + 1 < 7$." : $\exists x \in \mathbb{N}: 2x + 1 < 7$
- 14.8.** "Todos os números inteiros são naturais." : $\forall x \in \mathbb{Z}, x \in \mathbb{N}$
- 14.9.** "Nem todos os números inteiros são naturais." : $\exists x \in \mathbb{Z}: x \notin \mathbb{N}$
- 15.**
- 15.1.** $\exists x \in \mathbb{N}: 0 < x \leq 1$ - "Existe pelo menos um número natural no intervalo $]0, 1]$."
- 15.2.** $\forall x \in [0, 1], x > 0$ - "Todos os números no intervalo $[0, 1]$ são positivos."
- 15.3.** $\exists x \in \mathbb{Q}: x = \frac{1}{x}$ - "Existe pelo menos um número racional que é igual ao seu inverso."
- 15.4.** $\forall x \in [2, 5], 2x - 5 \leq 5$ - "Todos os números no intervalo $[2, 5]$ satisfazem a condição $2x - 5 \leq 5$."
- 15.5.** $\exists x \in \mathbb{Z}: x \in]3, 4[$ - "Existe pelo menos um número inteiro entre 3 e 4."
- 15.6.** $\exists x \in \mathbb{R}: x^2 + 1 = 0$ - "Existe pelo menos um número real tal que a soma do seu quadrado com 1 é nula."
- 15.7.** $\forall x \in \mathbb{Q}, x^2 > x$ - "Todos os números racionais são menores que os seus quadrados."
- 15.8.** $\forall x \in \mathbb{Z}, x^2 \geq x$ - "Todos os números inteiros são inferiores ou iguais aos seus quadrados."
- 15.9.** $\exists x \in]0, 1[: 2x^2 - 1 = 0$ - "Existe pelo menos um número no intervalo $]0, 1[$ que é solução da equação $2x^2 - 1 = 0$."
- 16.**
- 16.1.** $\sim(\exists x \in \mathbb{N}: x \geq 1 \wedge x < 2) \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{N}, x < 1 \vee x \geq 2$
- 16.2.** $\sim(\forall x \in \mathbb{R}, x > 2 \vee x < 3) \Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{R}: x \leq 2 \wedge x \geq 3$
- 16.3.** $\sim(\forall x \in \mathbb{R}, 2 < x \leq 3) \Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{R}: x \leq 2 \vee x > 3$
- 16.4.** $\sim(\exists x \in \mathbb{R}: x > 2 \vee x < 3) \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, x \leq 2 \wedge x \geq 3$
- 16.5.** $\sim(\exists x \in \mathbb{R}: 2 < x \leq 3) \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, x \leq 2 \vee x > 3$
- 16.6.** $\sim(\forall x \in \mathbb{R}, x > 2 \Rightarrow x > 3) \Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{R}: x > 2 \wedge x \leq 3$
- 16.7.** $\sim(\exists x \in \mathbb{R}: x < 2 \Rightarrow x^2 > 3) \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, x < 2 \wedge x^2 \leq 3$
- 17.** $U = \{a, b, c, d\}$ $A = \{a, b\}$ e $B = \{a, c, d\}$
- 17.1.** $A \cup B = \{a, b\} \cup \{a, c, d\} = \{a, b, c, d\} = U$
- 17.2.** $A \cap B = \{a, b\} \cap \{a, c, d\} = \{a\}$
- 17.3.** $\bar{A} = \overline{\{a, b\}} = \{c, d\}$
- 17.4.** $\bar{B} = \overline{\{a, c, d\}} = \{b\}$
- 17.5.** $\bar{A} \cap B = \{c, d\} \cap \{a, c, d\} = \{c, d\}$
- 17.6.** $A \cup \bar{B} = \{a, b\} \cup \{b\} = \{a, b\}$
- 17.7.** $B \setminus A = \{a, c, d\} \setminus \{a, b\} = \{c, d\}$
- 17.8.** $A \setminus B = \{a, b\} \setminus \{a, c, d\} = \{b\}$
- 18.** $A = \{x \in \mathbb{N} : x \text{ é par}\}$ $B = \{x \in \mathbb{N} : x \text{ é ímpar}\}$ $C = \{x \in \mathbb{N} : x \text{ é primo}\}$
- 18.1.** $A \cup B = \{x \in \mathbb{N} : x \text{ é par}\} \cup \{x \in \mathbb{N} : x \text{ é ímpar}\} = \{x \in \mathbb{N} : x \text{ é par ou ímpar}\} = \mathbb{N}$
- 18.2.** $A \cap B = \{x \in \mathbb{N} : x \text{ é par}\} \cap \{x \in \mathbb{N} : x \text{ é ímpar}\} = \{x \in \mathbb{N} : x \text{ é par e ímpar}\} = \emptyset$
- 18.3.** $B \cap C = \{x \in \mathbb{N} : x \text{ é ímpar}\} \cap \{x \in \mathbb{N} : x \text{ é primo}\} = \{x \in \mathbb{N} : x \text{ é ímpar e primo}\} = C \setminus \{2\}$
- 18.4.** $A \cap C = \{x \in \mathbb{N} : x \text{ é par}\} \cap \{x \in \mathbb{N} : x \text{ é primo}\} = \{x \in \mathbb{N} : x \text{ é par e primo}\} = \{2\}$
- 18.5.** $\bar{A} = \overline{\{x \in \mathbb{N} : x \text{ é par}\}} = \{x \in \mathbb{N} : x \text{ é ímpar}\} = B$
- 18.6.** $\bar{B} = \overline{\{x \in \mathbb{N} : x \text{ é ímpar}\}} = \{x \in \mathbb{N} : x \text{ é par}\} = A$

$$18.7. A \cap \bar{B} = \{x \in \mathbb{N} : x \text{ é par}\} \cap \overline{\{x \in \mathbb{N} : x \text{ é ímpar}\}} = \{x \in \mathbb{N} : x \text{ é par}\} \cap \{x \in \mathbb{N} : x \text{ é par}\} \\ = \{x \in \mathbb{N} : x \text{ é par}\} = A$$

$$18.8. C \setminus B = \{x \in \mathbb{N} : x \text{ é primo}\} \setminus \{x \in \mathbb{N} : x \text{ é ímpar}\} \\ = \{x \in \mathbb{N} : x \text{ é primo e } x \text{ não é ímpar}\} = \{2\}$$

$$19. A =] - 1, 3]$$

$$B = [0, +\infty[$$

$$19.1. \bar{A} = \overline{]-1, 3]} = \mathbb{R} \setminus] - 1, 3] =] - \infty, -1] \cup]3, +\infty[$$

$$19.2. \bar{B} = \overline{[0, +\infty[} = \mathbb{R} \setminus [0, +\infty[=] - \infty, 0[= \mathbb{R}^-$$

$$19.3. A \setminus B =] - 1, 3] \setminus [0, +\infty[=] - 1, 0[$$

$$19.4. A \cup B =] - 1, 3] \cup [0, +\infty[=] - 1, +\infty[$$

$$19.5. A \cap B =] - 1, 3] \cap [0, +\infty[= [0, 3]$$

$$19.6. \overline{A \cup B} = \overline{]-1, 3] \cup [0, +\infty[} = \overline{]-1, +\infty[} =] - \infty, -1]$$

$$19.7. \bar{A} \cup \bar{B} = \overline{]-1, 3]} \cup \overline{[0, +\infty[} =] - \infty, -1] \cup]3, +\infty[\cup [0, +\infty[=] - \infty, -1] \cup [0, +\infty[$$

$$19.8. A \cap \bar{B} =] - 1, 3] \cap \overline{[0, +\infty[} =] - 1, 3] \cap] - \infty, 0[=] - 1, 0[$$

$$19.9. A \cup \bar{B} =] - 1, 3] \cup \overline{[0, +\infty[} =] - 1, 3] \cup] - \infty, 0[=] - \infty, 3]$$

$$19.10. \bar{A} \cap B = \overline{]-1, 3]} \cap [0, +\infty[= (]-\infty, -1] \cup]3, +\infty[) \cap [0, +\infty[=]3, +\infty[$$

$$20. A = \{2, 3, 4, 5\} \quad p(x): "x \text{ é um número primo}" \quad q(x): "x \text{ é múltiplo de 6}"$$

20.1. a) $\forall x \in A, p(x)$ é uma proposição falsa porque 4 não é um número primo.

b) $\exists x \in A: q(x)$ é uma proposição falsa porque nenhum dos elementos de A é múltiplo de 6.

20.2. a) $\sim(\forall x \in A, p(x)) \Leftrightarrow \exists x \in A: \sim p(x)$ – "Existe pelo menos um elemento de A que não é um número primo."

b) $\sim(\exists x \in A: q(x)) \Leftrightarrow \forall x \in A, \sim q(x)$ – "Nenhum elemento de A é múltiplo de 6."

20.3. $p(x)$ é possível em A, pois os números 2, 3, e 5 são números primos.

$q(x)$ é impossível em A, pois não há em A qualquer múltiplo de 6.

$\sim p(x)$ é possível em A, pois o número 4 não é um número primo.

$\sim q(x)$ é universal em A, pois todos os elementos de A não são múltiplos de 6.

21. Por exemplo:

21.1. "O papagaio é um quadrilátero e não tem as diagonais iguais."

21.2. "O losango é um quadrilátero com os lados todos iguais e não tem os ângulos iguais."

21.3. "O número 4 é divisor de 12 mas não é divisor de 18."

21.4. "O número 11 é um número primo com dois algarismos iguais."

22.

22.1. A implicação é verdadeira, pois $\forall x \in \mathbb{R}, x < 2 \Rightarrow x < 5$ é uma proposição verdadeira.

A contrarrecíproca da implicação dada é $x \geq 5 \Rightarrow x \geq 2$.

22.2. A implicação é verdadeira, pois $\forall x \in \mathbb{R}, x \text{ é múltiplo de } 6 \Rightarrow x \text{ é par}$ é uma proposição verdadeira.

A contrarrecíproca da implicação dada é $x \text{ é ímpar} \Rightarrow x \text{ não é múltiplo de } 6$.

22.3. A implicação é falsa, pois $\forall x \in \mathbb{R}, x > 1 \Rightarrow x > 5$ é uma proposição falsa (por exemplo, $2 > 1$ e $2 < 5$).

A contrarrecíproca da implicação dada é $x \leq 5 \Rightarrow x \leq 1$.

- 22.4.** A implicação é verdadeira, pois os triângulos retângulos podem ser isósceles ou escalenos, mas não equiláteros.
A contrarrecíproca da implicação dada é "se um triângulo é equilátero, então não é retângulo".
- 22.5.** A implicação é falsa, pois um triângulo pode ser isósceles e retângulo.
A contrarrecíproca da implicação dada é "se um triângulo tem ângulos internos retos, então não é isósceles".
- 22.6.** A implicação é verdadeira, pois um losango com as duas diagonais iguais é um quadrado.
A contrarrecíproca da implicação dada é "se um losango não é um quadrado, então não tem as diagonais iguais".
- 22.7.** A implicação é verdadeira, pois num triângulo obtusângulo o ângulo externo correspondente ao ângulo obtuso é agudo.
A contrarrecíproca da implicação dada é "se um triângulo não é obtusângulo, então não tem um ângulo externo agudo".
- 22.8.** A implicação é verdadeira, pois $\forall x \in \mathbb{R}, x = -1 \Rightarrow x^2 = 1$.
A contrarrecíproca da implicação dada é $x^2 \neq 1 \Rightarrow x \neq -1$.
- 22.9.** A implicação é falsa, pois se $x^2 = 1$, então x pode ser igual a -1 .
A contrarrecíproca da implicação dada é $x \neq 1 \Rightarrow x^2 \neq 1$.
- 23.** Quer-se mostrar que se um número natural n é divisível por 15, então é divisível por 3.
Seja n um número natural. Se n é divisível por 15 então $n = 15k$, onde k é um número natural.
Ora, $n = 15k = 3 \times 5k = 3(5k)$. Logo, n é múltiplo de 3, ou seja, n é divisível por 3.
- 24.** $\forall n \in \mathbb{N}, n^2 \text{ ímpar} \Leftrightarrow n \text{ ímpar}$
(\Leftarrow) $n \text{ ímpar} \Rightarrow n^2 \text{ ímpar}$
Seja $n \in \mathbb{N}$ tal que n é ímpar. Então existe $k \in \mathbb{N}_0$ tal que $n = 2k + 1$.
Logo, $n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$.
Mas $2k^2 + 2k \in \mathbb{N}_0$, uma vez que $k \in \mathbb{N}_0$. Logo n^2 é ímpar.
(\Rightarrow) $n^2 \text{ ímpar} \Rightarrow n \text{ ímpar}$
A contrarrecíproca desta implicação é $n \text{ par} \Rightarrow n^2 \text{ par}$. Seja $n \in \mathbb{N}$ tal que n é par, então existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $n = 2k$. Então, $n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2 \times 2k^2$.
Ora, $2k^2 \in \mathbb{N}$ porque $k \in \mathbb{N}$. Logo, n^2 é par.

Tema II – Álgebra

Páginas 10 a 15

1.

1.1. $\sqrt{24} + \sqrt{54} - 2\sqrt{6} = 2\sqrt{6} + 3\sqrt{6} - 2\sqrt{6} = 3\sqrt{6}$

1.2. $\sqrt{5} - 3\sqrt{45} + \sqrt{245} = \sqrt{5} - 3 \times 3\sqrt{5} + 7\sqrt{5} = \sqrt{5} - 9\sqrt{5} + 7\sqrt{5} = -\sqrt{5}$

1.3. $\sqrt{81} - \sqrt{27} - \sqrt{9} - \sqrt{3} = 9 - 3\sqrt{3} - 3 - \sqrt{3} = 6 - 4\sqrt{3}$

1.4. $5\sqrt[3]{16} - 2\sqrt[3]{250} - \sqrt[3]{128} = 5 \times 2\sqrt[3]{2} - 2 \times 5\sqrt[3]{2} - 2 \times 2\sqrt[3]{2} = 10\sqrt[3]{2} - 10\sqrt[3]{2} - 4\sqrt[3]{2} = -4\sqrt[3]{2}$

1.5. $3(\sqrt{2} + 2) - \sqrt{2}(3 - 2\sqrt{2}) = 3\sqrt{2} + 6 - 3\sqrt{2} + 4 = 10$

1.6. $(\sqrt{2})^6 + (\sqrt{3})^6 + (\sqrt{4})^6 = 2^3 + 3^3 + 4^3 = 8 + 27 + 64 = 99$

1.7. $(\sqrt{2} + 1)(\sqrt{2} - 1) + (\sqrt{2} + 1)^2 = 2 - 1 + 2 + 2\sqrt{2} + 1 = 4 + 2\sqrt{2}$

$$1.8. \left(1 - \frac{1}{3}\sqrt{3}\right)^2 - (1 - \sqrt{3})\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 [1 - (1 - \sqrt{3})] = \left(1 - \frac{2\sqrt{3}}{3} + \frac{1}{3}\right)(1 - 1 + \sqrt{3})$$

$$= \left(\frac{4}{3} - \frac{2\sqrt{3}}{3}\right) \times \sqrt{3} = \frac{4}{3}\sqrt{3} - 2 = -2 + \frac{4}{3}\sqrt{3}$$

2.

$$2.1. \frac{2}{3\sqrt{5}} = \frac{2}{3\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{3 \times 5} = \frac{2\sqrt{5}}{15}$$

$$2.2. \frac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{6}}{3 \times 2} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$2.3. \frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{6}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$2.4. \frac{5}{3+\sqrt{5}} = \frac{5}{3+\sqrt{5}} \times \frac{3-\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}} = \frac{15-5\sqrt{5}}{9-5} = \frac{15-5\sqrt{5}}{4} = \frac{15}{4} - \frac{5\sqrt{5}}{4}$$

$$2.5. \frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} = \frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} \times \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1} = \frac{1+2\sqrt{2}+2}{2-1} = 3 + 2\sqrt{2}$$

$$2.6. \frac{3-\sqrt{5}}{2+\sqrt{5}} = \frac{3-\sqrt{5}}{2+\sqrt{5}} \times \frac{2-\sqrt{5}}{2-\sqrt{5}} = \frac{6-3\sqrt{5}-2\sqrt{5}+5}{4-5} = \frac{11-5\sqrt{5}}{-1} = -11 + 5\sqrt{5}$$

$$2.7. \frac{1}{\sqrt[4]{5}-1} = \frac{1}{\sqrt[4]{5}-1} \times \frac{\sqrt[4]{5}+1}{\sqrt[4]{5}+1} = \frac{\sqrt[4]{5}+1}{\sqrt[4]{5}-1} = \frac{\sqrt[4]{5}+1}{\sqrt[4]{5}-1} \times \frac{\sqrt[4]{5}+1}{\sqrt[4]{5}+1} = \frac{\sqrt[4]{5} \times \sqrt[4]{5} + \sqrt[4]{5} + \sqrt[4]{5} + 1}{5-1} = \frac{\sqrt[4]{5} \times \sqrt[4]{5^2} + \sqrt[4]{5} + \sqrt[4]{5} + 1}{4}$$

$$= \frac{\sqrt[4]{5^3}}{4} + \frac{\sqrt[4]{5}}{4} + \frac{\sqrt{5}}{4} + \frac{1}{4} = \frac{\sqrt[4]{125}}{4} + \frac{\sqrt[4]{5}}{4} + \frac{\sqrt{5}}{4} + \frac{1}{4}$$

$$2.8. \frac{1}{\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{3}} \times \frac{\sqrt[3]{2^2}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{3^2}}{\sqrt[3]{2^2}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{3^2}} = \frac{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{9}}{2-3} = \frac{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{9}}{-1} = -\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{6} - \sqrt[3]{9}$$

3.

$$3.1. \frac{4}{\sqrt{2}} + \frac{6}{\sqrt{8}} = \frac{4}{\sqrt{2}} + \frac{6}{2\sqrt{2}} = \frac{8}{2\sqrt{2}} + \frac{6}{2\sqrt{2}} = \frac{14}{2\sqrt{2}} = \frac{7}{\sqrt{2}} = \frac{7}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{7\sqrt{2}}{2}$$

$$3.2. \frac{3}{\sqrt{27}} + \sqrt{243} = \frac{3}{3\sqrt{3}} + 9\sqrt{3} = \frac{1}{\sqrt{3}} + 9\sqrt{3} = \frac{1}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} + 9\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{3} + 9\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{27\sqrt{3}}{3} = \frac{28\sqrt{3}}{3}$$

$$3.3. \frac{1}{\sqrt{2}}(2\sqrt{2}-1) + \sqrt{2}(\sqrt{2}-1) = 2 - \frac{1}{\sqrt{2}} + 2 - \sqrt{2} = 4 - \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} - \sqrt{2} = 4 - \frac{\sqrt{2}}{2} - \sqrt{2}$$

$$= 4 - \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{2\sqrt{2}}{2}$$

$$= 4 - \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$3.4. \sqrt[3]{25} + 3\sqrt[6]{25} - \sqrt[3]{40} = \sqrt[6]{25} + 3\sqrt[6]{25} - 2\sqrt[3]{5} = 4\sqrt[6]{25} - 2\sqrt[3]{5} = 4\sqrt[6]{5^2} - 2\sqrt[3]{5} = 4\sqrt[3]{5} - 2\sqrt[3]{5} = 2\sqrt[3]{5}$$

$$3.5. \sqrt[3]{8\sqrt{2}\sqrt{16}} \times \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \sqrt{2} + \sqrt{8}\right) = \sqrt[3]{8\sqrt{2} \times 4} \times \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} - \sqrt{2} + 2\sqrt{2}\right) = \sqrt[3]{8\sqrt{2} \times 64} \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2}\right)$$

$$= \sqrt[6]{2^3 \times 2^6} \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{2\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$= 2\sqrt[6]{2^3} \times \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$= 2\sqrt{2} \times \frac{3\sqrt{2}}{2} = 6$$

$$3.6. \frac{2\sqrt{28}-\sqrt{14}\times^4\sqrt{4}}{\sqrt{\frac{7}{9}+3\sqrt{7\sqrt{7}}}} = \frac{2\sqrt{28}-\sqrt{14}\times^4\sqrt{2^2}}{\frac{\sqrt{7}}{3}+\sqrt[3]{7\sqrt{3}}} = \frac{2\sqrt{28}-\sqrt{14}\times\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{7}}{3}+\sqrt[6]{7^3}} = \frac{2\sqrt{28}-\sqrt{28}}{\frac{\sqrt{7}}{3}+\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{28}}{\frac{\sqrt{7}}{3}+\frac{3\sqrt{7}}{3}}$$

$$= \frac{\sqrt{28}}{\frac{4\sqrt{7}}{3}} = \frac{3\sqrt{28}}{4\sqrt{7}} = \frac{3}{4}\sqrt{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

$$3.7. \frac{\sqrt{5}+\sqrt[3]{10}\times^3\sqrt{10}}{\sqrt{5}} = 1 + \frac{\sqrt[6]{10}\times^6\sqrt{10^2}}{\sqrt{5}} = 1 + \frac{\sqrt[6]{10^3}}{\sqrt{5}} = 1 + \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{5}} = 1 + \sqrt{2}$$

$$4. \quad x^2 - 2xy + y^3$$

$$4.1. \quad x = \sqrt{2} \quad \text{e} \quad y = \sqrt{3}$$

$$(\sqrt{2})^2 - 2 \times \sqrt{2} \times \sqrt{3} + (\sqrt{3})^3 = 2 - 2\sqrt{6} + 3\sqrt{3}$$

$$4.2. \quad x = 2\sqrt{2} \quad \text{e} \quad y = \sqrt[3]{3}$$

$$(2\sqrt{2})^2 - 2 \times 2\sqrt{2} \times \sqrt[3]{3} + (\sqrt[3]{3})^3 = 4 \times 2 - 4\sqrt[6]{2^3} \times \sqrt[6]{3^2} + 3 = 8 - 4\sqrt[6]{72} + 3 = 11 - 4\sqrt[6]{72}$$

$$4.3. \quad x = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{e} \quad y = \sqrt{8}$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - 2 \times \frac{1}{\sqrt{2}} \times \sqrt{8} + (\sqrt{8})^3 = \frac{1}{2} - 2 \times \frac{1}{\sqrt{2}} \times 2\sqrt{2} + \sqrt{8^3} = \frac{1}{2} - 4 + \sqrt{(2^3)^3} = -\frac{7}{2} + \sqrt{2^9} = -\frac{7}{2} + 16\sqrt{2}$$

5.

$$5.1. \quad \frac{2^3 \times 2^4}{2^5} = \frac{2^7}{2^5} = 2^2$$

$$5.2. \quad 4 \times \frac{2^9}{2^4} = 2^2 \times 2^5 = 2^7$$

$$5.3. \quad \frac{32 \times 2^4}{2^2 \times 2} = \frac{2^5 \times 2^4}{2^3} = \frac{2^9}{2^3} = 2^6$$

$$5.4. \quad 2^{50} + 2^{50} = 2 \times 2^{50} = 2^{51}$$

$$5.5. \quad 2^{-100} + 2^{-100} = 2 \times 2^{-100} = 2^{-99}$$

$$5.6. \quad 2^{\frac{1}{5}} + 2^{\frac{1}{5}} + 2^{\frac{1}{5}} + 2^{\frac{1}{5}} = 4 \times 2^{\frac{1}{5}} = 2^2 \times 2^{\frac{1}{5}} = 2^{\frac{11}{5}}$$

$$5.7. \quad 2^{1000} - 2^{999} = 2^{999} \times (2 - 1) = 2^{999} \times 1 = 2^{999}$$

$$5.8. \quad 8^{0,1} + 8^{0,1} + 8^{0,1} + 8^{0,1} + 8^{0,1} + 8^{0,1} + 8^{0,1} + 8^{0,1} = 8 \times 8^{0,1} = 2^3 \times (2^3)^{0,1} = 2^3 \times 2^{0,3} = 2^{3,3}$$

$$5.9. \quad \sqrt{2 \times \sqrt[3]{8} \times \sqrt{32}} = \sqrt{2 \times 2 \times (2^5)^{\frac{1}{2}}} = \sqrt{2^2 \times 2^{\frac{5}{2}}} = \sqrt{2^{\frac{9}{2}}} = (2^{\frac{9}{2}})^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{9}{4}}$$

$$5.10. \quad \sqrt[3]{\sqrt{2}} = \left((2^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{3}} \right)^{\frac{1}{2}} = (2^{\frac{1}{6}})^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{12}}$$

$$5.11. \quad \sqrt{32} \times \sqrt[3]{128} = (2^5)^{\frac{1}{2}} \times (2^7)^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{5}{2}} \times 2^{\frac{7}{3}} = 2^{\frac{29}{6}}$$

6.

$$6.1. \quad \frac{x^{-2} + x^{-3}}{1 + x^{-1}} = \frac{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}}{1 + \frac{1}{x}} = \frac{\frac{x+1}{x^3}}{\frac{x+1}{x}} = \frac{(x+1)x}{(x+1)x^3} = \frac{1}{x^2}$$

$$6.2. \quad \left(\frac{2^{-1}x}{x^{-2}} \right)^{-2} = \left(\frac{\frac{x}{2}}{\frac{1}{x^2}} \right)^{-2} = \left(\frac{x^3}{2} \right)^{-2} = \left(\frac{2}{x^3} \right)^2 = \frac{4}{x^6}$$

$$6.3. \quad \frac{(5x)^{-1}}{(8x^6)^{\frac{1}{3}}} = \frac{\frac{1}{5x}}{2x^2} = \frac{1}{10x^3}$$

$$6.4. \quad \left(x^{\frac{1}{3}} y^{\frac{1}{2}} \right)^2 \left(x^{\frac{1}{6}} y^{\frac{1}{3}} \right)^4 (xy)^{-2} = x^{\frac{2}{3}} y^{\frac{2}{3}} x^{\frac{4}{3}} y^{\frac{4}{3}} x^{-2} y^{-2} = x^{-\frac{2}{3}} y^{\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt[3]{y}}{\sqrt[3]{x^2}}$$

$$6.5. \frac{(5x^2y^4)^{\frac{1}{3}}}{(25xy^2)^{-\frac{1}{3}}} = \frac{5^{\frac{1}{3}}x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{4}{3}}}{25^{-\frac{1}{3}}x^{-\frac{1}{3}}y^{-\frac{2}{3}}} = \frac{5^{\frac{1}{3}}}{5^{-\frac{2}{3}}}x^1y^2 = 5xy^2$$

$$6.6. \left(2x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{3}}\right)^6 \times \left(\frac{1}{2}x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{4}}\right)^4 = 2^6x^3y^2(2^{-1})^4x^1y^1 = 2^2x^4y^3 = 4x^4y^3$$

$$6.7. \frac{(2x^2y^{-1})^{-\frac{1}{4}}}{(8x^{-1}y^2)^{-\frac{1}{2}}} = \frac{2^{-\frac{1}{4}}x^{-\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{4}}}{(2^3)^{-\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}y^{-1}} = \frac{2^{-\frac{1}{4}}}{2^{-\frac{3}{2}}}x^{-1}y^{\frac{5}{4}} = 2^{\frac{5}{4}}x^{-1}y^{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt[4]{2^5} \times \sqrt[4]{y^5}}{x} = \frac{2y^4\sqrt[4]{2y}}{x}$$

$$6.8. \left(\frac{4^{-2}x^{-5}y^2}{8^{-1}x^{-8}y^{-4}}\right)^{-1} = \frac{(2^3)^{-1}x^{-8}y^{-4}}{(2^2)^{-2}x^{-5}y^2} = \frac{2^{-3}}{2^{-4}} = x^{-3}y^{-6} \frac{2}{x^3y^6}$$

$$7. \frac{2x-3y^2}{xy^2}$$

$$7.1. x = 2^{-2} \text{ e } y = 2^{-1}$$

$$\frac{2 \times 2^{-2} - 3 \times (2^{-1})^2}{2^{-2} \times (2^{-1})^2} = \frac{2^{-1} - 3 \times 2^{-2}}{2^{-2} \times 2^{-2}} = \frac{2^{-1}(1 - 3 \times 2^{-1})}{2^{-4}} = 2^3 \times \left(1 - \frac{3}{2}\right) = 2^3 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -2^2 = -4$$

$$7.2. x = 2^{-1} \text{ e } y = 3^{-1}$$

$$\frac{2 \times 2^{-1} - 3 \times (3^{-1})^2}{2^{-1} \times (3^{-1})^2} = \frac{2^0 - 3 \times 3^{-2}}{\frac{1}{2} \times 3^{-2}} = \frac{1 - 3^{-1}}{\frac{1}{2} \times \frac{1}{9}} = \frac{1 - \frac{1}{3}}{\frac{1}{18}} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{18}} = \frac{36}{3} = 12$$

$$7.3. x = 2^{\frac{1}{2}} \text{ e } y = 2^{-1}$$

$$\frac{2 \times 2^{\frac{1}{2}} - 3 \times (2^{-1})^2}{2^{\frac{1}{2}} \times (2^{-1})^2} = \frac{2^{\frac{1}{2}} - 3 \times 2^{-2}}{2^{\frac{1}{2}} \times 2^{-2}} = \frac{\sqrt{2} - \frac{3}{4}}{2^{-\frac{5}{2}}} = \frac{\frac{4\sqrt{2}-3}{4}}{\frac{1}{\sqrt{2^5}}} = \frac{4\sqrt{2}(4\sqrt{2}-3)}{4} = \frac{32-12\sqrt{2}}{4} = 8-3\sqrt{2}$$

$$7.4. x = 2^{\frac{1}{2}} \text{ e } y = 2^{-1}$$

$$\frac{2 \times 2^{\frac{1}{2}} - 3 \times (2^{-1})^2}{2^{\frac{1}{2}} \times (2^{-1})^2} = \frac{2^{\frac{1}{2}} - 3 \times 2^{-2}}{2^{\frac{1}{2}} \times 2^{-2}} = \frac{2^{\frac{1}{2}} - \frac{3}{4}}{2^{-\frac{3}{2}}} = \frac{\frac{8\sqrt{2}-3}{4}}{\frac{1}{\sqrt{2^3}}} = \frac{2\sqrt{2}(8\sqrt{2}-3)}{4} = \frac{32-6\sqrt{2}}{4} = 8-\frac{3}{2}\sqrt{2}$$

$$8. \begin{cases} 5x - y = 23 \\ 3\sqrt{2}x + 4\sqrt{2}y = 46 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 5x - 23 \\ 3\sqrt{2}x + 4\sqrt{2}(5x - 23) = 46 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 5x - 23 \\ 3\sqrt{2}x + 20\sqrt{2}x - 92\sqrt{2} = 46 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 5x - 23 \\ 23\sqrt{2}x - 92\sqrt{2} = 46 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \sqrt{2}x - 4\sqrt{2} = 2 \\ \sqrt{2}x = 2 + 4\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2+4\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \\ x = \frac{2+4\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2\sqrt{2}+8}{2} \\ x = \frac{2\sqrt{2}+8}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} y = 5\sqrt{2} + 20 - 23 \\ x = 4 + \sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -3 + 5\sqrt{2} \\ x = 4 + \sqrt{2} \end{cases}$$

9.

$$9.1. A_{[ABC]} = \frac{\overline{AB} \times \overline{BC}}{2} = \frac{(2\sqrt{3} + \sqrt{2}) \times (2\sqrt{3} - \sqrt{2})}{2} = \frac{(2\sqrt{3})^2 - (\sqrt{2})^2}{2} = \frac{12 - 2}{2} = 5 \text{ cm}^2$$

$$9.2. \overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 \Leftrightarrow \overline{AC}^2 = (2\sqrt{3} + \sqrt{2})^2 + (2\sqrt{3} - \sqrt{2})^2$$

$$\Leftrightarrow \overline{AC}^2 = (2\sqrt{3})^2 + 2 \times 2\sqrt{3} \times \sqrt{2} + (\sqrt{2})^2 - 2 \times 2\sqrt{3} \times \sqrt{2} + (\sqrt{2})^2$$

$$\Leftrightarrow \overline{AC}^2 = 12 + 2 + 12 + 2 \Leftrightarrow \overline{AC}^2 = 28$$

$$\text{Logo, } \overline{AC} = \sqrt{28} = 2\sqrt{7} \text{ cm.}$$

$$9.3. P_{[ABC]} = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{AC} = 2\sqrt{3} + \sqrt{2} + 2\sqrt{3} - \sqrt{2} + 2\sqrt{7} = (4\sqrt{3} + 2\sqrt{7}) \text{ cm}$$

10. $a; \quad b = 2a; \quad c = 3b = 6a$

Seja d a diagonal da base do paralelepípedo. $d^2 = a^2 + b^2 = a^2 + (2a)^2 = a^2 + 4a^2 = 5a^2$

Seja D a diagonal espacial do paralelepípedo. $D^2 = d^2 + c^2 = 5a^2 + (6a)^2 = 5a^2 + 36a^2 = 41a^2$

Então, $D^2 = 41a^2 \Leftrightarrow 205 = 41a^2 \Leftrightarrow a^2 = 5$. Logo, $a = \sqrt{5}$ cm, $b = 2\sqrt{5}$ cm e $c = 6\sqrt{5}$ cm.

11. Seja a a altura do triângulo da base do prisma.

$$3^2 = a^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 \Leftrightarrow 9 = a^2 + \frac{9}{4} \Leftrightarrow a^2 = 9 - \frac{9}{4} \Leftrightarrow a^2 = \frac{27}{4}$$

Logo, $a = \sqrt{\frac{27}{4}} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$. Seja h a altura do prisma $h = (2 \times 3)^2 = 6^2 = 36$.

$$\text{Assim, } V = A_b \times h = \frac{3 \times \frac{3\sqrt{3}}{2}}{2} \times 36 = \frac{9\sqrt{3}}{4} \times 36 = 81\sqrt{3} = 3^4 \times 3^{\frac{1}{2}} = 3^{\frac{9}{2}} \text{ cm}^3.$$

12. $A(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x - 1 \quad B(x) = x^3 - 2x + 5 \quad C(x) = x^4 - \frac{1}{4}$

12.1. $A(x) + B(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x - 1 + x^3 - 2x + 5 = x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 4$

12.2. $B(x) - C(x) = x^3 - 2x + 5 - \left(x^4 - \frac{1}{4}\right) = x^3 - 2x + 5 - x^4 + \frac{1}{4} = -x^4 + x^3 - 2x + \frac{21}{4}$

12.3. $A(x) - B(x) - C(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x - 1 - (x^3 - 2x + 5) - \left(x^4 - \frac{1}{4}\right)$
 $= \frac{1}{2}x^2 + 2x - 1 + x^3 + 2x - 5 - x^4 + \frac{1}{4}$
 $= -x^4 - x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 4x - \frac{23}{4}$

12.4. $A(x) \times B(x) = \left(\frac{1}{2}x^2 + 2x - 1\right) \times (x^3 - 2x + 5)$
 $= \frac{1}{2}x^5 - x^3 + \frac{5}{2}x^2 + 2x^4 - 4x^2 + 10x - x^3 + 2x - 5$
 $= \frac{1}{2}x^5 + 2x^4 - 2x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 12x - 5$

12.5. $B(x) \times C(x) - A(x) = (x^3 - 2x + 5) \times \left(x^4 - \frac{1}{4}\right) - \left(\frac{1}{2}x^2 + 2x - 1\right)$
 $= x^7 - \frac{1}{4}x^3 - 2x^5 + \frac{1}{2}x + 5x^4 - \frac{5}{4} - \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1$
 $= x^7 - 2x^5 + 5x^4 - \frac{1}{4}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x - \frac{1}{4}$

13.

13.1. $A(x) = 2x^2 - 2x - 1 \quad B(x) = x + 1$

$$\begin{array}{r} 2x^2 \qquad -2x \qquad -1 \mid x+1 \\ -2x^2 \qquad -2x \qquad \qquad \mid 2x-4 \\ \hline \qquad -4x \qquad -1 \qquad \qquad \mid \\ \qquad \qquad 4x \qquad +4 \qquad \qquad \mid \\ \hline \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \mid 3 \end{array}$$

$Q(x) = 2x - 4 \quad R = 3$

13.2. $A(x) = 4x^2 + 2x + 7$ $B(x) = 2x + 1$

$$\begin{array}{r} 4x^2 \qquad +2x \qquad +7 \quad \Big| \frac{2x+1}{2x} \\ -4x^2 \qquad -2x \qquad \qquad \qquad \\ \hline 7 \end{array}$$

$Q(x) = 2x$ $R = 7$

13.3. $A(x) = 2x^3 + 4x^2 - x - 4$ $B(x) = x + 1$

$$\begin{array}{r} 2x^3 \qquad +4x^2 \qquad -x \qquad -4 \quad \Big| \frac{x+1}{2x^2+2x-3} \\ -2x^3 \qquad -2x^2 \qquad \qquad \qquad \\ \hline 2x^2 \qquad -x \qquad -4 \\ -2x^2 \qquad -2x \qquad \qquad \qquad \\ \hline -3x \qquad -4 \\ 3x \qquad +3 \\ \hline -1 \end{array}$$

$Q(x) = 2x^2 + 2x - 3$ $R = -1$

13.4. $A(x) = 4x^3 - 13x + 13$ $B(x) = 2x - 1$

$$\begin{array}{r} 4x^3 \qquad +0x^2 \qquad -13x \qquad +13 \quad \Big| \frac{2x-1}{2x^2+x-6} \\ -4x^3 \qquad +2x^2 \qquad \qquad \qquad \\ \hline 2x^2 \qquad -13x \qquad +13 \\ -2x^2 \qquad +x \qquad \qquad \qquad \\ \hline -12x \qquad +13 \\ 12x \qquad -6 \\ \hline 7 \end{array}$$

$Q(x) = 2x^2 + x - 6$ $R = 7$

13.5. $A(x) = 3x^3 + 3x^2 + 3x - 14$; $B(x) = x^2 + 2x + 3$

$$\begin{array}{r} 3x^3 \qquad +3x^2 \qquad +3x \qquad -14 \quad \Big| \frac{x^2+2x+3}{3x-3} \\ -3x^3 \qquad -6x^2 \qquad -9x \qquad \qquad \\ \hline -3x^2 \qquad -6x \qquad -14 \\ 3x^2 \qquad +6x \qquad +9 \\ \hline -5 \end{array}$$

$Q(x) = 3x - 3$ $R = -5$

13.6. $A(x) = 2x^4 - 8x^3 + 4x^2 + 11x - 6$; $B(x) = (x-1)^2 = x^2 - 2x + 1$

$$\begin{array}{r} 2x^4 \qquad -8x^3 \qquad +4x^2 \qquad +11x \qquad -6 \quad \Big| \frac{x^2-2x+1}{2x^2-4x-6} \\ -2x^4 \qquad +4x^3 \qquad -2x^2 \qquad \qquad \qquad \\ \hline -4x^3 \qquad +2x^2 \qquad +11x \qquad -6 \\ 4x^3 \qquad -8x^2 \qquad +4x \qquad \qquad \qquad \\ \hline -6x^2 \qquad +15x \qquad -6 \\ 6x^2 \qquad -12x \qquad +6 \\ \hline 3x \end{array}$$

$Q(x) = 2x^2 - 4x - 6$ $R(x) = 3x$

13.7. $A(x) = 2x^4 - 10x^3 + 2x + 9$; $B(x) = x^2 - 4$

$$\begin{array}{r} 2x^4 \qquad -10x^3 \qquad +0x^2 \qquad +2x \qquad +9 \quad \Big| \frac{x^2-4}{2x^2-10x+8} \\ -2x^4 \qquad \qquad +8x^2 \qquad \qquad \qquad \\ \hline -10x^3 \qquad +8x^2 \qquad +2x \qquad +9 \\ +10x^3 \qquad \qquad -40x \qquad \qquad \qquad \\ \hline 8x^2 \qquad -38x \qquad +9 \\ -8x^2 \qquad \qquad +32 \\ \hline -38x \qquad +41 \end{array}$$

$Q(x) = 2x^2 - 10x + 8$ $R(x) = -38x + 41$

14.

14.1. $A(x) = x^2 + 3x + 3$ $B(x) = x + 2$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 3 & 3 & \\ -2 & & -2 & -2 & \\ \hline & 1 & 1 & 1 & \end{array}$$

$Q(x) = x + 1$ $R = 1$

Cálculo auxiliar

$x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$

14.2. $A(x) = x^3 - 7x + 9$ $B(x) = x - 2$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & -7 & 9 \\ 2 & & 2 & 4 & -6 \\ \hline & 1 & 2 & -3 & 3 \end{array}$$

$Q(x) = x^2 + 2x - 3$ $R = 3$

Cálculo auxiliar

$x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$

14.3. $A(x) = 2x^3 + x^2 - 2x$ $B(x) = x + \frac{1}{2}$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & 1 & -2 & 0 \\ -\frac{1}{2} & & -1 & 0 & 1 \\ \hline & 2 & 0 & -2 & 1 \end{array}$$

$Q(x) = x^2 - 2$ $R = 1$

Cálculo auxiliar

$x + \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$

14.4. $A(x) = 4x^3 + 22x^2 + 8x + 10$ $B(x) = x + 5$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 4 & 22 & 8 & 10 \\ -5 & & -20 & -10 & 10 \\ \hline & 4 & 2 & -2 & 20 \end{array}$$

$Q(x) = 4x^2 + 2x - 2$ $R = 20$

Cálculo auxiliar

$x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = -5$

14.5. $A(x) = 2x^4 + \frac{7}{3}x^3 - 4x^2 - x + \frac{2}{3}$ $B(x) = 2x + 1$

$$\begin{array}{r|rrrrrr} & 2 & \frac{7}{3} & -4 & -1 & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{2} & & -1 & -\frac{2}{3} & \frac{7}{3} & -\frac{2}{3} \\ \hline & 2 & \frac{4}{3} & -\frac{14}{3} & \frac{4}{3} & 0 \end{array}$$

$Q(x) = \left(2x^3 + \frac{4}{3}x^2 - \frac{14}{3}x + \frac{4}{3}\right) \div 2 = x^3 + \frac{2}{3}x^2 - \frac{7}{3}x + \frac{2}{3}$ $R = 0$

Cálculo auxiliar

$2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$

14.6. $A(x) = 3x^4 - x^3 + 3x + 1$ $B(x) = 3x - 1$

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 3 & -1 & 0 & 3 & 1 \\ \frac{1}{3} & & 1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline & 3 & 0 & 0 & 3 & 2 \end{array}$$

$Q(x) = (3x^3 + 3) \div 2 = x^3 + 1$ $R = 2$

Cálculo auxiliar $3x - 1 =$

$0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$

15.

15.1. $(ax + b)(x - 3) = 4x^2 - 11x - 3 \Leftrightarrow ax + b = (4x^2 - 11x - 3) \div (x - 3)$

$$\begin{array}{r|rrr} & 4 & -11 & -3 \\ 3 & & 12 & 3 \\ \hline & 4 & 1 & 0 \end{array}$$

Logo $ax + b = 4x + 1$.

Cálculo auxiliar $x - 3 =$

$0 \Leftrightarrow x = 3$

15.2. $(ax + b)(3x - 2) = 6x^2 - x - 2 \Leftrightarrow ax + b = (6x^2 - x - 2) \div (3x - 2)$

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 6 & -1 & -2 & \\ \hline 3 & 6 & 3 & 0 & \end{array}$$

Logo $ax + b = (6x + 3) \div 3 = 2x + 1$.

Cálculo auxiliar

$$3x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$$

15.3. $(ax + b)(x^2 - 1) = x^3 + 2x^2 - x - 2 \Leftrightarrow ax + b = (x^3 + 2x^2 - x - 2) \div (x^2 - 1)$

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 2 & -1 & -2 \\ \hline & 1 & 3 & +2 & 0 \\ -1 & & -1 & -2 & \\ \hline & 1 & 2 & 0 & \end{array}$$

Logo $ax + b = x + 2$.

Cálculo auxiliar

$$x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = -1$$

15.4. $(ax + b)(x^2 + 4) = 2x^3 - 3x^2 + 8x - 1 \Leftrightarrow ax + b = (2x^3 - 3x^2 + 8x - 12) \div (x^2 + 4)$

$$\begin{array}{r} 2x^3 + 3x^2 + 8x - 12 \quad | \quad x^2 + 4 \\ -2x^3 - 8x 2x - 3 \\ \hline -3x^2 + 0x - 12 \\ 3x^2 + 12 \\ \hline 0 \end{array}$$

Logo, $ax + b = 2x - 3$.

Cálculo auxiliar

$$x^2 + 4 = 0$$

Equação impossível em \mathbb{R} .

15.5. $(ax + b)(2x^2 - 3x + 4) = 4x^3 - x + 1 \Leftrightarrow ax + b = (4x^3 - x + 12) \div (2x^2 - 3x + 4)$

$$\begin{array}{r} 4x^3 + 0x^2 - x + 12 \quad | \quad 2x^2 - 3x + 4 \\ -4x^3 + 6x^2 - 8x 2x + 3 \\ \hline 6x^2 - 9x + 12 \\ -6x^2 + 9x - 12 \\ \hline 0 \end{array}$$

Logo, $ax + b = 2x + 3$.

Cálculo auxiliar

$$2x^2 - 3x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 32}}{4}$$

Equação impossível em \mathbb{R} .

16.

16.1. $A(x) = 2x^2 - 2x - 1$ e $B(x) = x - 1$

$$A(1) = 2 \times 1^2 - 2 \times 1 - 1 = 2 - 2 - 1 = -1$$

16.2. $A(x) = 2x^3 + 4x^2 - x - 4$ e $B(x) = x + 2$

$$\begin{aligned} A(-2) &= 2 \times (-2)^3 + 4 \times (-2)^2 - (-2) - 4 \\ &= -16 + 16 + 2 - 4 = -2 \end{aligned}$$

16.3. $A(x) = x^2 + 3x + 3$ e $B(x) = x$

$$A(0) = 0^2 + 3 \times 0 + 3 = 3$$

Cálculo auxiliar

$$x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

Cálculo auxiliar

$$x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$$

Cálculo auxiliar

$$x = 0$$

16.4. $A(x) = 4x^3 + 22x^2 + 8x + 10$ e $B(x) = x + \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} A\left(-\frac{1}{2}\right) &= 4 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^3 + 22 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 8 \times \left(-\frac{1}{2}\right) + 10 \\ &= -\frac{1}{2} + \frac{11}{2} - 4 + 10 = 11 \end{aligned}$$

Cálculo auxiliar

$$x + \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$$

16.5. $A(x) = 2x^4 + \frac{7}{3}x^3 - 4x^2 - x + \frac{2}{3}$ e $B(x) = 2x + 1$

$$\begin{aligned} A\left(-\frac{1}{2}\right) &= 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^4 + \frac{7}{3} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^3 - 4 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - \left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{2}{3} \\ &= \frac{1}{8} - \frac{7}{24} - 1 + \frac{1}{2} + \frac{2}{3} = 0 \end{aligned}$$

Cálculo auxiliar

$$2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$$

17.

$$17.1. \quad x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \vee x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \vee x = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \vee x = \frac{5 \pm 1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \vee x = 2 \vee x = 3$$

$$\text{C.S.} = \{1, 2, 3\}$$

$$17.2. \quad 4x^3 + 8x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2 \vee 4x^2 - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -2 \vee x^2 = \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow x = -2 \vee x = \frac{1}{2} \vee x = -\frac{1}{2}$$

$$\text{C.S.} = \left\{-2, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}$$

$$17.3. \quad x^4 + 2x^3 - 13x^2 - 14x + 24 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -4 \vee x = 1 \vee x^2 - x - 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -4 \vee x = 1 \vee x = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = -4 \vee x = 1 \vee x = \frac{1 \pm 5}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = -4 \vee x = 1 \vee x = -2 \vee x = 3$$

$$\text{C.S.} = \{-4, -2, 1, 3\}$$

$$17.4. \quad 6x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -1 \vee x = 1 \vee 6x^2 - x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -1 \vee x = 1 \vee x = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{12}$$

$$\Leftrightarrow x = -1 \vee x = 1 \vee x = \frac{1 \pm 5}{12}$$

$$\Leftrightarrow x = -1 \vee x = 1 \vee x = -\frac{1}{3} \vee x = \frac{1}{2}$$

$$\text{C.S.} = \left\{-1, 1, -\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right\}$$

$$17.5. \quad x^4 + \frac{13}{2}x^3 + \frac{23}{2}x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{9}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -3 \vee x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -3 \vee 2x^2 + x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -3 \vee x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4}$$

$$\Leftrightarrow x = -3 \vee x = \frac{-1 \pm 3}{4}$$

$$\Leftrightarrow x = -3 \vee x = -1 \vee x = \frac{1}{2}$$

$$\text{C.S.} = \left\{-3, -1, \frac{1}{2}\right\}$$

Cálculo auxiliar

| | | | | |
|---|---|----|----|----|
| | 1 | -6 | 11 | -6 |
| 1 | | 1 | -5 | 6 |
| | 1 | -5 | 6 | 0 |

Cálculos auxiliares

$$x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$$

| | | | | |
|----|---|----|----|----|
| | 4 | 8 | -1 | -2 |
| -2 | | -8 | 0 | 2 |
| | 4 | 0 | -1 | 0 |

Cálculo auxiliar

| | | | | | |
|----|---|----|-----|-----|-----|
| -4 | 1 | 2 | -13 | -14 | 24 |
| | | -4 | 8 | 20 | -24 |
| | 1 | -2 | -5 | 6 | 0 |
| 1 | | 1 | -1 | -6 | |
| | 1 | -1 | -6 | 0 | |

Cálculo auxiliar

| | | | | | |
|----|---|----|----|----|----|
| | 6 | -1 | -7 | 1 | 1 |
| 1 | | 6 | 5 | -2 | -1 |
| | 6 | 5 | -2 | -1 | 0 |
| -1 | | -6 | 1 | 1 | |
| | 6 | -1 | -1 | 0 | |

Cálculo auxiliar

| | | | | | |
|----|---|----------------|-----------------|----------------|----------------|
| | 1 | $\frac{13}{2}$ | $\frac{23}{2}$ | $\frac{3}{2}$ | $-\frac{9}{2}$ |
| -3 | | -3 | $-\frac{21}{2}$ | -3 | $\frac{9}{2}$ |
| | 1 | $\frac{7}{2}$ | 1 | $-\frac{3}{2}$ | 0 |
| -3 | | -3 | $-\frac{3}{2}$ | $\frac{3}{2}$ | |
| | 1 | $\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ | 0 | |

$$17.6. \quad x^4 - 18x^2 + 81 = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 9)^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow (x - 3)(x + 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 3 \vee x = -3$$

$$\text{C.S.} = \{-3, 3\}$$

$$17.7. \quad x^4 - 12x^2 + 32 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 108}}{2} \Leftrightarrow x^2 = 8 \vee x^2 = 4$$

$$\Leftrightarrow x = 2\sqrt{2} \vee x = -2\sqrt{2} \vee x = 2 \vee x = -2$$

$$\text{C.S.} = \{-2\sqrt{2}, -2, 2, 2\sqrt{2}\}$$

$$17.8. \quad x^6 - 14x^4 + 49x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2(x^4 - 14x^2 + 49) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0 \vee (x^2 - 7)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x^2 - 7 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = \sqrt{7} \vee x = -\sqrt{7}$$

$$\text{C.S.} = \{-\sqrt{7}, 0, \sqrt{7}\}$$

18.

$$18.1. \quad x^3 > -5x^2 - 6x \Leftrightarrow x^3 + 5x^2 + 6x > 0 \Leftrightarrow x(x^2 + 5x + 6) > 0 \Leftrightarrow x(x + 2)(x + 3) > 0$$

Cálculo auxiliar

$$x^2 + 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{-5 \pm 1}{2} \Leftrightarrow x = -2 \vee x = -3$$

| x | $-\infty$ | -3 | | -2 | | 0 | $+\infty$ |
|---------|-----------|------|---|------|---|-----|-----------|
| x | — | — | — | — | — | 0 | + |
| $x + 2$ | — | — | — | 0 | + | + | + |
| $x + 3$ | — | 0 | + | + | + | + | + |
| P | — | 0 | + | 0 | — | 0 | + |

$$\text{C.S.} =]-3, -2[\cup]0, +\infty[$$

$$18.2. \quad 2x^2 \geq x^4 + x^3 \Leftrightarrow -x^4 - x^3 + 2x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2(-x^2 - x + 2) \geq 0 \Leftrightarrow -x^2(x + 2)(x - 3) \geq 0$$

Cálculo auxiliar

$$-x^2 - x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm 3}{2} \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 1$$

| x | $-\infty$ | -2 | | 0 | | 1 | $+\infty$ |
|---------|-----------|------|---|-----|---|-----|-----------|
| $-x^2$ | — | — | — | 0 | — | — | — |
| $x + 2$ | — | 0 | + | + | + | + | + |
| $x - 1$ | — | — | — | — | — | 0 | + |
| P | — | 0 | + | 0 | + | 0 | — |

$$\text{C.S.} = [-2, 1]$$

$$18.3. \quad x^3 + 2x^2 - x - 2 > 0 \Leftrightarrow (x + 2)(x^2 - 1) > 0 \Leftrightarrow (x + 2)(x - 1)(x + 1) > 0$$

Cálculos auxiliares

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & -1 & -2 \\ -2 & & -2 & 0 & 2 \\ \hline & 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}$$

$$x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x + 1) = 0$$

| x | $-\infty$ | -2 | | -1 | | 1 | $+\infty$ |
|---------|-----------|------|---|------|---|-----|-----------|
| $x + 2$ | — | 0 | + | + | + | + | + |
| $x - 1$ | — | — | — | — | — | 0 | + |
| $x + 1$ | — | — | — | 0 | + | + | + |
| P | — | 0 | + | 0 | — | 0 | + |

$$\text{C.S.} =]-2, -1[\cup]1, +\infty[$$

18.4. $x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 11x - 6 \geq 0 \Leftrightarrow (x-1)^2(x-3)(x+2) \geq 0$

| Cálculos auxiliares | | | | | |
|---------------------|---|----|----|----|----|
| 1 | 1 | -3 | -3 | 11 | -6 |
| | | 1 | -2 | -5 | 6 |
| 1 | 1 | -2 | -5 | 6 | 0 |
| | | 1 | -1 | -6 | |
| | 1 | -1 | -6 | 0 | |

$x^2 - x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm 5}{2} \Leftrightarrow x = 3 \vee x = -2$

| | | | | | | | |
|-----------|-----------|------|---|-----|---|-----|-----------|
| x | $-\infty$ | -2 | | 1 | | 3 | $+\infty$ |
| $(x-1)^2$ | + | + | + | 0 | + | + | + |
| $x-3$ | - | - | - | - | - | 0 | + |
| $x+2$ | - | 0 | + | + | + | + | + |
| P | - | 0 | + | 0 | - | 0 | + |

C.S. = $]-\infty, -2] \cup \{1\} \cup [3, +\infty[$

18.5. $2x^4 - 5x^3 - 4x^2 + 15x - 6 \leq 0 \Leftrightarrow 2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x-2)(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3}) \leq 0$

| Cálculos auxiliares | | | | | |
|---------------------|---|----|----|-----|----|
| $\frac{1}{2}$ | 2 | -5 | -4 | 15 | -6 |
| | | 1 | -2 | -3 | 6 |
| $\frac{1}{2}$ | 2 | -4 | -6 | 12 | 0 |
| | | 4 | 0 | -12 | |
| 2 | 2 | 0 | -6 | 0 | |

$2x^2 - 6 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 3 \Leftrightarrow x = \sqrt{3} \vee x = -\sqrt{3}$

| | | | | | | | | | |
|---------------------------------|-----------|-------------|---|---------------|---|------------|---|-----|-----------|
| x | $-\infty$ | $-\sqrt{3}$ | | $\frac{1}{2}$ | | $\sqrt{3}$ | | 2 | $+\infty$ |
| $2\left(x - \frac{1}{2}\right)$ | - | - | - | 0 | + | + | + | + | + |
| $x-2$ | - | - | - | - | - | - | - | 0 | + |
| $x-\sqrt{3}$ | - | - | - | - | - | 0 | + | + | + |
| $x+\sqrt{3}$ | - | 0 | + | + | + | + | + | + | + |
| P | + | 0 | - | 0 | + | 0 | - | 0 | + |

C.S. = $[-\sqrt{3}, \frac{1}{2}] \cup [\sqrt{3}, 2]$

18.6. $-x^4 + x^3 + 18x^2 - 16x - 32 > 0 \Leftrightarrow -(x+1)(x-2)(x-4)(x+4) > 0$

| Cálculos auxiliares | | | | | |
|---------------------|---|----|----|-----|----|
| $\frac{1}{2}$ | 2 | -5 | -4 | 15 | -6 |
| | | 1 | -2 | -3 | 6 |
| $\frac{1}{2}$ | 2 | -4 | -6 | 12 | 0 |
| | | 4 | 0 | -12 | |
| 2 | 2 | 0 | -6 | 0 | |

$2x^2 - 6 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 3 \Leftrightarrow x = \sqrt{3} \vee x = -\sqrt{3}$

| | | | | | | | | | |
|----------|-----------|------|---|------|---|-----|---|-----|-----------|
| x | $-\infty$ | -4 | | -1 | | 2 | | 4 | $+\infty$ |
| $-(x+1)$ | + | + | + | 0 | - | - | - | - | - |
| $x-2$ | - | - | - | - | - | 0 | + | + | + |
| $x-4$ | - | - | - | - | - | - | - | 0 | + |
| $x+4$ | - | 0 | + | + | + | + | + | + | + |
| P | - | 0 | + | 0 | - | 0 | + | 0 | - |

C.S. = $]-4, -1[\cup]2, 4[$

19. $A(x) = (x - x_1)^2(x - x_2)^3(x - x_3)^k$

Como $A(x)$ é um polinômio de grau 7, então $2 + 3 + k = 7 \Leftrightarrow k = 2$.

Logo, x_3 tem multiplicidade 2.

20.

20.1. $P(1) = 1 - 6 + 2 + 20 - 27 + 10 = 0$. Logo, pelo Teorema do Resto, 1 é raiz de $P(x)$.

20.2.

| | | | | | | |
|---|---|----|-----|-----|-----|-----|
| | 1 | -6 | 2 | 20 | -27 | 10 |
| 1 | | 1 | -5 | -3 | 17 | -10 |
| | 1 | -5 | -3 | 17 | -10 | 0 |
| 1 | | 1 | -4 | -7 | 10 | |
| | 1 | -4 | -7 | 10 | 0 | |
| 1 | | 1 | -3 | -10 | | |
| | 1 | -3 | -10 | 0 | | |
| 1 | | 1 | -2 | | | |
| | 1 | -2 | -12 | | | |

A multiplicidade da raiz 1 é 3.

20.3. $P(x) = (x - 1)^3(x^2 - 3x - 10) = (x - 1)^3(x - 5)(x + 2)$

Cálculo auxiliar

$$x^2 - 3x - 10 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 40}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{3 \pm 7}{2} \Leftrightarrow x = 5 \vee x = -2$$

20.4. $P(x) > 0 \Leftrightarrow (x - 1)^3(x - 5)(x + 2) > 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2(x - 1)(x - 5)(x + 2) > 0$

| x | $-\infty$ | -2 | | 1 | | 5 | $+\infty$ |
|-------------|-----------|------|---|-----|---|-----|-----------|
| $(x - 1)^2$ | + | + | + | 0 | + | + | + |
| $x - 1$ | - | - | - | 0 | + | + | + |
| $x - 5$ | - | - | - | - | - | 0 | + |
| $x + 2$ | - | 0 | + | + | + | + | + |
| P | - | 0 | + | 0 | - | 0 | + |

C.S. = $] -2, 1[\cup] 5, +\infty[$

21.

21.1. $P(x) = a(x - 2)(x - 1)$

$$P(-1) = 6 \Leftrightarrow a \times (-3) \times (-2) = 6 \Leftrightarrow 6a = 6 \Leftrightarrow a = 1$$

Logo, $P(x) = (x - 2)(x - 1) = x^2 - 3x + 2$.

21.2. $P(x) = a(x + 1)(x - 1)(x - 2)$

$$P(0) = -4 \Leftrightarrow a \times 1 \times (-1) \times (-2) = -4 \Leftrightarrow 2a = -4 \Leftrightarrow a = -2$$

$$\begin{aligned} \text{Logo: } P(x) &= -2(x + 1)(x - 1)(x - 2) = -2(x^2 - 1)(x - 2) \\ &= -2(x^3 - 2x^2 - x + 2) \\ &= -2x^3 + 4x^2 + 2x - 4 \end{aligned}$$

21.3. $P(x) = a(x - 1)^2(x + 2)$

$$P(0) = -2 \Leftrightarrow a \times (-1)^2 \times 2 = -2 \Leftrightarrow 2a = -2 \Leftrightarrow a = -1$$

$$\begin{aligned} \text{Logo: } P(x) &= -(x - 1)^2(x + 2) = -(x^2 - 2x + 1)(x + 2) \\ &= -(x^3 + 2x^2 - 2x^2 - 4x + x + 2) = -x^3 + 3x - 2 \end{aligned}$$

21.4. $P(x) = a(x^2 - 1)(x^2 - 4)$

$$P(-3) = 40 \Leftrightarrow a(9 - 1)(9 - 4) = 40 \Leftrightarrow 40a = 40 \Leftrightarrow a = 1$$

Logo, $P(x) = (x^2 - 1)(x^2 - 4) = x^4 - 4x^2 - x^2 + 4 = x^4 - 5x^2 + 4$.

22.

$$22.1. P(-1) = 4 \Leftrightarrow (-1)^4 + a(-1) + 1 = 4 \Leftrightarrow -1 - a + 1 = 4 \Leftrightarrow -a = 4 \Leftrightarrow a = -4$$

$$22.2. P(2) = 0 \Leftrightarrow 2^3 + 2a + 1 = 0 \Leftrightarrow 8 + 2a + 1 = 0 \Leftrightarrow 2a = -9 \Leftrightarrow a = -\frac{9}{2}$$

Cálculo auxiliar

$$x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

$$22.3. P(-2) = 2P(1) \Leftrightarrow 2 \times (-8) + 4a + 12 + 1 = 2(2 + a - 6 + 1)$$

$$\Leftrightarrow -16 + 4a + 13 = 4 + 2a - 12 + 2$$

$$\Leftrightarrow -3 + 4a = 2a - 6$$

$$\Leftrightarrow 2a = -3$$

$$\Leftrightarrow a = -\frac{3}{2}$$

Cálculos auxiliares

$$x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$$

$$x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

$$22.4. P(-1) = P(3) \Leftrightarrow 3 \times (-1) - 6 \times 1 + a \times (-1) = 3 \times 27 - 6 \times 9 + 3a - 1$$

$$\Leftrightarrow -3 - 6 - a = 81 - 54 + 3$$

$$\Leftrightarrow -4a = 3$$

$$\Leftrightarrow a = -9$$

Cálculos auxiliares

$$x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$$

$$x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 3$$

23.

$$23.1. \begin{cases} P(-2) = 0 \\ P(2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \times (-8) + 4a - 2b - 40 = 0 \\ -2 \times 8 + 4a + 2b - 40 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 16 + 4a - 2b - 40 = 0 \\ -16 + 4a + 2b - 40 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a = 2b + 24 \\ -16 + 2b + 24 + 2b - 40 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a = b + 12 \\ 4b = 32 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a = 8 + 12 \\ b = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 10 \\ b = 8 \end{cases}$$

Cálculo auxiliar

$$x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \vee x = -2$$

$$23.2. \begin{cases} P(1) = 1 \\ P(2) = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 2 + a + b = 1 \\ 8 - 8 + 2a + b = -3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 2 \\ 2a + b = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2 - a \\ 2a + 2 - a = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 7 \\ a = -5 \end{cases}$$

Cálculos auxiliares

$$x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

$$x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

$$23.3. \begin{cases} P(2) = 23 \\ P(-1) = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8 + 4a + 2b + 5 = 23 \\ -1 + a - b + 5 = 11 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4a + 2b = 10 \\ a - b = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + b = 5 \\ a - b = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 5 - 2a \\ a - 5 + 2a = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -3 \\ a = 4 \end{cases}$$

Cálculos auxiliares

$$x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$$

$$x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

23.4.

$$\begin{array}{rrrr|l} x^3 & +ax^2 & -2x & +b & x^2 + x + 1 \\ -x^3 & -x^2 & -x & & x + (a-1) \\ \hline & (a-1)x^2 & -3x & +b & \\ & -(a-1)x^2 & +(-a+1)x & -a+1 & \\ \hline & & (-a-2)x & -a+b+1 & \end{array}$$

$$Q(x) = x + a - 1 \quad R(x) = (-a-2)x - a + b + 1 = x + 6$$

$$\text{Logo: } \begin{cases} -a-2 = 1 \\ -a+b+1 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -3 \\ 3+b+1 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = 2 \end{cases}$$

23.5.

$$\begin{array}{rrrr|l} x^3 & +ax^2 & +0x & +b & x^2 - 1 \\ -x^3 & & +x & & x + a \\ \hline & +ax^2 & +x & +b & \\ & -ax^2 & & +a & \\ \hline & & +x & +a+b & \end{array}$$

$$Q(x) = x + a = x + 2 \quad R(x) = x + a + b = x + 1$$

$$\text{Logo: } \begin{cases} a+b = 1 \\ a = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -1 \\ a = 2 \end{cases}$$

24.

$$\begin{array}{c|ccccccc} & 1 & -1 & -6 & 12 & -13 & 13 & -6 \\ 1 & & 1 & 0 & -6 & 6 & -7 & 6 \\ \hline 1 & 1 & 0 & -6 & 6 & -7 & 6 & 0 \\ & & 1 & 1 & -5 & 1 & -6 & \\ \hline 1 & 1 & 1 & -5 & 1 & -6 & & 0 \\ & & 1 & 2 & -3 & -2 & & \\ \hline & 1 & 2 & -3 & -2 & -8 & & \end{array}$$

Logo, $m = 2$.

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 1 & -5 & 1 & -6 \\ 2 & & 2 & 6 & 2 & 6 \\ \hline 2 & 1 & 3 & 1 & 3 & 0 \\ & & 2 & 10 & 22 & \\ \hline & 1 & 5 & 11 & & 25 \end{array}$$

Logo, $n = 1$.

$$\begin{array}{c|ccc} & 1 & 3 & 1 & 3 \\ -3 & & -3 & 0 & -3 \\ \hline -3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ & & -3 & 9 & \\ \hline & 1 & -3 & & 10 \end{array}$$

Logo, $p = 1$. Assim, $B(x) = x^2 + 1$.

25.

25.1. Seja n um número natural qualquer.

$$P(0) = (0 + 2)^n + 2 \times 0^n - 2^n = 2^n + 0 - 2^n = 0$$

Logo, $P(x)$ é divisível por x , para qualquer número natural n .

25.2. Seja n um número natural qualquer.

$$P(1) = 1^{2n+1} - 1^{2n} - 1 + 1 = 1 - 1 + 0 = 0$$

Logo, $P(x)$ é divisível por $x - 1$, para qualquer número natural n .

Cálculo auxiliar

$$x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

$$26. \begin{cases} P(p) = 0 \\ Q(p) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p^2 + pb + c = 0 \\ p^2 + dp + e = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p^2 = -pb - c \\ -pb - c + dp + e = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} p(-b + d) = c - e \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} p = \frac{c - e}{-b + d} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} p = \frac{e - c}{b - d} \end{cases}, \text{ como se queria demonstrar.}$$

Cálculo auxiliar

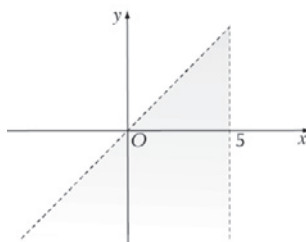
$$x - p = 0 \Leftrightarrow x = p$$

Tema III – Geometria analítica

Páginas 16 a 21

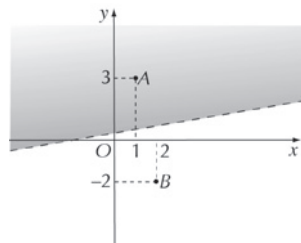
1.

1.1. $x < y \wedge x < 5$

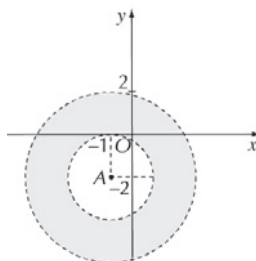


1.2. $P(x, y)$

$$\begin{aligned}\overline{PA} < \overline{PB} &\Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2 + (y-3)^2} < \sqrt{(x-2)^2 + (y+2)^2} \\ &\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 - 6y + 9 < x^2 - 4x + 4 + y^2 + 4x + 4 \\ &\Leftrightarrow -6y - 4y < 2x - 4x + 4 + 4 - 1 - 9 \\ &\Leftrightarrow -10y < -2x - 2 \\ &\Leftrightarrow y > \frac{1}{5}x + \frac{1}{5}\end{aligned}$$

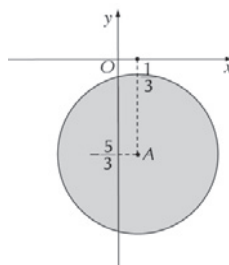


1.3. $4 < (x+1)^2 + (y+2)^2 < 16$



1.4. $P(x, y)$

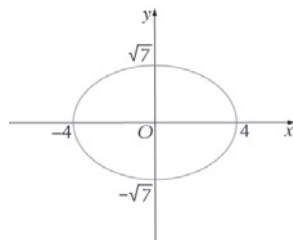
$$\begin{aligned}\overline{PA} \geq 2\overline{PB} &\Leftrightarrow \sqrt{(x+1)^2 + (y-1)^2} \geq 2\sqrt{(x-0)^2 + (y+1)^2} \\ &\Leftrightarrow (x+1)^2 + (y-1)^2 \geq 4(x^2 + (y+1)^2) \\ &\Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 \geq 4(x^2 + y^2 + 2x + 1) \\ &\Leftrightarrow x^2 + 2x + y^2 - 2y + 2 \geq 4x^2 + 4y^2 + 8x + 4 \\ &\Leftrightarrow -3x^2 + 2x - 3y^2 - 10y - 2 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow 3x^2 - 2x + 3y^2 + 10y + 2 \leq 0 \\ &\Leftrightarrow 3\left(x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{9}\right) + 3\left(y^2 + \frac{10}{3}y + \frac{25}{9}\right) \leq -2 + \frac{3}{9} + \frac{75}{9} \\ &\Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + \left(y + \frac{5}{3}\right)^2 \leq \frac{20}{9}\end{aligned}$$



1.5. Elipse de focos $A(-3, 0)$ e $B(3, 0)$ e eixo maior igual a 8. Logo, $2a = 8 \Leftrightarrow a = 4$ e $c = 3$.

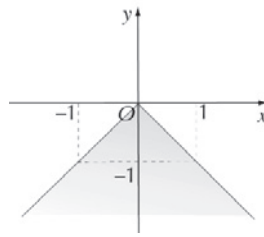
$$b^2 = a^2 - c^2 \Leftrightarrow b^2 = 16 - 9 \Leftrightarrow b^2 = 7$$

$$\text{Assim, } \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1.$$

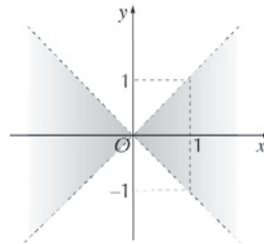


2.

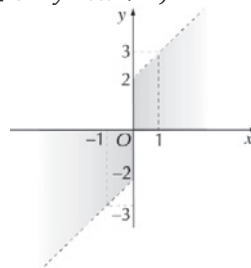
2.1. $x + y \leq 0 \wedge x - y \geq 0$
 $\Leftrightarrow y \leq -x \wedge y \leq x$



2.2. $(y < x \wedge y > -x) \vee (y > x \wedge y < -x)$



2.3. $(x \leq 0 \wedge y \leq 0 \wedge y > x - 2) \vee (x \geq 0 \wedge y \geq 0 \wedge y < x + 2)$

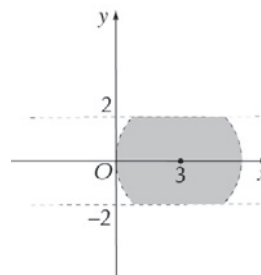


Cálculos auxiliares

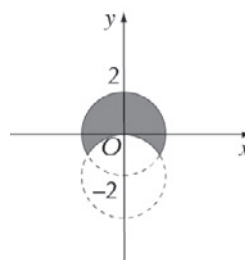
| x | $y = x - 2$ |
|-----|-------------|
| 0 | -2 |
| -1 | -3 |

| x | $y = x + 2$ |
|-----|-------------|
| 0 | 2 |
| 1 | 3 |

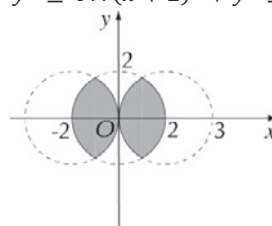
2.4. $(x - 3)^2 + y^2 \leq 9 \wedge -2 < y < 2$



2.5. $x^2 + (y + 2)^2 \geq 4 \wedge x^2 + y^2 \leq 4$



2.6. $(x^2 + y^2 \leq 4 \wedge (x - 2)^2 + y^2 \leq 4) \vee (x^2 + y^2 \leq 4 \wedge (x + 2)^2 + y^2 \leq 4)$



3.

3.1. $x^2 + (y - 1)^2 = 25$

$$C(0, 1); r = \sqrt{25} = 5$$

3.2. $x^2 + y^2 + 4x - 6y = -9 \Leftrightarrow x^2 + 4x + 4 + y^2 - 6y + 9 = -9 + 4 + 9$

$$\Leftrightarrow (x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 4$$

$$C(-2, 3); r = \sqrt{4} = 2$$

3.3. $(x + 2)^2 + (y + 3)^2 = 27$

$$C(-2, -3); r = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$$

3.4. $4x^2 + 4y^2 + 8x - 4y - 7 = 0 \Leftrightarrow 4(x^2 + 2x + 1) + 4(y^2 - y + \frac{1}{4}) = 7 + 4 + 1$

$$\Leftrightarrow 4(x + 1)^2 + 4(y - \frac{1}{2})^2 = 12$$

$$\Leftrightarrow (x + 1)^2 + (y - \frac{1}{2})^2 = 3$$

$$C(-1, \frac{1}{2}); r = \sqrt{3}$$

3.5. $x^2 + y^2 - 2x = 23 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 = 23 + 1 \Leftrightarrow (x - 1)^2 + y^2 = 24$

$$C(1, 0); r = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$$

3.6. $x^2 + y^2 - 2\sqrt{2}x + 2\sqrt{2}y = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2\sqrt{2}x + 2 + y^2 + 2\sqrt{2}y + 2 = 4 \Leftrightarrow (x - \sqrt{2})^2 + (y + \sqrt{2})^2 = 4$

$$C(\sqrt{2}, -\sqrt{2}); r = \sqrt{4} = 2$$

4.

4.1. $-2 \leq x \leq 3 \wedge -4 \leq y \leq 2$

4.2. $-1 < x \leq 2 \wedge y \leq 2$

4.3. $(x \leq 1 \wedge y \leq 1) \vee (x \geq 1 \wedge y \geq 1)$

4.4. Reta que passa em (2, 0) e (0, 2): $m = \frac{0-2}{2-0} = -1$

Logo, a equação desta reta é $y = -x + 2$.

Reta que passa em (-2, 0) e (0, 2): $m = \frac{2-0}{0+2} = 1$

Logo, a equação desta reta é $y = x + 2$.

Reta que passa em (-2, 0) e (0, -2): $m = \frac{0+2}{-2-0} = -1$

Logo, a equação desta reta é $y = -x - 2$.

Reta que passa em (2, 0) e (0, -2): $m = \frac{-2-0}{0-2} = 1$

Logo, a equação desta reta é $y = x - 2$.

Assim, $y \leq -x + 2 \wedge y \geq -x - 2 \wedge y \leq x + 2 \wedge y \geq x - 2$.

4.5. $(x \leq 0 \wedge y \geq 0 \wedge y \leq x + 2) \vee (x \geq 0 \wedge y \leq 0 \wedge y > x - 2)$

4.6. $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 \leq 4 \wedge x < 2 \wedge y < 1$

4.7. $(x + 2)^2 + y^2 \leq 4 \wedge x > -2 \wedge y < x + 2$

4.8. $x^2 + y^2 \leq 9 \wedge (x - 3)^2 + y^2 \leq 1$

4.9. $((x + 2)^2 + (y - 2)^2 \geq 4 \wedge -2 \leq x \leq 0 \wedge 0 \leq y \leq 2) \vee (x \geq 0 \wedge y \leq 0 \wedge y \geq x - 2)$

5.

5.1. $x^2 + y^2 = 49$

Circunferência de centro $(0, 0)$ e raio 7.

5.2. $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 49$

Circunferência de centro $(3, -1)$ e raio 7.

5.3. $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 49 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 = 49 + 1 + 1$

$$\Leftrightarrow (x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 51$$

Circunferência de centro $(1, 1)$ e raio $\sqrt{51}$.

5.4. $4x^2 + 4y^2 + 8x = 49 \Leftrightarrow 4(x^2 + 2x + 1) + 4y^2 = 49 + 4$

$$\Leftrightarrow 4(x + 1)^2 + 4y^2 = 53$$

$$\Leftrightarrow (x + 1)^2 + y^2 = \frac{53}{4}$$

Circunferência de centro $(-1, 0)$ e raio $\frac{\sqrt{53}}{2}$.

5.5. $\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{36} = 1$

$$a = \sqrt{49} = 7 \text{ e } 2a = 14 \quad b = \sqrt{36} = 6 \text{ e } 2b = 12$$

$$c^2 = 49 - 36 = 13 \quad c = \sqrt{13}$$

Logo, trata-se da elipse de eixo maior 14, eixo menor 12 e focos de coordenadas $(-\sqrt{13}, 0)$ e $(\sqrt{13}, 0)$.

5.6. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{49} = 1$

$$a = \sqrt{25} = 5 \text{ e } 2a = 10 \quad b = \sqrt{49} = 7 \text{ e } 2b = 14$$

$$c^2 = 49 - 25 = 24 \quad c = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$$

Logo, trata-se da elipse de eixo maior 14, eixo menor 10 e focos de coordenadas $(0, -2\sqrt{6})$ e $(0, 2\sqrt{6})$.

5.7. $x^2 + 7y^2 = 49 \Leftrightarrow \frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{7} = 1$

$$a = \sqrt{49} = 7 \text{ e } 2a = 14 \quad b = \sqrt{7} \text{ e } 2b = 2\sqrt{7}$$

$$c^2 = 49 - 7 = 42 \quad c = \sqrt{42}$$

Logo, trata-se da elipse de eixo maior 14, eixo menor $2\sqrt{7}$ e focos de coordenadas $(-\sqrt{42}, 0)$ e $(\sqrt{42}, 0)$.

5.8. $7x^2 + 7y^2 = 49 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 7$

Circunferência de centro $(0, 0)$ e raio $\sqrt{7}$.

5.9. $25x^2 + 49y^2 = 1225 \Leftrightarrow \frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{25} = 1$

$$a = \sqrt{49} = 7 \text{ e } 2a = 14 \quad b = \sqrt{25} = 5 \text{ e } 2b = 10$$

$$c^2 = 49 - 25 = 24 \quad c = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$$

Logo, trata-se da elipse de eixo maior 14, eixo menor 10 e focos de coordenadas $(-2\sqrt{6}, 0)$ e $(2\sqrt{6}, 0)$.

6.

6.1. $A(2, 0)$

Como a circunferência é tangente ao eixo Oy e o seu centro é o ponto A , então o seu raio é 2. Logo

$D(4, 0)$. O ponto médio de $[AD]$ tem coordenadas $\left(\frac{2+4}{2}, \frac{0+0}{2}\right) = (3, 0)$. Assim, uma equação da reta

BC é $x = 3$. Os pontos B e C são os pontos de interseção da reta BC com a circunferência de equação $(x - 2)^2 + y^2 = 4$. Logo, $(3 - 2)^2 + y^2 = 4 \Leftrightarrow 1 + y^2 = 4 \Leftrightarrow y^2 = 3 \Leftrightarrow y = \sqrt{3} \vee y = -\sqrt{3}$.

Assim, $B(3, -\sqrt{3})$ e $C(3, \sqrt{3})$.

6.2. $C(3, \sqrt{3})$ e $D(4, 0)$

$$\overline{CD} = \sqrt{(4 - 3)^2 + (0 - \sqrt{3})^2} = \sqrt{1 + 3} = \sqrt{4} = 2$$

6.3. $A(2, 0)$ e $B(3, -\sqrt{3})$

As coordenadas do ponto médio de $[AB]$ são $\left(\frac{2+3}{2}, \frac{0-\sqrt{3}}{2}\right) = \left(\frac{5}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

6.4. $B(3, -\sqrt{3})$ e $D(4, 0)$

$$(x - 3)^2 + (y + \sqrt{3})^2 = (x - 4)^2 + y^2 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 + y^2 + 2\sqrt{3}y + 3 = x^2 - 8x + 16 + y^2$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{3}y = -2x + 4$$

$$\Leftrightarrow y = -\frac{2}{2\sqrt{3}}x + \frac{4}{2\sqrt{3}}$$

$$\Leftrightarrow y = -\frac{1}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}x + \frac{2}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

$$\Leftrightarrow y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

6.5. O centro da circunferência é o ponto médio de $[AB]$, cujas coordenadas são $\left(\frac{5}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

O raio da circunferência é igual a metade do seu diâmetro: $\frac{\overline{AB}}{2} = \frac{2}{2} = 1$.

$$\text{Logo, } \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 1$$

6.6. $(x - 2)^2 + y^2 \leq 4 \wedge ((x \leq 3 \wedge y \leq 0) \vee (x \geq 3 \wedge y \geq 0))$

6.7. $B(3, -\sqrt{3})$ e $C(3, \sqrt{3})$

A mediatriz de $[BC]$ é a reta de equação $y = 0$. Assim $E(x, 0)$, onde x é um número real.

$$\overline{BC} = 2\sqrt{3}. \text{ Então, } \overline{EC} = \overline{BC}.$$

$$\overline{EC} = \overline{BC} \Leftrightarrow \sqrt{(x - 3)^2 + (0 - \sqrt{3})^2} = 2\sqrt{3} \Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 + 3 = 12 \Leftrightarrow x^2 - 6x = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x - 6) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 6$$

Logo, $E(0, 0)$ ou $E(6, 0)$.

7.

7.1. $d = \sqrt{(x + 4)^2 + y^2} + \sqrt{(x - 4)^2 + y^2} \Leftrightarrow d = d(P, F_1) + d(P, F_2)$

Logo, $d = 2a$ ($a > 4$).

7.2. $a = 5$, logo $2a = 10 = d$.

$$\begin{aligned} & \sqrt{(x+4)^2 + y^2} + \sqrt{(x-4)^2 + y^2} = 10 \\ \Leftrightarrow & \sqrt{(x+4)^2 + y^2} = 10 - \sqrt{(x-4)^2 + y^2} \\ \Leftrightarrow & (x+4)^2 + y^2 = 100 - 20\sqrt{(x-4)^2 + y^2} + (x-4)^2 + y^2 \\ \Leftrightarrow & 20\sqrt{(x-4)^2 + y^2} = 100 + (x-4)^2 - (x+4)^2 \\ \Leftrightarrow & 20\sqrt{(x-4)^2 + y^2} = 100 + x^2 - 8x + 16 - x^2 - 8x - 16 \\ \Leftrightarrow & 20\sqrt{(x-4)^2 + y^2} = 100 - 16x \\ \Leftrightarrow & 5\sqrt{(x-4)^2 + y^2} = 25 - 4x \\ \Leftrightarrow & 25[(x-4)^2 + y^2] = (25 - 4x)^2 \\ \Leftrightarrow & 25(x^2 - 8x + 16 + y^2) = 625 - 200x + 16x^2 \\ \Leftrightarrow & 25x^2 - 200x + 400 + 25y^2 = 625 - 200x + 16x^2 \\ \Leftrightarrow & 9x^2 + 25y^2 = 225 \\ \Leftrightarrow & \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1 \end{aligned}$$

7.3. $a = 5$, logo $2a = 10$. Assim, $A_1(-5, 0)$, $A_2(5, 0)$ e o eixo maior é 10.

$b = \sqrt{9} = 3$, logo $2b = 6$. Assim, $B_1(0, -3)$, $B_2(0, 3)$ e o eixo menor é 6.

8.

8.1. $A + \overrightarrow{FE} = A + \overrightarrow{AG} = G$

8.2. $C - 2\overrightarrow{AB} = C + \overrightarrow{CF} = F$

8.3. $T_{\overrightarrow{AG}}(F) = F + \overrightarrow{AG} = F + \overrightarrow{FE} = E$

8.4. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$, por exemplo.

8.5. $\overrightarrow{FG} - \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{FG} + \overrightarrow{GD} = \overrightarrow{FD}$, por exemplo.

8.6. $\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AE}$, por exemplo.

8.7. $\frac{1}{2}\overrightarrow{FC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{FG} + \overrightarrow{GD} = \overrightarrow{FD}$, por exemplo.

8.8. $\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{FC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \vec{0}$

9. $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ e $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$

9.1. $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA} = -\vec{a}$

9.2. $\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CB} = -\vec{b}$

9.3. $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \vec{a} + \vec{b}$

9.4. $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC} = \vec{a} - \vec{b}$

9.5. $\overrightarrow{CE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = -\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$

9.6. $\overrightarrow{ED} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = -\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$

10. $A(1, 2)$, $B(-2, 3)$, $\vec{u}(-1, -5)$ e $\vec{v}(2, -1)$

10.1. $\overrightarrow{AB} = B - A = (-2, 3) - (1, 2) = (-3, 1)$

10.2. $2\vec{u} + \overrightarrow{AB} = 2(-1, -5) + (-3, 1) = (-2, -10) + (-3, 1) = (-5, -9)$

$$10.3. -2\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v} = -2(-1, -5) + \frac{1}{2}(2, -1) = (2, 10) + \left(1, -\frac{1}{2}\right) = \left(3, \frac{19}{2}\right)$$

$$10.4. 2(\vec{u} + \overrightarrow{AB}) = 2[(-1, -5) + (-3, 1)] = 2(-4, -4) = (-8, -8)$$

$$10.5. \vec{v} - 2\overrightarrow{AB} = (2, -1) - 2(-3, 1) = (2, -1) + (6, -2) = (8, -3)$$

10.6. Por exemplo, $(1, 5)$.

10.7. Qualquer vetor colinear com \vec{v} é da forma $(2k, -k)$, sendo k um número real.

$$\|(2k, -k)\| = 5 \Leftrightarrow \sqrt{(2k)^2 + k^2} = 5 \Leftrightarrow 4k^2 + k^2 = 25 \Leftrightarrow k^2 = 5 \Leftrightarrow k = \sqrt{5} \vee k = -\sqrt{5}$$

Assim, uma resposta à questão é, por exemplo, $(2\sqrt{5}, -\sqrt{5})$.

10.8. Qualquer vetor colinear com \overrightarrow{AB} é da forma $(-3k, k)$, sendo k um número real.

$$\|(-3k, k)\| = 10 \Leftrightarrow \sqrt{(-3k)^2 + k^2} = 10 \Leftrightarrow 9k^2 + k^2 = 100 \Leftrightarrow k^2 = 10 \Leftrightarrow k = \sqrt{10} \vee k = -\sqrt{10}$$

Como se procura um vetor com sentido contrário ao de \overrightarrow{AB} , então $k < 0$.

Logo, o vetor procurado é $(3\sqrt{10}, -\sqrt{10})$.

$$10.9. \vec{u} = \vec{x} + 2\vec{v} \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{u} - 2\vec{v} \Leftrightarrow \vec{x} = (-1, -5) - 2(2, -1) \Leftrightarrow \vec{x} = (-1, -5) + (-4, 2) \\ \Leftrightarrow \vec{x} = (-5, -3)$$

$$10.10. \overrightarrow{AB} = 2\vec{y} - \vec{u} \Leftrightarrow 2\vec{y} = \overrightarrow{AB} + \vec{u} \Leftrightarrow \vec{y} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \vec{u}) \Leftrightarrow \vec{y} = \frac{1}{2}[(-3, 1) + (-1, -5)] \\ \Leftrightarrow \vec{y} = \frac{1}{2}(-4, -4) \Leftrightarrow \vec{y} = (-2, -2)$$

11.

11.1. Equação vetorial da reta: $(x, y) = (-1, -2) + k(1, 3), k \in \mathbb{R}$.

Como um vetor diretor da reta é $(1, 3)$, então o seu declive é $\frac{3}{1} = 3$. Tem-se então que a equação reduzida da reta é da forma $y = 3x + b$. Substituindo x e y por -1 e -2 , respetivamente, tem-se $-2 = -1 \times 3 + b \Leftrightarrow b = 1$. Logo, a equação reduzida da reta é $y = 3x + 1$.

11.2. Como a reta é vertical, um seu vetor diretor é, por exemplo, $(0, 1)$. Logo, uma equação vetorial da reta é $(x, y) = (1, -1) + k(0, 1), k \in \mathbb{R}$. Como a reta é vertical e passa no ponto $(1, -1)$, então a sua equação reduzida é $x = 1$.

11.3. Como a reta é horizontal, um seu vetor diretor é, por exemplo, $(1, 0)$. Logo, uma equação vetorial da reta é $(x, y) = (5, -7) + k(1, 0), k \in \mathbb{R}$. Como a reta é horizontal e passa no ponto $(5, -7)$, então a sua equação reduzida é $y = -7$.

11.4. Um vetor diretor da reta é, por exemplo, $(4, -1) - (2, 3) = (2, -4)$. Assim, uma equação vetorial da reta é $(x, y) = (2, 3) + k(2, -4), k \in \mathbb{R}$. Como um vetor diretor da reta é $(2, -4)$, então o seu declive é $\frac{-4}{2} = -2$. Tem-se então que a equação reduzida da reta é da forma $y = -2x + b$.

Substituindo x e y por 3 e 2 , respetivamente, tem-se $2 = -2 \times 3 + b \Leftrightarrow b = 8$.

Logo, a equação reduzida da reta é $y = -2x + 8$.

$$12. \quad r: y = -2x + 3 \quad s: (x, y) = (1, -1) + k(2, -4), k \in \mathbb{R} \quad t: \begin{cases} x = 1 + 2k \\ y = -1 - k \end{cases}, k \in \mathbb{R}$$

$$12.1. \text{ Reta } r: -2x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$$

Logo, o ponto de interseção da reta r com o eixo Ox tem coordenadas $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$.

$$y = -2 \times 0 + 3 \Leftrightarrow y = 3$$

Logo, o ponto de interseção da reta r com o eixo Oy tem coordenadas $(0, 3)$.

$$\text{Reta } s: (x, 0) = (1, -1) + k(2, -4) \Leftrightarrow (x, 0) = (1, -1) + (2k, -4k)$$

$$\Leftrightarrow (x, 0) = (1 + 2k, -1 - 4k) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + 2k \\ 0 = -1 - 4k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + 2 \times \left(-\frac{1}{4}\right) \\ k = -\frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ k = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

Logo, o ponto de interseção da reta s com o eixo Ox tem coordenadas $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$.

$$(0, y) = (1, -1) + k(2, -4) \Leftrightarrow (0, y) = (1, -1) + (2k, -4k) \Leftrightarrow (0, y) = (1 + 2k, -1 - 4k)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 1 + 2k \\ y = -1 - 4k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = -\frac{1}{2} \\ y = -1 - 4 \times \left(-\frac{1}{2}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = -\frac{1}{2} \\ y = 1 \end{cases}$$

Logo, o ponto de interseção da reta s com o eixo Oy tem coordenadas $(0, 1)$.

$$\text{Reta } t: \begin{cases} x = 1 + 2k \\ 0 = -1 - k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - 2 \\ k = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ k = -1 \end{cases}$$

Logo, o ponto de interseção da reta t com o eixo Ox tem coordenadas $(-1, 0)$.

$$\begin{cases} 0 = 1 + 2k \\ y = -1 - k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = -\frac{1}{2} \\ y = -1 + \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = -\frac{1}{2} \\ y = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Logo, o ponto de interseção da reta t com o eixo Oy tem coordenadas $\left(0, -\frac{1}{2}\right)$.

12.2. Reta $r: -3 = -2 \times 5 + 3 \Leftrightarrow -3 = -7$ Proposição falsa.

O ponto não pertence à reta r .

$$\text{Reta } s: (5, -3) = (1, -1) + k(2, -4) \Leftrightarrow (5, -3) = (1 + 2k, -1 - 4k) \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + 2k = 5 \\ -1 - 4k = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 2 \\ k = \frac{1}{2} \end{cases}$$

O ponto não pertence à reta s .

$$\text{Reta } t: \begin{cases} 5 = 1 + 2k \\ -3 = -1 - k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 2 \\ k = 2 \end{cases}$$

O ponto pertence à reta t .

12.3. Reta s : Um vetor diretor da reta s é $(2, -4)$, logo o seu declive é $\frac{-4}{2} = -2$.

Tem-se então que a equação reduzida da reta é da forma $y = -2x + b$.

Substituindo x e y por 1 e -1 , respectivamente, tem-se $-1 = -2 \times 1 + b \Leftrightarrow b = 1$.

Logo, a equação reduzida da reta é $y = -2x + 1$.

Reta t : Um vetor diretor da reta t é $(2, -1)$, logo o seu declive é $\frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}$. Tem-se então que a

equação reduzida da reta é da forma $y = -\frac{1}{2}x + b$. Substituindo x e y por 1 e -1 ,

respectivamente, tem-se $-1 = -\frac{1}{2} \times 1 + b \Leftrightarrow b = -\frac{1}{2}$.

Logo, a equação reduzida da reta é $y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$.

12.4. Reta r : Como o declive da reta r é -2 , um seu vetor diretor é, por exemplo, $(1, -2)$.

A ordenada na origem desta reta é 3, o que significa que o ponto de coordenadas $(0, 3)$ pertence à reta. Logo, uma equação vetorial da reta r é: $(x, y) = (0, 3) + k(1, -2), k \in \mathbb{R}$

Reta t : Um vetor diretor da reta t é $(2, -1)$ e a reta passa no ponto $(1, -1)$. Logo, uma equação vetorial da reta t é $(x, y) = (1, -1) + k(2, -1), k \in \mathbb{R}$.

12.5. Como se viu nas alíneas anteriores, o declive da reta r é -2 , o declive da reta s é -2 e o declive da reta t é $-\frac{1}{2}$. Logo, as retas r e s são paralelas.

12.6. Considerem-se as equações reduzidas das retas r e t .

$$r: y = -2x + 3 \quad t: y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$$

Então, a abcissa do ponto de interseção das retas r e t é a solução da equação que se obtém igualando as duas equações.

$$-2x + 3 = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \Leftrightarrow -4x + 6 = -x - 1 \Leftrightarrow -3x = -7 \Leftrightarrow x = \frac{7}{3}$$

$$\text{Por outro lado, } y = -2 \times \frac{7}{3} + 3 = -\frac{5}{3}.$$

Logo, as coordenadas do ponto de interseção das retas r e t são $\left(\frac{7}{3}, -\frac{5}{3}\right)$.

12.7. $s: y = -2x + 1$, de acordo com a alínea 12.3.

$$\text{Assim: } p^2 + 2 = -2 \times (2p + 1) + 1 \Leftrightarrow p^2 + 2 = -4p - 2 + 1 \Leftrightarrow p^2 + 4p + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow p = \frac{-4 \pm \sqrt{16-12}}{2} \Leftrightarrow p = \frac{-4 \pm 2}{2} \Leftrightarrow p = -1 \vee p = -3$$

13.

13.1. O ponto A pertence à bissetriz dos quadrantes ímpares. Logo, $A(a, a)$, sendo $a < 0$. O ponto B pertence à bissetriz dos quadrantes pares. Logo, $B(b, -b)$, sendo $b > 0$. Como o triângulo $[OAB]$ é retângulo em O (por OA e OB serem, respetivamente, a bissetriz dos quadrantes ímpares e a bissetriz dos quadrantes pares), então:

$$A_{[OAB]} = 12 \Leftrightarrow \frac{\overline{OA} \times \overline{OB}}{2} = 12 \Leftrightarrow \sqrt{a^2 + a^2} \times \sqrt{b^2 + b^2} = 24 \Leftrightarrow \sqrt{2a^2} \times \sqrt{2b^2} = 24 \\ \Leftrightarrow \sqrt{2}|a| \times \sqrt{2}|b| = 24 \Leftrightarrow 2|ab| = 24 \Leftrightarrow |ab| = 12.$$

Por outro lado, a ordenada de B é igual a $\frac{3}{2}$ da ordenada de A , ou seja, $-b = \frac{3}{2}a \Leftrightarrow b = -\frac{3}{2}a$.

Substituindo na igualdade obtida acima, tem-se:

$$\left| a \times \left(-\frac{3}{2}a\right) \right| = 12 \Leftrightarrow \frac{3}{2}a^2 = 12 \Leftrightarrow a^2 = 8 \Leftrightarrow a = 2\sqrt{2} \vee a = -2\sqrt{2}$$

Uma vez que $a < 0$, tem-se que $a = -2\sqrt{2}$ e $b = -\frac{3}{2} \times (-2\sqrt{2}) = 3\sqrt{2}$.

Logo, $A(-2\sqrt{2}, -2\sqrt{2})$ e $B(3\sqrt{2}, -3\sqrt{2})$.

13.2. Como se viu na alínea anterior, $\widehat{AOB} = 90^\circ$, o que significa que $[AOB]$ é um triângulo inscrito numa semicircunferência. Logo, a hipotenusa deste triângulo, $[AB]$, é um diâmetro da circunferência.

O centro da circunferência é o ponto médio de $[AB]$, cujas coordenadas são:

$$\left(\frac{-2\sqrt{2}+3\sqrt{2}}{2}, \frac{-2\sqrt{2}-3\sqrt{2}}{2}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{5\sqrt{2}}{2}\right). \text{ O raio da circunferência é igual a:}$$

$$\frac{\overline{AB}}{2} = \frac{\sqrt{(-2\sqrt{2}-3\sqrt{2})^2 + (-2\sqrt{2}+3\sqrt{2})^2}}{2} = \frac{\sqrt{(-5\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2}}{2} = \frac{\sqrt{50+2}}{2} = \sqrt{\frac{52}{4}} = \sqrt{13}$$

Assim, uma equação da circunferência é $\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{5\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 13$.

13.3. $\overrightarrow{AB} = B - A = (3\sqrt{2}, -3\sqrt{2}) - (-2\sqrt{2}, -2\sqrt{2}) = (5\sqrt{2}, -\sqrt{2})$

Logo, o declive da reta AB é $\frac{-\sqrt{2}}{5\sqrt{2}} = -\frac{1}{5}$. Tem-se então que a equação reduzida da reta AB

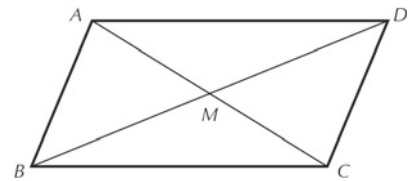
é da forma $y = -\frac{1}{5}x + b$. Substituindo x e y por $-2\sqrt{2}$ e $-2\sqrt{2}$, respetivamente, tem-se:

$$-2\sqrt{2} = -\frac{1}{5} \times (-2\sqrt{2}) + b \Leftrightarrow b = -\frac{12\sqrt{2}}{5}$$

Logo, a equação reduzida da reta é $y = -\frac{1}{5}x - \frac{12\sqrt{2}}{5}$

14.

- 14.1.** Quer-se mostrar que as diagonais de qualquer paralelogramo bisseitam-se, isto é, que se intersectam num ponto que é o ponto médio de ambas as diagonais. Considere-se um paralelogramo $[ABCD]$ qualquer e seja M o ponto de interseção das suas diagonais. Quer-se mostrar que se M é o ponto médio de $[AC]$, então também é o ponto médio de $[BD]$. Se M é o ponto médio de $[AC]$, então $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM}$ e $\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DC}$.



Então, $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DC}$.

Uma vez que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, então $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{MD}$.

Logo, M é o ponto médio de $[BD]$.

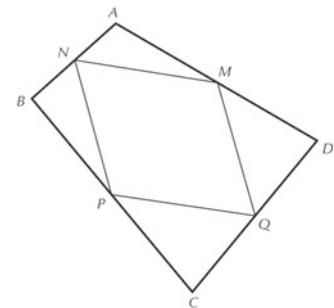
- 14.2.** Considere um quadrilátero $[ABCD]$ qualquer. Sejam M o ponto médio de $[AD]$, N o ponto médio de $[AB]$, P o ponto médio de $[BC]$ e Q o ponto médio de $[CD]$. Então, $\overrightarrow{MD} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AD}$ e $\overrightarrow{DQ} = \frac{1}{2} \overrightarrow{DC}$.

Logo, $\overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DQ} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2} \overrightarrow{DC} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}) = \frac{1}{2} \overrightarrow{AC}$.

Analogamente, $\overrightarrow{NB} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BP} = \frac{1}{2} \overrightarrow{BC}$.

Logo, $\overrightarrow{NP} = \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{BP} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2} \overrightarrow{BC} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = \frac{1}{2} \overrightarrow{AC}$.

Assim, $\overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{NP}$. Logo, o quadrilátero $[MNPQ]$ tem dois lados com a mesma direção e com o mesmo comprimento, pelo que é um paralelogramo.



15.

15.1. $\overline{AE} = 2$

$\overline{EM} = \overline{MH} = 3$, logo $\overline{EH} = 6$.

$\overline{HG} = 2\overline{EH} = 6$

$M(0, 0, 4)$

Tem-se, então: $A(3, 0, 2)$, $B(3, 12, 2)$, $C(-3, 12, 2)$, $D(-3, 0, 2)$, $E(3, 0, 4)$, $F(3, 12, 4)$, $G(-3, 12, 4)$ e $H(-3, 0, 4)$

$$15.2. \overline{OE} = \overline{FB} = 3$$

$$\overline{EF} = 2\overline{OE} = 6$$

Tem-se, então: $A(3, 0, -3)$, $B(3, 6, -3)$, $C(0, 6, -3)$, $D(0, 0, -3)$, $E(3, 0, 0)$, $F(3, 6, 0)$, $G(0, 6, 0)$ e $O(0, 0, 0)$

$$15.3. \overline{OA} = \overline{AE} = 4$$

$$\overline{AB} = \overline{AD} = 5$$

$$\overline{OD}^2 + \overline{OA}^2 = \overline{AD}^2 \Leftrightarrow \overline{OD}^2 = 5^2 - 4^2 \Leftrightarrow \overline{OD}^2 = 9, \text{ logo } \overline{OD} = 3.$$

Tem-se, então: $A(4, 0, 0)$, $B(4, 5, 0)$, $C(0, 8, 0)$, $D(0, 3, 0)$, $E(4, 0, 4)$, $F(4, 5, 4)$, $G(0, 8, 4)$ e $H(0, 3, 4)$

$$15.4. \overline{OA} = \overline{AB} = \overline{OB} = 4$$

$$\overline{OE} = 2\overline{AB} = 8$$

Sendo h a altura do triângulo $[OAB]$:

$$h^2 + \left(\frac{\overline{OB}}{2}\right)^2 = \overline{OA}^2 \Leftrightarrow h^2 = 4^2 - 2^2 \Leftrightarrow h^2 = 12$$

$$\text{Logo, } h = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}.$$

Tem-se, então: $A(2\sqrt{3}, 2, 0)$, $B(0, 4, 0)$, $C(2\sqrt{3}, 2, 8)$, $D(0, 4, 8)$, $E(0, 0, 8)$, $O(0, 0, 0)$

$$16. \overline{BC} = x$$

$$\overline{AB} = 2\overline{BC} = 2x$$

$$\overline{AD} = 2\overline{AB} = 4x$$

$$V_{\text{Prisma}} = 216 \Leftrightarrow x \times 2x \times 4x = 216 \Leftrightarrow 8x^3 = 216 \Leftrightarrow x^3 = 27 \Leftrightarrow x = 3$$

$$16.1. \text{ a) } BCE: y = 6$$

$$\text{ b) } AB: x = 3 \wedge z = 0$$

$$\text{ c) } [ABED]: x = 3 \wedge 0 \leq y \leq 6 \wedge 0 \leq z \leq 12$$

$$\text{ d) } [GD]: 0 \leq x \leq 3 \wedge y = 0 \wedge z = 12$$

$$\text{ e) } 0 \leq x \leq 3 \wedge 0 \leq y \leq 6 \wedge 0 \leq z \leq 12$$

f) Uma vez que $G(0, 0, 12)$ e $F(0, 6, 12)$, então uma equação do plano medidor de $[AB]$ é $y = 3$.

$$\text{ g) } D(3, 0, 12) \text{ e } F(0, 6, 12)$$

$$(x-3)^2 + y^2 + (z-12)^2 = x^2 + (y-6)^2 + (z-12)^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 + y^2 = x^2 + y^2 - 12y + 36 \Leftrightarrow -6x + 12y - 27 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x - 4y + 9 = 0$$

$$16.2. \text{ a) Aresta } [EF].$$

$$\text{ b) Face } [AOGD].$$

$$16.3. \text{ Um diâmetro da superfície esférica que contém todos os vértices do prisma é } [GB].$$

Assim, o centro da superfície esférica será o ponto médio deste segmento de reta,

$$\text{ cujas coordenadas são } \left(\frac{0+3}{2}, \frac{0+6}{2}, \frac{12+0}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}, 3, 6\right).$$

$$\text{ O comprimento do raio da superfície esférica é } \frac{\overline{GB}}{2} = \frac{\sqrt{3^2+6^2+12^2}}{2} = \frac{\sqrt{189}}{2}.$$

$$\text{ Assim, uma condição que define esta superfície esférica é } \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + (y-3)^2 + (z-6)^2 = \frac{189}{4}.$$

$$16.4. \overrightarrow{DF} = F - D = (0, 6, 12) - (3, 0, 12) = (-3, 6, 0)$$

Logo, uma equação vetorial da reta que passa em B e é paralela a DF é:

$$(x, y, z) = (3, 6, 0) + k(-3, 6, 0), k \in \mathbb{R}$$

17. $D(1, -1, 2)$ $B(2, -2, 1)$ $\vec{u}(1, 0, 2)$

17.1. $\vec{AB} = B - A = (2, -2, 1) - (1, -1, 2) = (1, -1, -1)$

Assim, $AB: (x, y, z) = (1, -1, 2) + k(1, -1, -1), k \in \mathbb{R}$. Para que o ponto $(-4p, 4p, p)$ pertença à reta AB :

$$(-4p, 4p, p) = (1, -1, 2) + k(1, -1, -1)$$

$$\Leftrightarrow (-4p, 4p, p) = (1, -1, 2) + (k, -k, -k)$$

$$\Leftrightarrow (-4p, 4p, p) = (1+k, -1-k, 2-k)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -4p = 1+k \\ 4p = -1-k \\ p = 2-k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4(2-k) = 1+k \\ - \\ - \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -8+4k = 1+k \\ - \\ - \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3k = 9 \\ - \\ - \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k = 3 \\ 4p = -1-3 \\ p = 2-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 3 \\ p = -1 \\ p = -1 \end{cases} \quad \text{Logo, } p = -1.$$

17.2. O conjunto dos pontos do espaço equidistantes de A e de B é a mediatriz de $[AB]$:

$$(x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = (x-2)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 + 2y + 1 + z^2 - 4z + 4 = x^2 - 4x + 4 + y^2 + 4y + 4 + z^2 - 2z + 1$$

$$\Leftrightarrow 2x - 2y - 2z - 3 = 0$$

17.3. $B + \vec{u} = (2, -2, 1) + (1, 0, 2) = (3, -2, 3)$

O centro da circunferência é o ponto médio do segmento de reta cujas extremidades

são os pontos A e $B + \vec{u}$: $\left(\frac{1+3}{2}, \frac{-1-2}{2}, \frac{2+3}{2}\right) = \left(2, -\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$

O raio da circunferência é: $\frac{\sqrt{(1-3)^2 + (-1+2)^2 + (2-3)^2}}{2} = \frac{\sqrt{4+1+1}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$

Logo, uma equação da superfície esférica é:

$$(x-2)^2 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{6}{4} \Leftrightarrow (x-2)^2 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{3}{2}$$

17.4. Uma vez que \vec{v} é colinear com \vec{u} , então $\vec{v}(k, 0, 2k)$ para algum número real k .

$$\|\vec{v}\| = 10 \Leftrightarrow \sqrt{k^2 + 0^2 + (2k)^2} = 10 \Leftrightarrow k^2 + 4k^2 = 100 \Leftrightarrow k^2 = 20 \Leftrightarrow k = 2\sqrt{5} \vee k = -2\sqrt{5}$$

Como \vec{v} tem o mesmo sentido de \vec{u} , então $k > 0$, logo $\vec{v}(2\sqrt{5}, 0, 4\sqrt{5})$.

18. $A(0, 2, 0)$, $E(-1, 1, 3)$, $B(-2, 4, 4)$ e $D(-6, 3, 2)$

18.1. $\vec{AE} = (-1, 1, 3) - (0, 2, 0) = (-1, -1, 3)$

$$\vec{AD} = (-6, 3, 2) - (0, 2, 0) = (-6, 1, 2)$$

$$C = B + \vec{AD} = (-2, 4, 4) + (-6, 1, 2) = (-8, 5, 6)$$

$$F = B + \vec{AE} = (-2, 4, 4) + (-1, -1, 3) = (-3, 3, 7)$$

$$G = F + \vec{AD} = (-3, 3, 7) + (-6, 1, 2) = (-9, 4, 9)$$

$$H = E + \vec{AD} = (-1, 1, 3) + (-6, 1, 2) = (-7, 2, 5)$$

18.2. $AE = \|\vec{AE}\| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + 3^2} = \sqrt{1+1+9} = \sqrt{11}$

$$AD = \|\vec{AD}\| = \sqrt{(-6)^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{36+1+4} = \sqrt{41}$$

$$\vec{AB} = (-2, 4, 4) - (0, 2, 0) = (-2, 2, 4)$$

$$AB = \|\vec{AB}\| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2 + 4^2} = \sqrt{4+4+16} = \sqrt{24}$$

Assim, o volume do prisma é:

$$\vec{AE} \times \vec{AD} \times \vec{AB} = \sqrt{11} \times \sqrt{41} \times \sqrt{24} = \sqrt{10824} = 2\sqrt{2706} \text{ u.v.}$$

18.3. O centro da superfície esférica é o ponto médio de $[AG]$: $\left(\frac{0-9}{2}, \frac{2+4}{2}, \frac{0+9}{2}\right) = \left(-\frac{9}{2}, 3, \frac{9}{2}\right)$

O raio da superfície esférica é:

$$\frac{\overline{AG}}{2} = \frac{\sqrt{(0+9)^2 + (2-4)^2 + (0-9)^2}}{2} = \frac{\sqrt{81+4+81}}{2} = \frac{\sqrt{166}}{2} = \sqrt{\frac{166}{4}} = \sqrt{\frac{83}{2}}$$

Logo, uma equação superfície esférica é: $\left(x + \frac{9}{2}\right)^2 + (y - 3)^2 + \left(z - \frac{9}{2}\right)^2 = \frac{83}{2}$

19.

19.1. $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 8z + 12 = 0$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 + 2y + 1 + z^2 - 8z + 16 = -12 + 4 + 1 + 16$$

$$\Leftrightarrow (x - 2)^2 + (y + 1)^2 + (z - 4)^2 = 9$$

Assim, $C(2, -1, 4)$ e o raio da superfície esférica é $\sqrt{9} = 3$.

19.2. $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 + (z - 4)^2 = 9 \wedge z = 4$

$$\Leftrightarrow (x - 2)^2 + (y + 1)^2 + (4 - 4)^2 = 9 \wedge z = 4$$

$$\Leftrightarrow (x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 9 \wedge z = 4$$

19.3. $(0 - 2)^2 + (0 + 1)^2 + (2 - 4)^2 = 9 \Leftrightarrow 4 + 1 + 4 = 9 \Leftrightarrow 9 = 9$ Proposição verdadeira.

Logo, o ponto A pertence à superfície esférica.

$$\overrightarrow{AC} = C - A = (2, -1, 4) - (0, 0, 2) = (2, -1, 2)$$

$$\|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{4 + 1 + 4} = \sqrt{9} = 3$$

Logo, a inequação que define a esfera de centro A e raio \overline{AC} é:

$$x^2 + y^2 + (z - 2)^2 \leq 9 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 4z + 4 \leq 9$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 4z - 5 \leq 0$$

20.

20.1. $(x + 3)^2 + (y - 2)^2 + (z + 1)^2 = 5 \wedge y = 3 \Leftrightarrow (x + 3)^2 + (3 - 2)^2 + (z + 1)^2 = 5 \wedge y = 3$

$$\Leftrightarrow (x + 3)^2 + 1 + (z + 1)^2 = 5 \wedge y = 3$$

$$\Leftrightarrow (x + 3)^2 + (z + 1)^2 = 4 \wedge y = 3$$

20.2. $(b + 3)^2 + (y - 2)^2 + (z + 1)^2 = 5 \Leftrightarrow (y - 2)^2 + (z + 1)^2 = 5 - (b + 3)^2$

Assim:

$$5 - (b + 3)^2 = 5 \Leftrightarrow (b + 3)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow b + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow b = -3$$

Tema IV – Funções reais de variável real

Páginas 22 a 27

1.

1.1. f é injetiva porque quaisquer que sejam x_1 e x_2 pertencentes a \mathbb{R} , tais que $x_1 \neq x_2$, tem-se que $2x_1 \neq 2x_2$ e $2x_1 + 1 \neq 2x_2 + 1$, ou seja, $f(x_1) \neq f(x_2)$.

g não é injetiva porque, por exemplo, $g(1) = g(-1) = 0$.

h é injetiva porque quaisquer que sejam x_1 e x_2 pertencentes a \mathbb{R} , tais que $x_1 \neq x_2$, tem-se que $(x_1)^3 \neq (x_2)^3$ e $(x_1)^3 + 1 \neq (x_2)^3 + 1$, ou seja, $h(x_1) \neq h(x_2)$.

i não é injetiva porque, por exemplo, $i(2) = i(-2) = 4$.

j é injetiva porque a quaisquer dois objetos diferentes correspondem imagens diferentes.

k não é injetiva porque há objetos diferentes a que corresponde a mesma imagem, por exemplo, os zeros da função.

l é injetiva porque a quaisquer dois objetos diferentes correspondem imagens diferentes.

m não é injetiva porque há objetos diferentes a que corresponde a mesma imagem, por exemplo, os zeros da função.

1.2. $D'_f = \mathbb{R} =$ Conjunto de chegada de f , logo f é sobrejetiva.

$D'_g = [-1, +\infty[=$ Conjunto de chegada de g , logo g é sobrejetiva.

$D'_h = \mathbb{R} =$ Conjunto de chegada de h , logo h é sobrejetiva.

$D'_i = [0, +\infty[\neq \mathbb{R} =$ Conjunto de chegada de i , logo i não é sobrejetiva.

$D'_j = \mathbb{R}^+ =$ Conjunto de chegada de j , logo j é sobrejetiva.

$D'_l = \mathbb{R} =$ Conjunto de chegada de l , logo l é sobrejetiva.

$D'_m = [-1, 1] \neq \mathbb{R} =$ Conjunto de chegada de m , logo m não é sobrejetiva.

1.3. As funções f , h , j e l são simultaneamente injetivas e sobrejetivas, logo são bijetivas.

2.

2.1. $f(-1) = 1 + 1 = 2$ $f(1) = 1 + 1 = 2$

Logo, a restrição de f a $[-1, 1]$ não é injetiva.

2.2. Quaisquer que sejam os valores de x_1 e x_2 pertencentes a $]-\infty, 0]$ tais que $x_1 \neq x_2$, então $(x_1)^2 \neq (x_2)^2$ e $(x_1)^2 + 1 \neq (x_2)^2 + 1$, ou seja, $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Logo, a restrição de f a $]-\infty, 0]$ é injetiva.

2.3. Como $]-1, 0[$ é um subconjunto de $]-\infty, 0]$ e vimos que f é injetiva neste intervalo, então f é injetiva em $]-1, 0[$.

2.4. $f(-1) = 1 + 1 = 2$ $f(1) = 1 + 1 = 2$ Logo, a restrição de f a $[-1, +\infty[$ não é injetiva.

3.

3.1. $(f \circ g)(0) = f(g(0)) = f(1) = 4$

3.2. $(h \circ g)(1) = h(g(1)) = h(2) = 4$

3.3. $(f \circ h)(1) = f(h(1)) = f(2) = 5$

3.4. $(j \circ i)(2) = j(i(2)) = j(4) = 2$

3.5. $(j \circ k)(-2) = j(k(-2)) = j(4) = 2$

3.6. $(k \circ k)(0) = k(k(0)) = k(0) = 0$

3.7. $f^{-1}(6) = 3$

3.8. $h^{-1}(2) = 1$

3.9. $i^{-1}(4) = 2$

3.10. $k^{-1}(-3) = 5$

3.11. $(f^{-1} \circ h)(2) = f^{-1}(h(2)) = f^{-1}(4) = 1$

3.12. $(f \circ g^{-1})(2) = f(g^{-1}(2)) = f(1) = 4$

3.13. $(i \circ k^{-1})(0) = i(k^{-1}(0)) = i(0) = 0$

3.14. $(i^{-1} \circ k)(-2) = i^{-1}(k(-2)) = i^{-1}(4) = 2$

3.15. $(j \circ k^{-1})(4) = j(k^{-1}(4)) = j(-2) = -2$

4. $f(x) = 2x - 5$; $D_f = \mathbb{R}$ $g(x) = \frac{x+3}{2x-1}$; $D_g = \{x \in \mathbb{R}: 2x - 1 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$

$h(x) = \sqrt{2x+3}$; $D_h = \{x \in \mathbb{R}: 2x+3 \geq 0\} = \left[-\frac{3}{2}, +\infty\right[$

4.1. a) $D_{f \circ g} = \left\{x \in \mathbb{R}: x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\} \wedge g(x) \in \mathbb{R}\right\} = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{x+3}{2x-1}\right) = \frac{2x+6}{2x-1} - 5$

$$\text{b) } D_{f \circ f} = \{x \in \mathbb{R}: x \in \mathbb{R} \wedge f(x) \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$$

$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(2x - 5) = 2(2x - 5) - 5 = 4x - 15$$

$$\text{c) } D_{f \circ h} = \left\{x \in \mathbb{R}: x \in \left[-\frac{3}{2}, +\infty\right[\wedge h(x) \in \mathbb{R}\right\} = \left[-\frac{3}{2}, +\infty\right[$$

$$(f \circ h)(x) = f(h(x)) = f(\sqrt{2x+3}) = 2\sqrt{2x+3} - 5$$

$$\text{d) } D_{h \circ f} = \left\{x \in \mathbb{R}: x \in \mathbb{R} \wedge f(x) \in \left[-\frac{3}{2}, +\infty\right[\right\} = \left[\frac{7}{4}, +\infty\right[$$

Cálculo auxiliar

$$f(x) \in \left[-\frac{3}{2}, +\infty\right[\Leftrightarrow 2x - 5 \geq -\frac{3}{2} \Leftrightarrow 2x \geq \frac{7}{2} \Leftrightarrow x \geq \frac{7}{4}$$

$$(h \circ f)(x) = h(f(x)) = h(2x - 5) = \sqrt{2(2x - 5) + 3} = \sqrt{4x - 7}$$

$$\text{4.2. a) } D_f = \mathbb{R} = D'_{f^{-1}}$$

$$2x - 5 = y \Leftrightarrow 2x = y + 5 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}y + \frac{5}{2}$$

$$\text{Logo, } f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}. \quad D_{f^{-1}} = \mathbb{R} = D'_f$$

$$\text{b) } D_g = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\} = D'_{g^{-1}}$$

$$\frac{x+3}{2x-1} = y \Leftrightarrow x+3 = (2x-1)y \Leftrightarrow x+3 = 2xy - y \Leftrightarrow x - 2xy = -y - 3$$

$$\Leftrightarrow x(1-2y) = -y-3 \Leftrightarrow x = \frac{-y-3}{1-2y} \Leftrightarrow x = \frac{y+3}{2y-1}$$

$$\text{Logo, } g^{-1}(x) = \frac{x+3}{2x-1}. \quad D_{g^{-1}} = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\} = D'_g$$

$$\text{c) } (f \circ f)(x) = 4x - 15 \quad D_{f \circ f} = \mathbb{R} = D'_{(f \circ f)^{-1}}$$

$$4x - 15 = y \Leftrightarrow 4x = 15 + y \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}y + \frac{15}{4}$$

$$\text{Logo, } (f \circ f)^{-1}(x) = \frac{1}{4}x + \frac{15}{4}. \quad D_{(f \circ f)^{-1}} = \mathbb{R} = D'_{f \circ f}$$

$$\text{d) } (f \circ g)(x) = \frac{2x+6}{2x-1} - 5 \quad D_{f \circ g} = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\} = D'_{(f \circ g)^{-1}}$$

$$\frac{2x+6}{2x-1} - 5 = y \Leftrightarrow \frac{2x+6}{2x-1} = y+5 \Leftrightarrow 2x+6 = (y+5)(2x-1) \Leftrightarrow 2x+6 = 2xy - y + 10x - 5$$

$$\Leftrightarrow 2x - 2xy - 10x = -y - 5 - 6$$

$$\Leftrightarrow x(-8-2y) = -y-11$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-y-11}{-8-2y}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{y+11}{2y+8}$$

$$\text{Logo, } (f \circ g)^{-1}(x) = \frac{x+11}{2x+8}.$$

$$D_{(f \circ g)^{-1}} = \{x \in \mathbb{R}: 2x+8 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-4\} = D'_{f \circ g}$$

$$\text{5. } f(x) = x^2 + 2x + 1; D_f = \mathbb{R}$$

$$g(x) = -2 + \sqrt{x-1}; D_g = \{x \in \mathbb{R}: x-1 \geq 0\} = [1, +\infty[$$

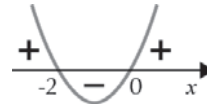
5.1. a) $D_{f \circ g} = \{x \in \mathbb{R}: x \in [1, +\infty[\wedge g(x) \in \mathbb{R}\} = [1, +\infty[$

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x)) = f(-2 + \sqrt{x-1}) = (-2 + \sqrt{x-1})^2 + 2(-2 + \sqrt{x-1}) + 1 \\&= 4 - 4\sqrt{x-1} + x - 1 - 4 + 2\sqrt{x-1} + 1 \\&= x - 2\sqrt{x-1}\end{aligned}$$

b) $D_{g \circ f} = \{x \in \mathbb{R}: x \in \mathbb{R} \wedge f(x) \in [1, +\infty[\} =]-\infty, -2] \cup [0, +\infty[$

Cálculos auxiliares

$$\begin{aligned}f(x) \in [1, +\infty[&\Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 \geq 1 \\&\Leftrightarrow x^2 + 2x \geq 0 \\&\Leftrightarrow x \in]-\infty, -2] \cup [0, +\infty[\\x^2 + 2x = 0 &\Leftrightarrow x = 0 \vee x = -2\end{aligned}$$



$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2 + 2x + 1) = -2 + \sqrt{x^2 + 2x + 1 - 1} = -2 + \sqrt{x^2 + 2x}$$

5.2. f não é injetiva porque, por exemplo, $f(0) = f(-2) = 1$.

f não é sobrejetiva porque o seu contradomínio, $[0, +\infty[$, é diferente do seu conjunto de chegada, \mathbb{R} .

g é injetiva porque, para quaisquer $x_1, x_2 \in [1, +\infty[$, tais que $x_1 \neq x_2$, tem-se que $x_1 - 1 \neq x_2 - 1$,

logo $\sqrt{x_1 - 1} \neq \sqrt{x_2 - 1}$ e, portanto, $-2 + \sqrt{x_1 - 1} \neq -2 + \sqrt{x_2 - 1}$, ou seja, $g(x_1) \neq g(x_2)$.

g não é sobrejetiva porque o seu contradomínio, $[-2, +\infty[$, é diferente do seu conjunto de chegada, \mathbb{R} .

5.3. a) f não tem inversa porque não é uma função injetiva.

b) A inversa de g é a inversa de:

$$\begin{array}{ccc}g: & [1, +\infty[& \rightarrow & [-2, +\infty[\\& x & \mapsto & g(x)\end{array}$$

pois assim g é sobrejetiva (e já vimos que g é injetiva), logo g é invertível.

$$\begin{aligned}-2 + \sqrt{x-1} = y &\Leftrightarrow \sqrt{x-1} = y + 2 \Leftrightarrow x - 1 = (y + 2)^2 \Leftrightarrow x - 1 = y^2 + 4y + 4 \\&\Leftrightarrow x = y^2 + 4y + 5\end{aligned}$$

Assim:

$$D_{g^{-1}} = D'_g = [-2, +\infty[\quad D'_{g^{-1}} = D_g = [1, +\infty[\quad g^{-1}(x) = x^2 + 4x + 5$$

5.4. a) $D_{f+g} = D_f \cap D_g = \mathbb{R} \cap [1, +\infty[= [1, +\infty[$

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = x^2 + 2x + 1 - 2 + \sqrt{x-1} = x^2 + 2x - 1 + \sqrt{x-1}$$

b) $D_{f-g} = D_f \cap D_g = \mathbb{R} \cap [1, +\infty[= [1, +\infty[$

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x) = x^2 + 2x + 1 + 2 - \sqrt{x-1} = x^2 + 2x + 3 - \sqrt{x-1}$$

c) $D_{f \times g} = D_f \cap D_g = \mathbb{R} \cap [1, +\infty[= [1, +\infty[$

$$(f \times g)(x) = f(x) \times g(x) = (x^2 + 2x + 1)(-2 + \sqrt{x-1})$$

d) $D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g \cap \{x \in \mathbb{R}: g(x) \neq 0\} = \mathbb{R} \cap [1, +\infty[\cap \mathbb{R} \setminus \{5\} = [1, +\infty[\setminus \{5\}$

Cálculo auxiliar

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow -2 + \sqrt{x-1} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x-1} = 2 \Rightarrow x - 1 = 4 \Leftrightarrow x = 5$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^2 + 2x + 1}{-2 + \sqrt{x-1}}$$

6.

6.1. $D = [-2, 3[\quad D' = [-2, 2] \quad \text{Zeros: } -2 \text{ e } 0$

Positiva em $]0, 3[$ e negativa em $] -2, 0[$.

6.2. $D =]-2, 2[$ $D' =]-2, 2[$ Zeros: $] -2, 0]$ e 1
Positiva em $]0, 1[$ e negativa em $]1, 2[$.

6.3. $D =]-4, +\infty[$ $D' =]-2, 1[$ Zeros: -2 e 0
Positiva em $] -2, +\infty[\setminus \{0\}$ e negativa em $] -4, -2[$.

6.4. $D =]-\infty, 5]$ $D' =]0, 5]$ Não tem zeros.
Positiva em $] -\infty, 5]$.

7.

7.1. $a(x) = x^2 - 5x + 6$ $D = \mathbb{R}$

7.2. $b(x) = \frac{x+1}{x-3}$

$$D = \{x \in \mathbb{R}: x - 3 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{3\} \quad D = \mathbb{R} \setminus \{3\}$$

Cálculo auxiliar

$$x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 3$$

7.3. $c(x) = \frac{x+1}{x^2+3x+2}$

$$D = \{x \in \mathbb{R}: x^2 + 3x + 2 \neq 0\} \quad D = \mathbb{R} \setminus \{-2, -1\}$$

Cálculo auxiliar

$$x^2 + 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{2} \Leftrightarrow x = -2 \vee x = -1$$

7.4. $d(x) = \frac{-3}{x^2-9}$

$$D = \{x \in \mathbb{R}: x^2 - 9 \neq 0\} \quad D = \mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}$$

Cálculo auxiliar

$$x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow x = 3 \vee x = -3$$

7.5. $e(x) = 1 + \frac{2}{x^3+2x^2+x}$

$$D = \{x \in \mathbb{R}: x^3 + 2x^2 + x \neq 0\} \quad D = \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$$

Cálculo auxiliar

$$x^3 + 2x^2 + x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 + 2x + 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee (x+1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -1$$

7.6. $f(x) = \sqrt{x+3}$

$$D = \{x \in \mathbb{R}: x + 3 \geq 0\} \quad D = [-3, +\infty[$$

Cálculo auxiliar

$$x + 3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -3$$

7.7. $g(x) = \sqrt{x^2+2}$

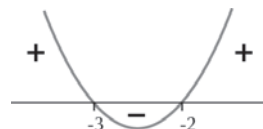
$$D = \{x \in \mathbb{R}: x^2 + 2 \geq 0\} \quad D = \mathbb{R}$$

7.8. $h(x) = \sqrt{x^2+5x+6}$

$$D = \{x \in \mathbb{R}: x^2 + 5x + 6 \geq 0\} \quad D =]-\infty, -3] \cup [-2, +\infty[$$

Cálculo auxiliar

$$x^2 + 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{25-24}}{2} \\ \Leftrightarrow x = -2 \vee x = -3$$



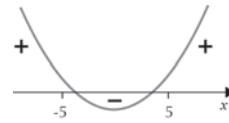
7.9. $i(x) = \sqrt{x^2 - 25}$

$D = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 25 \geq 0\}$

$D =]-\infty, -5] \cup [5, +\infty[$

Cálculo auxiliar

$x^2 - 25 = 0 \Leftrightarrow x = -5 \vee x = 5$



7.10. $j(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$

$D = \{x \in \mathbb{R} : x^2 + 1 > 0\}$

$D = \mathbb{R}$

7.11. $k(x) = \frac{3x+3}{\sqrt{3x+1}}$

$D = \{x \in \mathbb{R} : 3x + 1 > 0\}$

$D =]-\frac{1}{3}, +\infty[$

Cálculo auxiliar

$3x + 1 > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{1}{3}$

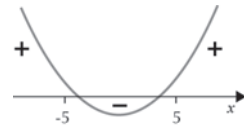
7.12. $l(x) = \frac{2x+1}{\sqrt{x^2 - 25}}$

$D = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 25 > 0\}$

$D =]-\infty, -5[\cup]5, +\infty[$

Cálculo auxiliar

$x^2 - 25 = 0 \Leftrightarrow x = -5 \vee x = 5$



7.13. $m(x) = \sqrt{\frac{x^2+3}{x^2+5}}$

$D = \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{x^2+3}{x^2+5} \geq 0 \wedge x^2 + 5 \neq 0\right\}$

$D = \mathbb{R}$

Cálculos auxiliares

$x^2 + 3 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$x^2 + 5 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$

Logo, $\frac{x^2+3}{x^2+5} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

7.14. $n(x) = \sqrt{\frac{x^2+3}{x-5}}$

$D = \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{x^2+3}{x-5} \geq 0 \wedge x - 5 \neq 0\right\}$

$D =]5, +\infty[$

Cálculos auxiliares

$x^2 + 3 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$\frac{x^2+3}{x-5} \geq 0 \Leftrightarrow x - 5 > 0 \Leftrightarrow x > 5$

7.15. $o(x) = \frac{1}{|x-3|}$

$D = \{x \in \mathbb{R} : |x - 3| \neq 0\}$

$D = \mathbb{R} \setminus \{3\}$

Cálculo auxiliar

$|x - 3| = 0 \Leftrightarrow x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 3$

$$7.16. p(x) = \frac{-2}{|x|+3}$$

$$D = \{x \in \mathbb{R}: |x| + 3 \neq 0\} \quad D = \mathbb{R}$$

Cálculo auxiliar

$$|x| + 3 = 0 \Leftrightarrow |x| = -3 \quad \text{Equação impossível}$$

$$7.17. q(x) = \frac{2}{|x|-3}$$

$$D = \{x \in \mathbb{R}: |x| - 3 \neq 0\} \quad D = \mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}$$

Cálculo auxiliar

$$|x| - 3 = 0 \Leftrightarrow |x| = 3 \Leftrightarrow x = 3 \vee x = -3$$

$$7.18. r(x) = \sqrt{|x| - 4}$$

$$D = \{x \in \mathbb{R}: |x| - 4 \geq 0\} \quad D =]-\infty, -4] \cup [4, +\infty[$$

Cálculo auxiliar

$$|x| - 4 \geq 0 \Leftrightarrow |x| \geq 4 \Leftrightarrow x \geq 4 \vee x \leq -4$$

8.

$$8.1. f(x) = 2x + 4 \quad D_f = \mathbb{R}$$

$$f(-x) = 2(-x) + 4 = -2x + 4$$

Assim, existem valores reais para os quais $f(-x) \neq f(x)$ e $f(-x) \neq -f(x)$, logo f não é par nem ímpar.

$$8.2. g(x) = \frac{2}{3x} \quad D_g = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$g(-x) = \frac{2}{3(-x)} = -\frac{2}{3x} = -g(x), \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Logo, g é uma função ímpar.

$$8.3. h(x) = x^2 + 2x + 1 \quad D_h = \mathbb{R}$$

$$h(-x) = (-x)^2 + 2(-x) + 1 = x^2 - 2x + 1$$

Assim, existem valores reais para os quais $h(-x) \neq h(x)$ e $h(-x) \neq -h(x)$, logo h não é par nem ímpar.

$$8.4. i(x) = x^2 + 4 \quad D_i = \mathbb{R}$$

$$i(-x) = (-x)^2 + 4 = x^2 + 4 = i(x), \forall x \in \mathbb{R}$$

Logo, i é uma função par.

$$8.5. j(x) = x^3 + x \quad D_j = \mathbb{R}$$

$$j(-x) = (-x)^3 + (-x) = -x^3 - x = -j(x), \forall x \in \mathbb{R}$$

Logo, j é uma função ímpar.

$$8.6. k(x) = |x| - 2 \quad D_k = \mathbb{R}$$

$$k(-x) = |-x| - 2 = |x| - 2 = k(x), \forall x \in \mathbb{R}$$

Logo, k é uma função par.

$$8.7. l(x) = |x + 3| \quad D_l = \mathbb{R}$$

$$l(-x) = |-x + 3|$$

Assim, existem valores reais para os quais $l(-x) \neq l(x)$ e $l(-x) \neq -l(x)$, logo l não é par nem ímpar.

$$8.8. m(x) = \sqrt{x^2 + 1} \quad D_m = \mathbb{R}$$

$$m(-x) = \sqrt{(-x)^2 + 1} = \sqrt{x^2 + 1} = m(x), \forall x \in \mathbb{R}$$

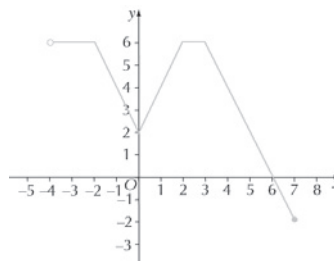
Logo, m é uma função par.

8.9. $n(x) = |x^2 - 1| + x$ $D_n = \mathbb{R}$ $n(-x) = |x^2 - 1| - x$

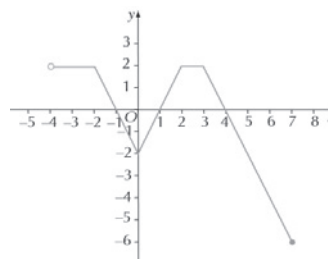
Assim, existem valores reais para os quais $n(-x) \neq n(x)$ e $n(-x) \neq -n(x)$, logo n não é par nem ímpar.

9.

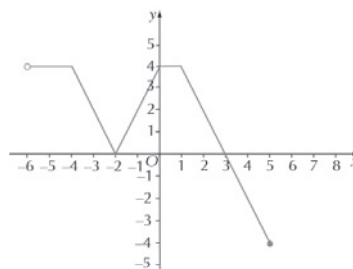
9.1. $D =]-4, 7]$ $D' = [-2, 6]$ Zeros: 6



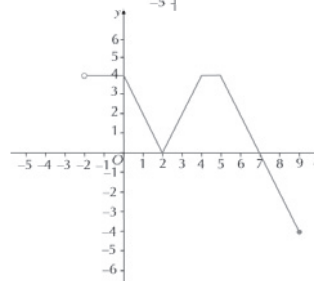
9.2. $D =]-4, 7]$ $D' = [-6, 2]$ Zeros: -1, 1, 4



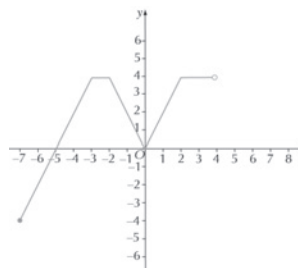
9.3. $D =]-6, 5]$ $D' = [-4, 4]$ Zeros: -2, 3



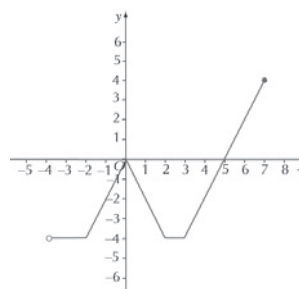
9.4. $D =]-2, 9]$ $D' = [-4, 4]$ Zeros: 2, 7



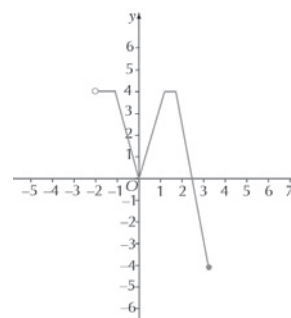
9.5. $D = [-7, 4[$ $D' = [-4, 4]$ Zeros: -5, 0



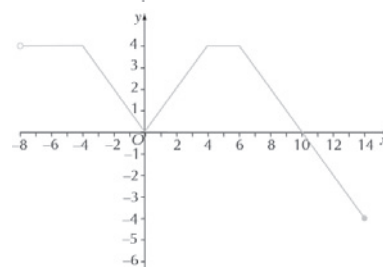
9.6. $D =]-4, 7]$ $D' = [-4, 4]$ Zeros: 0, 5



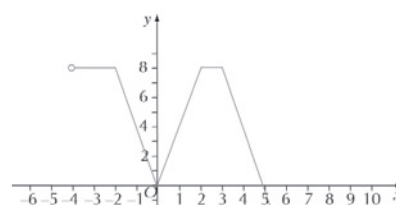
9.7. $D =]-2, \frac{7}{2}]$ $D' = [-4, 4]$ Zeros: $0, \frac{5}{2}$



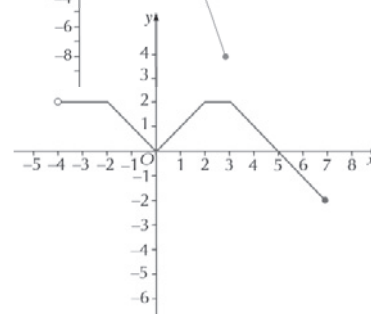
9.8. $D =]-8, 14]$ $D' = [-4, 4]$ Zeros: $0, 10$



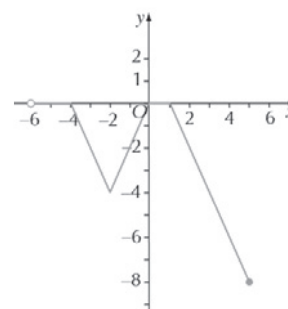
9.9. $D =]-4, 7]$ $D' = [-8, 8]$ Zeros: $0, 5$



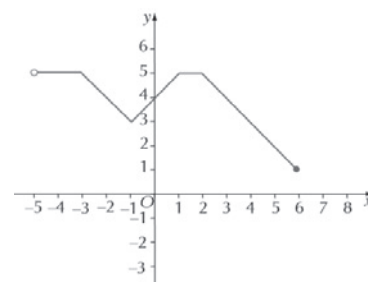
9.10. $D =]-4, 7]$ $D' = [-2, 2]$ Zeros: $0, 5$



9.11. $D =]-6, 5]$ $D' = [-8, 0]$ Zeros: $] -6, 4] \cup [0, 1]$



9.12. $D =]-5, 6]$ $D' = [1, 5]$ Zeros: não tem



10. $f(x) = (x - 2)^2 + 1$

10.1. $f(0) = (0 - 2)^2 + 1 = 4 + 1 = 5$

Logo, $A(0, 5)$.

$$f(x) = 5 \Leftrightarrow (x - 2)^2 + 1 = 5 \Leftrightarrow (x - 2)^2 = 4$$

$$\Leftrightarrow x - 2 = 2 \vee x - 2 = -2$$

$$\Leftrightarrow x = 4 \vee x = 0$$

Logo, $B(4, 5)$ e $C(4, 0)$.

10.2. $A_{[ABCO]} = \overline{AO} \times \overline{BO} = 5 \times 4 = 20 \text{ u. a.}$

10.3. $g(x) = f(2x) = (2x - 2)^2 + 1$

a) $g(0) = f(0) = 5$

Logo, $D(0, 5)$.

$$g(x) = 5 \Leftrightarrow (2x - 2)^2 + 1 = 5 \Leftrightarrow (2x - 2)^2 = 4 \Leftrightarrow 2x - 2 = 2 \vee 2x - 2 = -2$$

$$\Leftrightarrow 2x = 4 \vee 2x = 0 \Leftrightarrow x = 2 \vee x = 0$$

Logo, $E(2, 5)$ e $F(2, 0)$.

b) $A_{[ODEF]} = \overline{DO} \times \overline{EO} = 5 \times 2 = 10 \text{ u. a.}$

c) $A_{[ODEF]} = \frac{1}{2} A_{[ABCO]}$. A contração horizontal que transforma o gráfico de f no gráfico de g tem fator $\frac{1}{2}$, que corresponde ao fator pelo qual se multiplica $A_{[ABCO]}$ para se obter $A_{[ODEF]}$.

10.4. $h(x) = \frac{1}{2} f(x) = \frac{1}{2} [(x - 2)^2 + 1]$

a) $h(0) = \frac{1}{2} f(0) = \frac{5}{2}$

Logo, $G\left(0, \frac{5}{2}\right)$.

$$h(x) = \frac{5}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} [(x - 2)^2 + 1] = \frac{5}{2} \Leftrightarrow (x - 2)^2 + 1 = 5 \Leftrightarrow (x - 2)^2 = 4$$

$$\Leftrightarrow x - 2 = 2 \vee x - 2 = -2$$

$$\Leftrightarrow x = 4 \vee x = 0$$

Logo, $H\left(4, \frac{5}{2}\right)$ e $I(4, 0)$.

$$A_{[OGHI]} = \overline{GO} \times \overline{HO} = \frac{5}{2} \times 4 = 10 \text{ u. a.}$$

b) $A_{[OGHI]} = \frac{1}{2} A_{[ABCO]}$. A contração vertical que transforma o gráfico de f no gráfico de h

tem fator $\frac{1}{2}$, que corresponde ao fator pelo qual se multiplica $A_{[ABCO]}$ para se obter $A_{[OGHI]}$.

10.5. $j(x) = 3f\left(\frac{x}{2}\right) = 3\left(\frac{x}{2} - 2\right)^2 + 3$

$$j(0) = 3f(0) = 15$$

Logo, $J(0, 15)$.

$$j(x) = 15 \Leftrightarrow 3\left(\frac{x}{2} - 2\right)^2 + 3 = 15 \Leftrightarrow \left(\frac{x}{2} - 2\right)^2 + 1 = 5 \Leftrightarrow \left(\frac{x}{2} - 2\right)^2 = 4 \Leftrightarrow \frac{x}{2} - 2 = 2 \vee \frac{x}{2} - 2 = -2$$

$$\Leftrightarrow x - 4 = 4 \vee x - 4 = -4$$

$$\Leftrightarrow x = 8 \vee x = 0$$

Logo, $K(8, 15)$ e $L(8, 0)$.

$$A_{[OJKL]} = \overline{JO} \times \overline{KO} = 8 \times 15 = 120 \text{ u. a.}$$

$A_{[ABCO]} \times 6 = A_{[OJKL]}$. O gráfico de j obtém-se a partir do gráfico de f através de uma dilatação horizontal de fator 2 e uma dilatação vertical de fator 3, pelo que $A_{[ABCO]} \times 2 \times 3 = A_{[OJKL]}$

11.

11.1. f : não tem extremos absolutos, mínimo relativo: 0, máximo relativo: 0

g : não tem máximo absoluto, mínimo absoluto: -2 ; mínimos relativos: -2 e 0 ; não tem máximos relativos.

h : não tem extremos absolutos, mínimo relativo: 1, máximo relativo 1.

11.2. f é estritamente decrescente em $]-\infty, -1]$ e em $[1, +\infty[$ e é constante em $]-1, 1[$.

g é estritamente decrescente em $]-\infty, 0]$ e é estritamente crescente em $[0, 2[$ e em $[2, +\infty[$.

h é estritamente decrescente em $]-\infty, -2[$ e em $[2, +\infty[$ e é constante em $[-2, 2]$.

11.3. O gráfico da função g tem concavidade voltada para cima em $]-\infty, 2[$.

O gráfico da função h tem concavidade voltada para cima em $]-\infty, -2[$ e voltada para baixo em $[2, +\infty[$.

12.

12.1. $D =]-\infty, 9]$ $D' =]-\infty, 3] \cup \{4\}$

12.2. Os zeros de f são -2 , 6 e 9 .

12.3. f é estritamente crescente em $]-\infty, -1]$, em $]0, 3]$ e em $[8, 9]$

f é estritamente decrescente em $[-1, 0[$ e em $[3, 8]$.

12.4. f é positiva em $]-2, 6[$ e é negativa em $]-\infty, -2[\cup]6, 9[$.

12.5.a) $f(x) > 1 \Leftrightarrow x \in]1, 5[$

b) $f(x) \leq -2 \Leftrightarrow x \in]-\infty, -4] \cup \{8\}$

c) $f(x) < f(0) \Leftrightarrow f(x) < 4 \Leftrightarrow x \in]-\infty, 9] \setminus \{0\}$

12.6. $k \in]-2, 1]$

12.7. A função f é injetiva em $]0, 3]$, por exemplo.

13.

13.1. $D =]-2, 5] \setminus \{2\}$

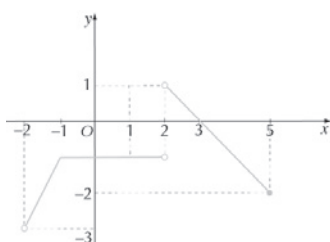
13.2. Se $x \in]-2, -1]$, então $f(x) = 0 \Leftrightarrow 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$.

Mas $-\frac{1}{2} \notin]-2, -1]$. Logo, a função não tem zeros neste intervalo.

Se $x \in]-1, 2[$, então $-1 = 0$, que é uma proposição falsa. Logo, a função não tem zeros neste intervalo. Se $x \in]2, 5]$, então $f(x) = 0 \Leftrightarrow -x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = 3$.

Como $3 \in]2, 5]$, então a função tem um zero neste intervalo e é 3 .

13.3.



Cálculos auxiliares

| x | $y = 2x + 1$ |
|------|--------------|
| -2 | -3 |
| -1 | -1 |

| x | $y = -x + 3$ |
|-----|--------------|
| 2 | 1 |
| 5 | -2 |

13.4. $D' =]-3, 1[$

14.

14.1. $D =]-\infty, 5]$

14.2. Se $x \in]-\infty, -1]$, então:

$$h(x) = 0 \Leftrightarrow (f - g)(x) = 0 \Leftrightarrow 2x + 1 - x + 3 = 0 \Leftrightarrow x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = -4$$

Como $-4 \in]-\infty, -1]$, então -4 é um zero da função h .

Se $x \in]-1, 3]$, então:

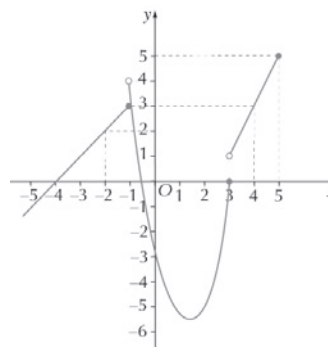
$$\begin{aligned} h(x) = 0 &\Leftrightarrow (f \times g)(x) = 0 \Leftrightarrow (2x + 1)(x - 3) = 0 \\ &\Leftrightarrow 2x + 1 = 0 \vee x - 3 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} \vee x = 3 \end{aligned}$$

Como $-\frac{1}{2} \in]-1, 3]$ e $3 \in]-1, 3]$, então $-\frac{1}{2}$ e 3 são zeros da função h . Se $x \in]3, 5[$, então:

$$\begin{aligned} h(x) = 0 &\Leftrightarrow (f \circ g)(x) = 0 \Leftrightarrow f(g(x)) = 0 \Leftrightarrow f(x - 3) = 0 \Leftrightarrow 2(x - 3) + 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow 2x - 5 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{5}{2} \end{aligned}$$

Como $\frac{5}{2} \notin]3, 5[$, então $\frac{5}{2}$ não é zero da função h . Assim, os zeros de h são $-4, -\frac{1}{2}$ e 3 .

$$\begin{aligned} 14.3. \quad h(x) &= \begin{cases} (f - g)(x) & \text{se } x \leq -1 \\ (f \times g)(x) & \text{se } -1 < x \leq 3 \\ (f \circ g)(x) & \text{se } 3 < x < 5 \end{cases} \\ &= \begin{cases} (2x + 1) - (x - 3) & \text{se } x \leq -1 \\ (2x + 1)(x - 3) & \text{se } -1 < x \leq 3 \\ 2(x - 3) + 1 & \text{se } 3 < x < 5 \end{cases} \\ &= \begin{cases} x + 4 & \text{se } x \leq -1 \\ 2x^2 - 5x - 3 & \text{se } -1 < x \leq 3 \\ 2x - 5 & \text{se } 3 < x < 5 \end{cases} \end{aligned}$$



14.4. $D' =]-\infty, 5]$

15.

15.1. $f(x) = |x| + 2 = \begin{cases} x + 2 & \text{se } x \geq 0 \\ -x + 2 & \text{se } x < 0 \end{cases}$

15.2. $f(x) = |x + 2| = \begin{cases} x + 2 & \text{se } x + 2 \geq 0 \\ -x - 2 & \text{se } x + 2 < 0 \end{cases} = \begin{cases} x + 2 & \text{se } x \geq -2 \\ -x - 2 & \text{se } x < -2 \end{cases}$

15.3. $f(x) = 2|x| - 1 = \begin{cases} 2x - 1 & \text{se } x \geq 0 \\ -2x - 1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$

15.4. $f(x) = |2x - 1| = \begin{cases} 2x - 1 & \text{se } 2x - 1 \geq 0 \\ -2x + 1 & \text{se } 2x - 1 < 0 \end{cases} = \begin{cases} 2x - 1 & \text{se } x \geq \frac{1}{2} \\ -2x + 1 & \text{se } x < \frac{1}{2} \end{cases}$

16.

16.1. $|x + 2| = 5 \Leftrightarrow x + 2 = 5 \vee x + 2 = -5 \Leftrightarrow x = 3 \vee x = -7$

C.S. = $\{-7, 3\}$

16.2. $|2x + 1| = -3$ Equação impossível.

C.S. = \emptyset

16.3. $|x^2 - 4x + 4| = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow (x - 2)^2 = 0 \Leftrightarrow x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$

C.S. = $\{2\}$

$$16.4. |x^2 + 2x| = 1 \Leftrightarrow x^2 + 2x = 1 \vee x^2 + 2x = -1 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 1 = 0 \vee x^2 + 2x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+4}}{2} \vee (x+1)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm 2\sqrt{2}}{2} \vee x+1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -1 - \sqrt{2} \vee x = -1 + \sqrt{2} \vee x = -1$$

$$\text{C.S.} = \{-1 - \sqrt{2}, -1, -1 + \sqrt{2}\}$$

$$16.5. |x+2| = 2x-5 \Leftrightarrow x+2 = 2x-5 \vee x+2 = -2x+5 \Leftrightarrow -x = -7 \vee 3x = 3 \Leftrightarrow x = 7 \vee x = 1$$

$$\text{C.S.} = \{1, 7\}$$

$$16.6. \sqrt{x-3} = 5 \Rightarrow x-3 = 25 \Leftrightarrow x = 28$$

Verificação: $\sqrt{28-3} = 5 \Leftrightarrow \sqrt{25} = 5 \Leftrightarrow 5 = 5$, logo 28 é solução da equação. C.S. = {28}

$$16.7. \sqrt{x+1} = x+1 \Rightarrow x+1 = (x+1)^2 \Leftrightarrow x+1 = x^2 + 2x + 1 \Leftrightarrow x^2 + x = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x+1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -1$$

Verificação:

$$\sqrt{0+1} = 0+1 \Leftrightarrow \sqrt{1} = 1 \Leftrightarrow 1 = 1, \text{ logo } 0 \text{ é solução da equação.}$$

$$\sqrt{-1+1} = -1+1 \Leftrightarrow \sqrt{0} = 0 \Leftrightarrow 0 = 0, \text{ logo } -1 \text{ é solução da equação. C.S.} = \{0, -1\}$$

$$16.8. \sqrt{2x+5} = 2x-1 \Rightarrow 2x+5 = (2x-1)^2 \Leftrightarrow 2x+5 = 4x^2 - 4x + 1 \Leftrightarrow 4x^2 - 6x - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 3x - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{4}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{3 \pm 5}{4}$$

$$\Leftrightarrow x = 2 \vee x = -\frac{1}{2}$$

Verificação:

$$\sqrt{2 \times 2 + 5} = 2 \times 2 - 1 \Leftrightarrow \sqrt{9} = 3 \Leftrightarrow 3 = 3, \text{ logo } 2 \text{ é solução da equação.}$$

$$\sqrt{2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) + 5} = 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) - 1 \Leftrightarrow \sqrt{4} = -2 \Leftrightarrow 2 = -2, \text{ logo } -\frac{1}{2} \text{ não é solução da equação.}$$

$$\text{C.S.} = \{2\}$$

$$16.9. \sqrt{x+6} - \sqrt{x} = 2 \Leftrightarrow \sqrt{x+6} = \sqrt{x} + 2$$

$$\Rightarrow x+6 = (\sqrt{x} + 2)^2$$

$$\Leftrightarrow x+6 = x + 4\sqrt{x} + 4$$

$$\Leftrightarrow 4\sqrt{x} = 2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{1}{4}$$

Verificação:

$$\sqrt{\frac{1}{4} + 6} - \sqrt{\frac{1}{4}} = 2 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{25}{4}} - \frac{1}{2} = 2 \Leftrightarrow \frac{5}{2} - \frac{1}{2} = 2 \Leftrightarrow 2 = 2, \text{ logo } \frac{1}{4} \text{ é solução da equação.}$$

$$\text{C.S.} = \left\{\frac{1}{4}\right\}$$

$$16.10. \sqrt[3]{x-3} = 5 \Leftrightarrow x-3 = 5^3 \Leftrightarrow x = 128$$

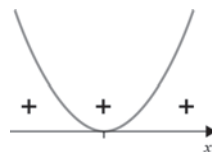
$$\text{C.S.} = \{128\}$$

17.

17.1. $(x-1)^2 > 0$

Cálculo auxiliar

$$(x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x-1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$$



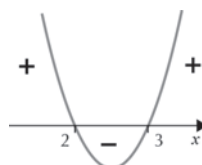
$$\text{C.S.} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

17.2. $x^2 - 5x + 6 > 0$

Cálculo auxiliar

$$x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = 2 \vee x = 3$$

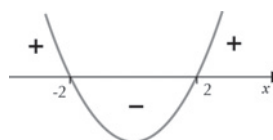


$$\text{C.S.} =]-\infty, 2[\cup]3, +\infty[$$

17.3. $x^2 - 4 \geq 0$

Cálculo auxiliar

$$x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = 2 \vee x = -2$$



$$\text{C.S.} =]-\infty, -2] \cup [2, +\infty[$$

17.4. $x^2 + 1 > 0$ Condição universal em \mathbb{R} .

$$\text{C.S.} = \mathbb{R}$$

17.5. $x^2 + 2x \leq 0$

Cálculo auxiliar

$$x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow x(x+2) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = -2$$



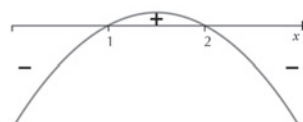
$$\text{C.S.} = [-2, 0]$$

17.6. $-x^2 + 3x - 2 \geq 0$

Cálculo auxiliar

$$-x^2 + 3x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 8}}{-2}$$

$$\Leftrightarrow x = 2 \vee x = 1$$

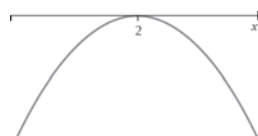


$$\text{C.S.} = [1, 2]$$

17.7. $-(x-2)^2 \geq 0$

Cálculo auxiliar

$$-(x-2)^2 = 0 \Leftrightarrow x-2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$$



$$\text{C.S.} = \{2\}$$

17.8. $|x + 1| > 0 \Leftrightarrow x + 1 > 0 \vee x + 1 < 0 \Leftrightarrow x > -1 \vee x < -1$

C.S. = $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$

17.9. $|x + 1| - 2 > 0 \Leftrightarrow |x + 1| > 2 \Leftrightarrow x + 1 > 2 \vee x + 1 < -2 \Leftrightarrow x > 1 \vee x < -3$

C.S. = $] -\infty, -3[\cup]1, +\infty[$

17.10. $|3x + 2| + 1 > 0 \Leftrightarrow |3x + 2| > -1$ Condição universal em \mathbb{R} .

C.S. = \mathbb{R}

17.11. $|x^2 + 4x| < 3 \Leftrightarrow x^2 + 4x < 3 \wedge x^2 + 4x > -3 \Leftrightarrow x^2 + 4x - 3 < 0 \wedge x^2 + 4x + 3 > 0$

Cálculos auxiliares

$$x^2 + 4x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 12}}{2}$$

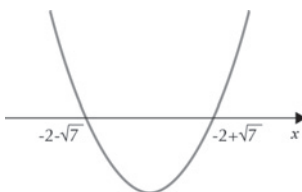
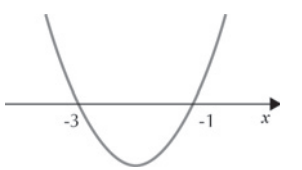
$$\Leftrightarrow x = \frac{-4 \pm 2\sqrt{7}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = -2 + \sqrt{7} \vee x = -2 - \sqrt{7}$$

$$x^2 + 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-4 \pm 2}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = -3 \vee x = -1$$

C.S. = $] -2 - \sqrt{7}, -2 + \sqrt{7}[\cap (]-\infty, -3[\cup]-1, +\infty[) =] -2 - \sqrt{7}, -3[\cup]-1, -2 + \sqrt{7}[$

17.12. $|x^2 - 4x| + 2 < -5 \Leftrightarrow |x^2 - 4x| < -7$ Condição impossível em \mathbb{R} .

C.S. = \emptyset

17.13. $|x + 1| > |2x + 3| \Leftrightarrow \sqrt{(x + 1)^2} > \sqrt{(2x + 3)^2} \Leftrightarrow (x + 1)^2 > (2x + 3)^2$

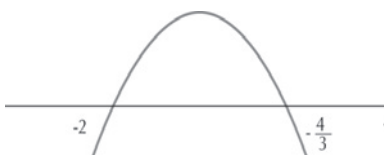
$\Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 > 4x^2 + 12x + 9 \Leftrightarrow -3x^2 - 10x - 8 > 0$

Cálculo auxiliar

$$-3x^2 - 10x - 8 = 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 10x + 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-10 \pm \sqrt{100 - 96}}{6}$$

$$\Leftrightarrow x = -2 \vee x = -\frac{4}{3}$$



C.S. = $] -2, -\frac{4}{3}[$


17.14. $|x - 2| \leq |3x + 1| \Leftrightarrow \sqrt{(x - 2)^2} \leq \sqrt{(3x + 1)^2} \Leftrightarrow (x - 2)^2 \leq (3x + 1)^2$

$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 \leq 9x^2 + 6x + 1 \Leftrightarrow -8x^2 - 10x + 3 \leq 0$

Cálculo auxiliar

$$-8x^2 - 10x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{10 \pm \sqrt{100 + 96}}{-16}$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{3}{2} \vee x = \frac{1}{4}$$



C.S. = $] -\infty, -\frac{3}{2}] \cup [\frac{1}{4}, +\infty[$

18.

18.1. $D_f = \{x \in \mathbb{R} : x - 2 \geq 0\} = [2, +\infty[$

$D'_f = [3, +\infty[$

$D_g = \mathbb{R}$

$D'_g = \mathbb{R}$

$$18.2. f(x) = 0 \Leftrightarrow 2\sqrt{x-2} + 3 = 0 \Leftrightarrow 2\sqrt{x-2} = -3$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x-2} = -\frac{3}{2} \quad \text{Condição impossível em } \mathbb{R}.$$

Logo, f não tem zeros.

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow 2\sqrt[3]{x+1} - 1 = 0 \Leftrightarrow \sqrt[3]{x+1} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x+1 = \frac{1}{8} \Leftrightarrow x = -\frac{7}{8} \quad \text{Logo, } -\frac{7}{8} \text{ é zero de } g.$$

$$18.3. a) f(x) = 3 \Leftrightarrow 2\sqrt{x-2} + 3 = 3 \Leftrightarrow 2\sqrt{x-2} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x-2} = 0 \Rightarrow x-2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

Verificação: $2\sqrt{2-2} + 3 = 3 \Leftrightarrow 2\sqrt{0} + 3 = 3 \Leftrightarrow 0 + 3 = 3 \Leftrightarrow 3 = 3$, logo 2 é solução da equação.

$$\text{C.S.} = \{2\}$$

$$b) f(x) = x+1 \Leftrightarrow 2\sqrt{x-2} + 3 = x+1 \Leftrightarrow 2\sqrt{x-2} = x-2 \Rightarrow 4(x-2) = (x-2)^2$$

$$\Leftrightarrow 4x-8 = x^2-4x+4 \Leftrightarrow x^2-8x+12 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{8 \pm \sqrt{64-48}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{8 \pm 4}{2} \Leftrightarrow x = 2 \vee x = 6$$

Verificação: $2\sqrt{2-2} + 3 = 2+1 \Leftrightarrow 2\sqrt{0} + 3 = 3 \Leftrightarrow 0 + 3 = 3 \Leftrightarrow 3 = 3$, logo 2 é solução da equação.

$2\sqrt{6-2} + 3 = 6+1 \Leftrightarrow 2\sqrt{4} + 3 = 7 \Leftrightarrow 2 \times 2 + 3 = 7 \Leftrightarrow 4 + 3 = 7 \Leftrightarrow 7 = 7$, logo 6 é solução da equação.

$$\text{C. S.} = \{2, 6\}$$

$$c) g(x) = 1 \Leftrightarrow 2\sqrt[3]{x+1} - 1 = 1 \Leftrightarrow 2\sqrt[3]{x+1} = 2 \Leftrightarrow \sqrt[3]{x+1} = 1 \Leftrightarrow x+1 = 1 \Leftrightarrow x = 0$$

$$\text{C.S.} = \{0\}$$

$$d) g(x) = x-1 \Leftrightarrow 2\sqrt[3]{x+1} - 1 = x-1 \Leftrightarrow 2\sqrt[3]{x+1} = x \Leftrightarrow 8(x+1) = x^3$$

$$\Leftrightarrow 8x+8 = x^3 \Leftrightarrow x^3-8x-8 = 0$$

Sabe-se que $g(-2) = -3 \Leftrightarrow g(-2) = -2-1$, ou seja, -2 é solução da equação. Assim:

| | | | | |
|----|----|----|----|----|
| -2 | 1 | 0 | -8 | -8 |
| | -2 | 4 | 8 | |
| | 1 | -2 | -4 | 0 |

Logo:

$$x^3-8x-8 = 0 \Leftrightarrow x = -2 \vee x^2-2x-4 = 0 \Leftrightarrow x = -2 \vee x = \frac{2 \pm \sqrt{4+16}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = -2 \vee x = \frac{2 \pm 2\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 1 - \sqrt{5} \vee x = 1 + \sqrt{5}$$

$$\text{C.S.} = \{1 - \sqrt{5}, 1 + \sqrt{5}, -2\}$$

19.

$$19.1. f(-1) = (-1)^3 - 4 \times (-1)^2 + (-1) + 6 = -1 - 4 - 1 + 6 = 0$$

$$19.2. f(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -1 \vee x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -1 \vee x = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = -1 \vee x = \frac{5 \pm 1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = -1 \vee x = 2 \vee x = 3$$

$$\text{C.S.} = \{-1, 2, 3\}$$

Cálculo auxiliar

| | | | | |
|----|----|----|----|---|
| -1 | 1 | -4 | 1 | 6 |
| | -1 | 5 | -6 | |
| | 1 | -5 | 6 | 0 |

19.3. a) $f(x) \leq 0 \Leftrightarrow x^3 - 4x^2 + x + 6 \leq 0 \Leftrightarrow (x+1)(x^2 - 5x + 6) \leq 0$

| x | $-\infty$ | -1 | | 2 | | 3 | $+\infty$ |
|----------------|-----------|------|-----|-----|-----|-----|-----------|
| $x+1$ | $-$ | 0 | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $x^2 - 5x + 6$ | $+$ | $+$ | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ |
| $f(x)$ | $-$ | 0 | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ |

C. S. = $]-\infty, -1] \cup [2, 3]$

b) $f(x)(x^2 + 1) > 0 \Leftrightarrow f(x) > 0$, uma vez que $x^2 + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Recorrendo à tabela da alínea anterior, obtém-se:

C.S. = $]-1, 2[\cup]3, +\infty[$

c) $f(x)(x-3) \leq 0$

| x | $-\infty$ | -1 | | 2 | | 3 | $+\infty$ |
|-------------|-----------|------|-----|-----|-----|-----|-----------|
| $f(x)$ | $-$ | 0 | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ |
| $x-3$ | $-$ | $-$ | $-$ | $-$ | $-$ | 0 | $+$ |
| $f(x)(x-3)$ | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ | 0 | $+$ |

C.S. = $[-1, 2] \cup \{3\}$

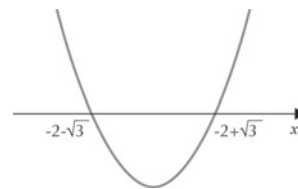
d) $f(x) > 6 \Leftrightarrow x^3 - 4x^2 + x + 6 > 6 \Leftrightarrow x^3 - 4x^2 + x > 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 4x + 1) > 0$

Cálculo auxiliar

$$x^2 - 4x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{16-4}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-4 \pm 2\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = 2 + \sqrt{3} \vee x = 2 - \sqrt{3}$$



| x | $-\infty$ | 0 | | $2 - \sqrt{3}$ | | $2 + \sqrt{3}$ | $+\infty$ |
|-------------------|-----------|-----|-----|----------------|-----|----------------|-----------|
| x | $-$ | 0 | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $x^2 - 4x + 1$ | $+$ | $+$ | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ |
| $x(x^2 - 4x + 1)$ | $-$ | 0 | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ |

C.S. = $]0, 2 - \sqrt{3}[\cup]2 + \sqrt{3}, +\infty[$

Tema V – Estatística

Páginas 28 a 32

1.

1.1. $a_i = i$ $\sum_{i=1}^{30} i$

1.2. $a_i = 2i$ $\sum_{i=1}^{15} 2i$

1.3. $a_i = 5i$ $\sum_{i=1}^{20} 5i$

1.4. $a_i = i^2$ $\sum_{i=1}^{15} i^2$

1.5. $a_i = 4i - 1$ $\sum_{i=1}^9 (4i - 1)$

1.6. $a_i = 4i + 2$ $\sum_{i=1}^{10} (4i + 2)$

2.

2.1. $\sum_{i=1}^{30} a_i$

2.3. $\sum_{i=1}^{20} (a_i \times b_i)$

2.5. $\sum_{i=1}^{20} (a_i x^i)$

2.2. $\sum_{i=1}^{10} (i \times a_i)$

2.4. $\sum_{i=2}^{10} (a_i - b_i)$

3.

$$3.1. \sum_{i=3}^7 (i-1) = 3-1+4-1+5-1+6-1+7-1 = 20$$

$$3.2. \sum_{i=1}^5 (2i+1) = 2 \times 1 + 1 + 2 \times 2 + 1 + 2 \times 3 + 1 + 2 \times 4 + 1 + 2 \times 5 + 1 = 35$$

$$3.3. \sum_{i=1}^5 (2\sqrt{i}) = 2\sqrt{1} + 2\sqrt{2} + 2\sqrt{3} + 2\sqrt{4} + 2\sqrt{5} = 2 + 2\sqrt{2} + 2\sqrt{3} + 4 + 2\sqrt{5} = 6 + 2\sqrt{2} + 2\sqrt{3} + 2\sqrt{5}$$

$$3.4. \sum_{i=1}^6 2^i = 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6 = 126$$

$$3.5. \sum_{i=0}^5 i^2 = 0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 55$$

4.

$$4.1. \sum_{i=0}^5 x^{i-1} = x^{(-1)} + x^0 + x^1 + x^2 + x^3 + x^4 = \frac{1}{x} + 1 + x + x^2 + x^3 + x^4$$

$$4.2. \sum_{i=1}^6 ix^i = x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + 5x^5 + 6x^6$$

$$4.3. \sum_{i=1}^7 (i-1)x^{7-i} = 0x^6 + 1x^5 + 2x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 5x + 6 = x^5 + 2x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 5x + 6$$

$$4.4. \sum_{i=1}^4 a_i x^i = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4$$

$$4.5. \sum_{i=1}^n x^{n-i} = x^{n-1} + x^{n-2} + x^{n-3} + \dots + x^2 + x + 1$$

$$5. \sum_{i=1}^n x_i = 3$$

$$5.1. \sum_{i=1}^n 2x_i = 2 \sum_{i=1}^n x_i = 2 \times 3 = 6$$

$$5.2. \sum_{i=1}^n (-x_i) = -\sum_{i=1}^n x_i = -3$$

$$5.3. \sum_{i=1}^n (x_i + 1) = \sum_{i=1}^n x_i + \sum_{i=1}^n 1 = 3 + n$$

$$5.4. \sum_{i=1}^n (2x_i - 3) = 2 \sum_{i=1}^n x_i - 3 \sum_{i=1}^n 1 = 2 \times 3 - 3n = 6 - 3n$$

$$5.5. \sum_{i=1}^n (5x_i + 2) = 5 \sum_{i=1}^n x_i + 2 \sum_{i=1}^n 1 = 5 \times 3 + 2n = 15 + 2n$$

$$6. \sum_{i=1}^n x_i = 10 \quad \sum_{i=1}^n y_i = 5$$

$$6.1. \sum_{i=1}^n (x_i + y_i) = \sum_{i=1}^n x_i + \sum_{i=1}^n y_i = 10 + 5 = 15$$

$$6.2. \sum_{i=1}^n (2y_i - x_i) = 2 \sum_{i=1}^n y_i - \sum_{i=1}^n x_i = 2 \times 5 - 10 = 0$$

$$6.3. \sum_{i=1}^n (5x_i + 2y_i) = 5 \sum_{i=1}^n x_i + 2 \sum_{i=1}^n y_i = 5 \times 10 + 2 \times 5 = 60$$

$$7. \quad \sum_{i=1}^n x_i = a$$

$$7.1. \quad \sum_{i=1}^n 3x_i = 3 \sum_{i=1}^n x_i = 3a$$

$$7.2. \quad \sum_{i=1}^n (-2x_i) = -2 \sum_{i=1}^n x_i = -2a$$

$$7.3. \quad \sum_{i=1}^n (x_i - 1) = \sum_{i=1}^n x_i - \sum_{i=1}^n 1 = a - n$$

$$7.4. \quad \sum_{i=1}^n (3x_i + 1) = 3 \sum_{i=1}^n x_i + \sum_{i=1}^n 1 = 3a + n$$

$$7.5. \quad \sum_{i=1}^n (2x_i - 3) = 2 \sum_{i=1}^n x_i - 3 \sum_{i=1}^n 1 = 2a - 3n$$

8.

$$8.1. \quad \sum_{i=1}^{100} (5i) = 5 \sum_{i=1}^{100} i \text{ – proposição verdadeira}$$

$$\sum_{i=1}^{100} (5i) = (5 \times 1) + (5 \times 2) + (5 \times 3) + \dots + (5 \times 100) = 5 \times (1 + 2 + 3 + \dots + 100) = 5 \sum_{i=1}^{100} i$$

$$8.2. \quad \sum_{i=1}^{100} (5i) = \sum_{i=0}^{100} (5i) \text{ – proposição verdadeira}$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{100} (5i) &= (5 \times 1) + (5 \times 2) + (5 \times 3) + \dots + (5 \times 100) \\ &= (5 \times 0) + (5 \times 1) + (5 \times 2) + (5 \times 3) + \dots + (5 \times 100) \\ &= \sum_{i=0}^{100} (5i) \end{aligned}$$

$$8.3. \quad \sum_{i=1}^{100} (5i) = \sum_{i=1}^{50} (5i) + \sum_{i=50}^{100} (5i) \text{ – proposição falsa}$$

$$\sum_{i=1}^{100} (5i) = (5 \times 1) + (5 \times 2) + \dots + (5 \times 49) + (5 \times 50) + (5 \times 51) + \dots + (5 \times 100)$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{50} (5i) + \sum_{i=50}^{100} (5i) &= [(5 \times 1) + (5 \times 2) + \dots + (5 \times 49) + (5 \times 50)] + [(5 \times 50) + \dots + (5 \times 100)] \\ &= \sum_{i=1}^{100} (5i) + 5 \times 50 \neq \sum_{i=1}^{100} (5i) \end{aligned}$$

$$8.4. \quad \sum_{i=1}^{100} i^2 = \left(\sum_{i=1}^{100} i \right)^2 \text{ – proposição falsa}$$

$$\left(\sum_{i=1}^{100} i \right)^2 = (1 + 2 + 3 + \dots + 100)^2 \neq 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 100^2 = \sum_{i=1}^{100} i^2$$

$$8.5. \quad \sum_{i=1}^{100} (5+i) = 5 + \sum_{i=1}^{100} i \text{ – proposição falsa}$$

$$\sum_{i=1}^{100} (5+i) = 5 \sum_{i=1}^{100} 1 + \sum_{i=1}^{100} i = 500 + \sum_{i=1}^{100} i \neq 5 + \sum_{i=1}^{100} i$$

8.6. $\sum_{i=1}^{100} (5+i) = \sum_{i=1}^{100} 5 + \sum_{i=1}^{100} i$ – proposição verdadeira

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{100} (5+i) &= (5+1) + (5+2) + (5+3) + \dots + (5+100) \\ &= (5+5+5+\dots+5) + (1+2+3+\dots+100) = \sum_{i=1}^{100} 5 + \sum_{i=1}^{100} i\end{aligned}$$

8.7. $\sum_{i=1}^{100} (5+i) = 105 + \sum_{i=11}^{100} (5+i)$ – proposição verdadeira

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{100} (5+i) &= \sum_{i=1}^{10} (5+i) + \sum_{i=11}^{100} (5+i) = 5 \sum_{i=1}^{10} 1 + \sum_{i=1}^{10} i + \sum_{i=11}^{100} (5+i) \\ &= 5 \times 10 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + \sum_{i=11}^{100} (5+i) \\ &= 105 + \sum_{i=11}^{100} (5+i)\end{aligned}$$

8.8. $\sum_{i=1}^{100} (5+i)^2 = 2500 + \sum_{i=1}^{100} i^2$ – proposição falsa

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{100} (5+i)^2 &= \sum_{i=1}^{100} (25+10i+i^2) = 25 \sum_{i=1}^{100} 1 + 10 \sum_{i=1}^{100} i + \sum_{i=1}^{100} i^2 \\ &= 25 \times 100 + 10 \sum_{i=1}^{100} i + \sum_{i=1}^{100} i^2 = 2500 + 10 \sum_{i=1}^{100} i + \sum_{i=1}^{100} i^2 \neq 2500 + \sum_{i=1}^{100} i^2\end{aligned}$$

9. $x_1 = 2; x_2 = -1; x_3 = 4; x_4 = 3; x_5 = 1$ e $y_1 = 3; y_2 = 2; y_3 = 1; y_4 = 0; y_5 = -3$

9.1. $\sum_{i=1}^5 x_i = 2 - 1 + 4 + 3 + 1 = 9$

9.2. $\sum_{i=1}^5 y_i = 3 + 2 + 1 + 0 - 3 = 3$

9.3. $\sum_{i=1}^5 (x_i y_i) = 2 \times 3 + (-1) \times 2 + 4 \times 1 + 3 \times 0 + 1 \times (-3) = 5$

9.4. $\sum_{i=1}^5 (x_i + y_i) = \sum_{i=1}^5 x_i + \sum_{i=1}^5 y_i = 9 + 3 = 12$

9.5. $\sum_{i=1}^5 (x_i + 2y_i) = \sum_{i=1}^5 x_i + 2 \sum_{i=1}^5 y_i = 9 + 2 \times 3 = 15$

9.6. $\sum_{i=1}^5 (2x_i - 3y_i) = 2 \sum_{i=1}^5 x_i - 3 \sum_{i=1}^5 y_i = 2 \times 9 - 3 \times 3 = 9$

10.

10.1. $\sum_{i=1}^{100} (3+i) = 10k + \sum_{i=6}^{100} (3+i) \Leftrightarrow \sum_{i=1}^5 (3+i) + \sum_{i=6}^{100} (3+i) = 10k + \sum_{i=6}^{100} (3+i)$
 $\Leftrightarrow \sum_{i=1}^5 (3+i) = 10k$
 $\Leftrightarrow (3+1) + (3+2) + (3+3) + (3+4) + (3+5) = 10k$
 $\Leftrightarrow 30 = 10k$
 $\Leftrightarrow k = 3$

$$\begin{aligned}
10.2. \sum_{i=1}^{100} (i+2) &= \sum_{i=1}^{90} (i+2) + 15k \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{90} (i+2) + \sum_{i=91}^{100} (i+2) = \sum_{i=1}^{90} (i+2) + 15k \\
&\Leftrightarrow \sum_{i=91}^{100} (i+2) = 15k \\
&\Leftrightarrow \sum_{i=91}^{100} i + \sum_{i=91}^{100} 2 = 15k \\
&\Leftrightarrow 91 + 92 + 93 + 94 + 95 + 96 + 97 + 98 + 99 + 100 + 2 \times 10 = 15k \\
&\Leftrightarrow 975 = 15k \\
&\Leftrightarrow k = 65
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
10.3. \sum_{i=1}^{20} (2i+1) &= 5k + \sum_{i=1}^{20} (2i) \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{20} (2i) + \sum_{i=1}^{20} 1 = 5k + \sum_{i=1}^{20} (2i) \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{20} 1 = 5k \\
&\Leftrightarrow 20 = 5k \\
&\Leftrightarrow k = 4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
10.4. \sum_{i=1}^{20} (i+k) &= 40 + \sum_{i=1}^{20} i \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{20} i + \sum_{i=1}^{20} k = 40 + \sum_{i=1}^{20} i \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{20} i = 40 \\
&\Leftrightarrow 20k = 40 \\
&\Leftrightarrow k = 2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
10.5. \sum_{i=1}^{100} [(i-1)(i+1)] &= k + \sum_{i=1}^{100} i^2 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{100} (i^2 - 1) = k + \sum_{i=1}^{100} 1 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{100} i^2 - \sum_{i=1}^{100} 1 = k + \sum_{i=1}^{100} i^2 \\
&\Leftrightarrow -\sum_{i=1}^{100} 1 = k \\
&\Leftrightarrow k = -100
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
10.6. \sum_{i=1}^{10} (i+1)^2 &= 3k + \sum_{i=1}^{10} i^2 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{10} (i^2 + 2i + 1) = 3k + \sum_{i=1}^{10} i^2 \\
&\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{10} i^2 + \sum_{i=1}^{10} (2i) + \sum_{i=1}^{10} 1 = 3k + \sum_{i=1}^{10} i^2 = 2 \sum_{i=1}^{10} i + 10 = 3k \\
&\Leftrightarrow 2(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10) + 10 = 3k \\
&\Leftrightarrow 2 \times 55 + 10 = 3k \\
&\Leftrightarrow 120 = 3k \\
&\Leftrightarrow k = 40
\end{aligned}$$

11.

$$11.1. \bar{x} = \frac{2 + 3 + 5 + 3 + 3 + 2 + 4 + 8 + 7 + 2 + 5 + 4 + 7 + 6 + 3 + 1 + 7 + 9 + 3 + 2}{20} = \frac{86}{20} = 4,3$$

$$SS_x = \sum_{i=1}^{20} x_i^2 - 20 \times 4,3^2 = 472 - 369,8 = 102,2$$

$$s_x = \sqrt{\frac{102,2}{20-1}} \approx 2,319$$

$$11.2. \bar{x} = \frac{1 \times 12 + 2 \times 15 + 3 \times 33 + 4 \times 22 + 5 \times 18}{12 + 15 + 33 + 22 + 18} = \frac{319}{100} = 3,19$$

$$\begin{aligned} SS_x &= \sum_{i=1}^5 (\tilde{x}_i - \bar{x})^2 n_i \\ &= (1 - 3,19)^2 \times 12 + (2 - 3,19)^2 \times 15 + (3 - 3,19)^2 \times 33 + (4 - 3,19)^2 \times 22 + (5 - 3,19)^2 \times 18 \\ &= 153,3897 \end{aligned}$$

$$s_x = \sqrt{\frac{153,3897}{100-1}} \approx 1,245$$

$$12. \quad x_1 = 2; x_2 = 1; x_3 = 4; x_4 = 3; x_5 = 1; x_6 = 3$$

$$12.1. \sum_{i=1}^6 x_i = 2 + 1 + 4 + 3 + 1 + 3 = 14$$

$$12.2. \sum_{i=1}^6 (x_i)^2 = 2^2 + 1^2 + 4^2 + 3^2 + 1^2 + 3^2 = 4 + 1 + 16 + 9 + 1 + 9 = 40$$

$$12.3. \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^6 x_i}{6} = \frac{14}{6} = \frac{7}{3} \approx 2,33$$

$$12.4. \sum_{i=1}^6 (x_i - \bar{x}) = \sum_{i=1}^6 x_i - \sum_{i=1}^6 \bar{x} = 14 - 6 \times \frac{7}{3} = 0$$

$$12.5. \sum_{i=1}^6 (x_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^6 x_i^2 - 2\bar{x} \sum_{i=1}^6 x_i + \sum_{i=1}^6 \bar{x}^2 = 40 - 2 \times \frac{7}{3} \times 14 + 6 \times \left(\frac{7}{3}\right)^2 = \frac{22}{3} \approx 7,33$$

$$12.6. \sum_{i=1}^6 (x_i)^2 - 6\bar{x}^2 = 40 - 6 \times \left(\frac{7}{3}\right)^2 = \frac{22}{3} \approx 7,33$$

$$12.7. \frac{\sum_{i=1}^6 (x_i - \bar{x})^2}{5} = \frac{\frac{22}{3}}{5} = \frac{22}{15} \approx 1,47$$

$$12.8. s_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^6 (x_i - \bar{x})^2}{5}} = \sqrt{\frac{22}{15}} \approx 1,21$$

13.

$$13.1. \bar{x} = \frac{11 + 9 + 10 + 6 + 9 + 7 + 4}{7} = \frac{56}{7} = 8$$

$$13.2. SS_x = \sum_{i=1}^7 x_i^2 - 7\bar{x}^2 = 11^2 + 9^2 + 10^2 + 6^2 + 9^2 + 7^2 + 4^2 - 7 \times 8^2 = 36$$

$$13.3. s_x = \sqrt{\frac{SS_x}{6}} = \sqrt{6} \approx 2,45$$

14.

14.1. Preço médio de um par de meias: $\bar{x} = 3$

Preço médio de um par de meias após o desconto: $\bar{y} = \bar{x} - 0,50 = 3 - 0,50 = 2,50 \text{ €}$

14.2. Preço médio de um par de meias: $\bar{x} = 3$

Preço médio de um par de meias após o desconto: $\bar{y} = 0,8\bar{x} = 0,8 \times 3 = 2,40 \text{ €}$

$$15. \sum_{i=1}^{50} (x_i - 10) = 200$$

$$15.1. \sum_{i=1}^{50} (x_i - 10) = 200 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{50} x_i - \sum_{i=1}^{50} 10 = 200$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{50} x_i - 50 \times 10 = 20$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{50} x_i = 700$$

$$\text{Logo, } \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{50} x_i}{50} = \frac{700}{50} = 14 \text{ €}.$$

$$15.2. \bar{x} = \frac{50 \times 14 + 10 \times 12}{50 + 10} = \frac{820}{60} \approx 13,67 \text{ €}$$

16.

$$16.1. y_i = 2x_i + 1$$

$$16.2. \bar{x} = \frac{1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6}{6} = \frac{21}{6} = 3,5$$

$$SS_x = \sum_{i=1}^6 x_i^2 - 6 \times \bar{x}^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 - 6 \times 3,5^2 = 91 - 73,5 = 17,5$$

$$s_x = \sqrt{\frac{SS_x}{5}} = \sqrt{\frac{17,5}{5}} \approx 1,87$$

$$16.3. \bar{y} = 2\bar{x} + 1 = 2 \times 3,5 + 1 = 8$$

$$SS_y = \sum_{i=1}^6 y_i^2 - 6 \times \bar{y}^2 = \sum_{i=1}^6 (2x_i + 1)^2 - 6 \times \bar{y}^2$$

$$= \sum_{i=1}^6 (4x_i^2 + 4x_i + 1) - 6 \times \bar{y}^2$$

$$= 4 \sum_{i=1}^6 x_i^2 + 4 \sum_{i=1}^6 x_i + 6 - 6 \times 8^2 = 4 \times 9 + 4 \times 21 + 6 - 6 \times 8^2 = 70$$

$$s_y = 2s_x \approx 2 \times 1,87 = 3,74$$

$$16.4. z_i = x_i + y_i$$

$$\bar{z} = \bar{x} + \bar{y} = 3,5 + 8 = 11,5$$

$$s_z = s_x + s_y \approx 1,87 + 3,74 = 5,61$$

$$17. s_x = 1,6 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{SS_x}{9}} = 1,6 \Leftrightarrow \frac{SS_x}{9} = 2,56 \Leftrightarrow SS_x = 23,04 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{10} x_i^2 - 10\bar{x} = 23,04$$

$$\Leftrightarrow 89,6 - 10\bar{x} = 23,04 \Leftrightarrow 10\bar{x} = 66,56 \Leftrightarrow \bar{x} = 6,656$$

$$18. 10 - 3k = 2 \Leftrightarrow k = \frac{8}{3}$$

$$p < \frac{1}{\left(\frac{8}{3}\right)^2} \Leftrightarrow p < \frac{9}{64} (\approx 0,14)$$

Logo, um limite superior para a percentagem de dias em que a temperatura mínima foi inferior a 2º é 14%.

19. Labrador

$$\text{Média: } \frac{3 + 5 + 4 + 5 + 5 + 4 + 4 + 4 + 4 + 5}{10} = 4,3$$

$$\text{Desvio-padrão: } \sqrt{\frac{3^2 + 5^2 + 4^2 + 5^2 + 5^2 + 4^2 + 4^2 + 4^2 + 4^2 + 5^2 - 10 \times 4,3^2}{9}} \approx 0,67$$

Serra da Estrela

$$\text{Média: } \frac{4 + 4 + 3 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 4 + 4}{10} = 4,4$$

$$\text{Desvio-padrão: } \sqrt{\frac{4^2 + 4^2 + 3^2 + 5^2 + 5^2 + 5^2 + 5^2 + 5^2 + 4^2 + 4^2 - 10 \times 4,4^2}{9}} \approx 0,70$$

Pastor Alemão

$$\text{Média: } \frac{5 + 4 + 3 + 5 + 4 + 5 + 3 + 5 + 5 + 5}{10} = 4,4$$

$$\text{Desvio-padrão: } \sqrt{\frac{5^2 + 4^2 + 3^2 + 5^2 + 4^2 + 5^2 + 3^2 + 5^2 + 5^2 + 5^2 - 10 \times 4,4^2}{9}} \approx 0,84$$

Assim, o Serra da Estrela venceu o concurso.

20. Aluno A

$$\text{Média: } \frac{16 + 17 + 16 + 17 + 18 + 17 + 16}{7} \approx 16,7$$

$$\text{Desvio-padrão: } \sqrt{\frac{16^2 + 17^2 + 16^2 + 17^2 + 18^2 + 17^2 + 16^2 - 7 \times 16,7^2}{6}} \approx 1,06$$

Mediana: P_{50}

$$\frac{50 \times 7}{100} = 3,5$$

Logo, $P_{50} = x_{3+1} = 17$.

Aluno B

$$\text{Média: } \frac{19 + 13 + 17 + 12 + 19 + 19 + 18}{7} \approx 16,7$$

$$\text{Desvio-padrão: } \sqrt{\frac{19^2 + 13^2 + 17^2 + 12^2 + 19^2 + 19^2 + 18^2 - 7 \times 16,7^2}{6}} \approx 2,98$$

Mediana: P_{50}

$$\frac{50 \times 7}{100} = 3,5$$

Logo, $P_{50} = x_{3+1} = 18$.

Os alunos A e B têm a mesma média de classificações. As classificações do aluno A têm um menor desvio-padrão do que as classificações do aluno B, o que significa que as suas notas estão mais próximas da média. O aluno B tem um valor da mediana das classificações mais alto, o que quer dizer que tem melhores notas a 50% das disciplinas do que o aluno A.

21.

$$\text{21.1. a) } \bar{x} = \frac{0 \times 89 + 1 \times 67 + 2 \times 13 + 3 \times 7 + 4 \times 4}{89 + 67 + 13 + 7 + 4} = \frac{130}{180} = 0,72$$

$$\text{b) } SS_x = \sum_{i=1}^5 x_i^2 - 180\bar{x}^2 = 246 - 180 \times 0,72^2 \approx 152,69$$

$$\text{c) } s_x^2 = \frac{SS_x}{179} \approx \frac{152,69}{179} \approx 0,85$$

$$\text{d) } s_x = \sqrt{s_x^2} \approx \sqrt{0,85} \approx 0,92$$

$$\text{21.2. } \frac{13 + 7 + 4}{180} \approx 0,13, \text{ ou seja, } 13\%.$$

22.

$$\text{22.1. } \bar{x} =$$

$$\frac{1 \times 32 + 2 \times 43 + 3 \times 51 + 4 \times 34 + 5 \times 57 + 6 \times 65 + 7 \times 74 + 8 \times 89 + 9 \times 45 + 10 \times 31 + 11 \times 33 + 12 \times 41 + 13 \times 31 + 14 \times 12 + 15 \times 5 + 16 \times 2}{32 + 43 + 51 + 34 + 57 + 65 + 74 + 89 + 45 + 31 + 33 + 41 + 31 + 12 + 5 + 2}$$

$$\approx 7,07$$

$$\text{22.2. } s_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{645} x_i^2 - 645\bar{x}^2}{644}} \approx 3,51$$

$$\text{22.3. } \frac{10 \times 645}{100} = 64,5, \text{ logo } P_{10} = x_{65} = 2$$

$$\frac{20 \times 645}{100} = 129, \text{ logo } P_{20} = \frac{x_{129} + x_{130}}{2} = \frac{4 + 4}{2} = 4$$

$$\frac{40 \times 645}{100} = 258, \text{ logo } P_{40} = \frac{x_{258} + x_{259}}{2} = \frac{6 + 6}{2} = 6$$

$$\frac{60 \times 645}{100} = 387, \text{ logo } P_{60} = \frac{x_{387} + x_{388}}{2} = \frac{8 + 8}{2} = 8$$

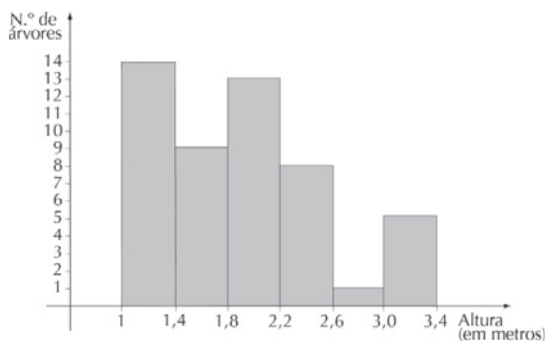
$$\frac{80 \times 645}{100} = 516, \text{ logo } P_{80} = \frac{x_{516} + x_{517}}{2} = \frac{10 + 10}{2} = 10$$

23.

23.1.

| Altura | Número de árvores |
|------------|-------------------|
| [1,0; 1,4[| 14 |
| [1,4; 1,8[| 9 |
| [1,8; 2,2[| 13 |
| [2,2; 2,6[| 8 |
| [2,6; 3,0[| 1 |
| [3,0; 3,4[| 5 |

23.2.



23.3. $A_{\text{total}} = 14 + 9 + 13 + 8 + 1 + 5 = 50$

Como $0 < \frac{10 \times 50}{100} < 14$ então $P_{10} \in [1; 1,4[$.

$$14(P_{10} - 1) = \frac{10 \times 50 \times 0,4}{100} \Leftrightarrow P_{10} - 1 = \frac{2}{14} \Leftrightarrow P_{10} = \frac{8}{7}$$

Logo, $P_{10} \approx 1,14$.

Como $0 < \frac{20 \times 50}{100} < 14$, então $P_{20} \in [1; 1,4[$.

$$14(P_{20} - 1) = \frac{20 \times 50 \times 0,4}{100} \Leftrightarrow P_{20} - 1 = \frac{2}{7} \Leftrightarrow P_{20} = \frac{9}{7}$$

Logo, $P_{20} \approx 1,29$.

Como $14 + 9 < \frac{50 \times 50}{100} < 14 + 9 + 13$, então $P_{50} \in [1,8; 2,2[$.

$$14 \times 0,4 + 9 \times 0,4 + 13(P_{50} - 1,8) = \frac{50 \times 50 \times 0,4}{100} \Leftrightarrow 13(P_{50} - 1,8) = 10 - 9,2$$

$$\Leftrightarrow P_{50} - 1,8 = \frac{4}{65} \Leftrightarrow P_{50} = \frac{121}{65}$$

Logo, $P_{50} \approx 1,86$.

Como $14 + 9 + 13 < \frac{75 \times 50}{100} < 14 + 9 + 13 + 8$, então $P_{75} \in [2,2; 2,6[$.

$$14 \times 0,4 + 9 \times 0,4 + 13 \times 0,4 + 8(P_{75} - 2,2) = \frac{75 \times 50 \times 0,4}{100} \Leftrightarrow 8(P_{75} - 2,2) = 15 - 14,4$$

$$\Leftrightarrow P_{75} - 2,2 = \frac{3}{40} \Leftrightarrow P_{75} = \frac{91}{40}$$

Logo, $P_{75} \approx 2,28$.

23.4. $1,65 \in [1,8; 2,2[$

$$0,4 \times 14 + 9(1,65 - 1,8) = \frac{k \times 50 \times 0,4}{100} \Leftrightarrow 7,85 = \frac{k}{5} \Leftrightarrow k = 39,25$$

Logo, 1,65 pertence ao percentil de ordem 39.

Testes de avaliação

Teste n.º 1

Páginas 35 a 37

Grupo I

1. p : proposição falsa q : proposição falsa

Traduzindo a afirmação da opção A para linguagem simbólica, obtém-se $\sim p \vee q$, que é uma proposição verdadeira, uma vez que é a disjunção entre uma proposição verdadeira ($\sim p$) e uma proposição falsa (q). Logo, a opção correta é a A. Relativamente às restantes opções: na opção B obtém-se $p \wedge q$, que é uma proposição falsa, por se tratar da conjunção de duas proposições falsas; na opção C obtém-se $\sim p \Rightarrow q$, que é uma proposição falsa, uma vez que se trata de uma implicação em que o antecedente é verdadeiro e o consequente é falso; na opção D obtém-se $p \Leftrightarrow \sim q$, que é uma proposição falsa, uma vez que é uma equivalência entre uma proposição falsa e uma proposição verdadeira.

(Opção A)

$$2. \sim [\sim (p \wedge \sim q) \vee (p \Rightarrow q)]$$

$$\Leftrightarrow \sim [\sim (p \wedge \sim q)] \wedge \sim (p \Rightarrow q)$$

$$\Leftrightarrow (p \wedge \sim q) \wedge (p \wedge \sim q)$$

$$\Leftrightarrow p \wedge \sim q$$

Assim, para que a proposição dada seja verdadeira, p tem de ser verdadeira e $\sim q$ também tem de ser verdadeira, o que significa que q tem de ser falsa.

(Opção C)

3. Tem-se que $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$ e, portanto, $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 1 > 0$. Assim, a proposição I é verdadeira e a proposição III é falsa.

$$x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = -1$$

Logo, se $x \in [-1, 1]$, $x^2 - 1 \leq 0$. Tem-se então que a proposição II é falsa e a proposição IV é verdadeira.

(Opção B)

$$4. A = \{1, 2, 3, 4\} \quad B = \{3, 4, 5, 6\} \quad C = \{2, 3, 6, 7\}$$

$$A \cup (B \cap C) = \{1, 2, 3, 4\} \cup \{3, 4, 5, 6\} \cap \{2, 3, 6, 7\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

$$(A \cap B) \cup C = (\{1, 2, 3, 4\} \cap \{3, 4, 5, 6\}) \cup \{2, 3, 6, 7\} = \{2, 3\} \cup \{2, 3, 6, 7\} = \{2, 3, 6, 7\}$$

$$(A \cup B) \cap C = (\{1, 2, 3, 4\} \cup \{3, 4, 5, 6\}) \cap \{2, 3, 6, 7\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \cap \{2, 3, 6, 7\} = \{2, 3, 6\}$$

$$(A \cap B) \cap C = \{1, 2, 3, 4\} \cap \{3, 4, 5, 6\} \cap \{2, 3, 6, 7\} = \{3\}$$

(Opção C)

$$5. \frac{\sqrt{ab^3} \sqrt[3]{a^2b}}{\sqrt[6]{ab^5}} = \frac{a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{3}{2}} a^{\frac{2}{3}} b^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{6}} b^{\frac{5}{6}}} = a^{\frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{1}{6}} b^{\frac{3}{2} + \frac{1}{3} - \frac{5}{6}} = a^1 b^1 = ab$$

(Opção D)

Grupo II

1. p : "O Pedro visitou Paris." q : "O Pedro visitou Londres." r : "O Pedro visitou Madrid."

- 1.1. "O Pedro não visitou Paris nem Londres nem Madrid.": $\sim p \wedge \sim q \wedge \sim r$

- 1.2. $p \Rightarrow (q \wedge \sim r)$: "Se o Pedro visitou Paris, então visitou Londres e não visitou Madrid."

- 1.3. Para que a proposição $(p \Rightarrow \sim q) \vee (p \wedge r)$ seja falsa, então a proposição $p \Rightarrow \sim q$ tem de ser falsa e a proposição $p \wedge r$ também tem de ser falsa. Ora, para que $p \Rightarrow \sim q$ seja falsa, p tem de ser verdadeira e $\sim q$ tem de ser falsa. Mas, se $\sim q$ é falsa, então q é verdadeira. Se p é verdadeira, então, para que $p \wedge r$ seja falsa, r tem de ser falsa.

Assim, p é uma proposição verdadeira, q é uma proposição verdadeira e r é uma proposição falsa.

Logo, o Pedro visitou Paris e Londres.

2.

| p | q | $\sim q$ | $p \Rightarrow \sim q$ | $p \Rightarrow q$ | $p \vee (p \Rightarrow q)$ | $(p \Rightarrow \sim q) \Rightarrow [p \vee (p \Rightarrow q)]$ |
|-----|-----|----------|------------------------|-------------------|----------------------------|---|
| V | V | F | F | V | V | V |
| V | F | V | V | F | V | V |
| F | V | F | V | V | V | V |
| F | F | V | V | V | V | V |

Logo, $(p \Rightarrow \sim q) \Rightarrow [p \vee (p \Rightarrow q)]$ é uma tautologia.

3. $p(x): x^2 - 1 = 0$
 $q(x): x^2 - x + 1 < 0$
 $r(x): |x| \geq 0$

3.1.

Cálculo auxiliar

$$x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 1$$

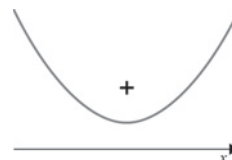
Logo, $p(x)$ é uma condição possível mas não universal.

Cálculo auxiliar

$$x^2 - x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1-4}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2}$$

Equação impossível em \mathbb{R} .

Assim, $x^2 - x + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.



Logo, $q(x)$ é uma condição impossível.

$|x| \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$, logo, $r(x)$ é uma condição possível e universal.

3.2. Por exemplo, em $]2, 3[$, a condição $p(x)$ é impossível.

3.3.

3.3.1. A proposição é verdadeira, porque $x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = -1$.

Logo, $\forall x \in \{-1, 1\}, x^2 - 1 = 0$.

3.3.2. A proposição é verdadeira, porque se $x = 1$, então $x^2 - 1 = 0$.

Logo, $\exists x \in \mathbb{N}: x^2 - 1 = 0$.

4. $A = \{x \in \mathbb{R}: -1 < x \leq 4\} =]-1, 4]$

$B = \{x \in \mathbb{N}: 2x - 2 > 0\} = \{2, 3, 4, 5, \dots\}$

$C = \left\{x \in \mathbb{R}: \frac{1}{4}x \geq 1\right\} = [4, +\infty[$

4.1. $A \cap B =]-1, 4] \cap \{2, 3, 4, \dots\} = \{2, 3, 4\}$

4.2. $A \cup C =]-1, 4] \cup [4, +\infty[=]-1, +\infty[$

4.3. $A \cap \bar{B} =]-1, 4] \cap \overline{\{2, 3, 4, 5, \dots\}} =]-1, 4] \cap \{1\} = \{1\}$

4.4. $B \setminus C = \{2, 3, 4, 5, \dots\} \setminus [4, +\infty[= \{2, 3\}$

Cálculo auxiliar

$$2x - 2 > 0 \Leftrightarrow 2x > 2 \Leftrightarrow x > 1$$

5. "Se p é um número primo, então p é igual a 2 ou p é um número ímpar."

Sejam a , b e c as proposições:

a : " p é um número primo."

b : " p é igual a 2."

c : " p é um número ímpar."

Então, a proposição dada pode representar-se simbolicamente por: $\sim(a \Rightarrow (b \vee c))$

5.1. A negação da proposição dada pode representar-se simbolicamente por:

$$\sim(a \Rightarrow (b \vee c)) \Leftrightarrow a \wedge \sim(b \vee c) \Leftrightarrow a \wedge \sim b \wedge \sim c$$

Logo, a negação desta proposição é: " p é um número primo e p é diferente de 2 e p é um número par".

5.2. A contrarrecíproca da proposição dada pode representar-se simbolicamente por:

$$\sim(b \vee c) \Rightarrow \sim a \Leftrightarrow (\sim b \wedge \sim c) \Rightarrow \sim a$$

Logo, a contrarrecíproca da proposição dada é: "Se p é diferente de 2 e p é um número par, então p não é um número primo".

$$\begin{aligned}
6. \quad \sqrt{2}x - \sqrt{2} &= \sqrt{3}x + \sqrt{3} \Leftrightarrow \sqrt{2}x - \sqrt{3}x = \sqrt{3} + \sqrt{2} \Leftrightarrow (\sqrt{2} - \sqrt{3})x = \sqrt{3} + \sqrt{2} \\
&\Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{\sqrt{2} - \sqrt{3}} \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{\sqrt{2} - \sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} \\
&\Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{6} + 3 + 2 + \sqrt{6}}{2 - 3} \Leftrightarrow x = \frac{2\sqrt{6} + 5}{-1} \\
&\Leftrightarrow x = -5 - 2\sqrt{6}
\end{aligned}$$

$$\text{C.S.} = \{-5 - 2\sqrt{6}\}$$

7. Os triângulos $[ADB]$ e $[ABC]$ são semelhantes porque $\widehat{ADB} = \widehat{ABC} = 90^\circ$ e $\widehat{DAB} = \widehat{CAB}$, por se tratar de um ângulo comum aos dois triângulos.

Então:

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} \Leftrightarrow \frac{5\sqrt{2} + 2\sqrt{2}}{x} = \frac{x}{2\sqrt{2}} \Leftrightarrow x^2 = 2\sqrt{2} \times 7\sqrt{2} \Leftrightarrow x^2 = 28$$

$$\text{Logo, } x = \sqrt{28} = 2\sqrt{7} = \overline{AB}.$$

Usando o Teorema de Pitágoras:

$$\overline{AC}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AB}^2 \Leftrightarrow (7\sqrt{2})^2 = \overline{BC}^2 + (2\sqrt{7})^2 \Leftrightarrow \overline{BC}^2 = 98 - 28 \Leftrightarrow \overline{BC}^2 = 70$$

Assim, $\overline{BC} = \sqrt{70}$ cm e $\overline{AB} = 2\sqrt{7}$ cm.

Teste n.º 2

Páginas 40 a 42

Grupo I

1. p : proposição verdadeira

q : proposição falsa

r : proposição verdadeira

Na opção A, $q \Rightarrow r$ é uma proposição verdadeira, logo $p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$ é uma proposição verdadeira.

Na opção B, $p \wedge r$ é uma proposição verdadeira e q é uma proposição falsa, logo $(p \wedge r) \Rightarrow q$ é uma proposição falsa.

Na opção C, $\sim p$ é uma proposição falsa e $\sim q$ é uma proposição verdadeira, pelo que $\sim p \vee \sim q$ é uma proposição verdadeira.

Na opção D, $\sim p$ é uma proposição falsa e r é uma proposição verdadeira, logo $(\sim p) \Rightarrow r$ é uma proposição verdadeira.

(Opção B)

2. A negação da proposição “o Nuno estuda Matemática todos os dias” é “há pelo menos um dia em que o Nuno não estuda Matemática”.

(Opção D)

$$3. \quad A = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{6}}{3} + \left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2 = \frac{3}{4} - \frac{\sqrt{18}}{3} + \frac{6}{9} = \frac{17}{12} - \frac{3\sqrt{2}}{3} = \frac{17}{12} - \sqrt{2}$$

$$B = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{6}}{3}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{3}\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2 = \frac{3}{4} - \frac{6}{9} = \frac{1}{12}$$

(Opção A)

$$4. \frac{(2ab^{-3}c^2)^{-1}}{a^{-2}b^2c^{-3}} = \frac{2^{-1}a^{-1}b^3c^{-2}}{a^{-2}b^2c^{-3}} = \frac{1}{2}a^{-1+2}b^{3-2}c^{-2+3} = \frac{1}{2}abc = \frac{abc}{2}$$

(Opção C)

5.

$$\begin{array}{r} 2x^3 \quad +ax^2 \quad +bx \quad +0 \quad \left| \begin{array}{l} x^2 + 2x + 2 \\ 2x + a - 4 \end{array} \right. \\ -2x^3 \quad -4x^2 \quad -4x \\ \hline (a-4)x^2 \quad +(b-4)x \quad +0 \\ -(a-4)x^2 \quad +(-2a+8)x \quad -2a+8 \\ \hline (-2a+b+4)x \quad -2a+8 \end{array}$$

Para que o resto desta divisão seja $x + 2$, então:

$$\begin{cases} -2a + b + 4 = 1 \\ -2a + 8 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2a + b = -3 \\ -2a = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6 + b = -3 \\ a = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 3 \\ a = 3 \end{cases}$$

(Opção C)

Grupo II

1. p : " $\sqrt{2}$ é um número racional."

q : " π é um número irracional."

r : " 3 é um número real."

1.1. A proposição p é falsa, a proposição q é verdadeira e a proposição r é verdadeira.

Então, a proposição $p \wedge q$ é falsa, logo $\sim(p \wedge q)$ é uma proposição verdadeira.

Tem-se também que $q \vee r$ é uma proposição verdadeira.

Logo, $\sim(p \wedge q) \Leftrightarrow q \vee r$ é uma equivalência entre duas proposições verdadeiras, pelo que é uma proposição verdadeira.

1.2. $\sim[\sim(\sim p \wedge q) \vee (\sim r)] \Leftrightarrow \sim\sim(\sim p \wedge q) \wedge \sim\sim r \Leftrightarrow \sim p \wedge q \wedge r$

Em linguagem corrente: " $\sqrt{2}$ não é um número racional e π é um número irracional e 3 é um número real".

2. $p(x): x + 2 > 0$ $q(x): 1 - 2x > 0$

2.1. Em \mathbb{R} : $p(x) \wedge q(x) \Leftrightarrow x + 2 > 0 \wedge 1 - 2x > 0 \Leftrightarrow x > -2 \wedge x < \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \in]-2, \frac{1}{2}[$

Assim, $\exists x \in \mathbb{R}: p(x) \wedge q(x)$ é uma proposição verdadeira.

2.2. $\sim(\exists x \in \mathbb{R}: p(x) \wedge q(x)) \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \sim p(x) \vee \sim q(x) \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, x + 2 \leq 0 \vee 1 - 2x \leq 0$

2.3. $x + 2 > 0 \Leftrightarrow x > -2$, pelo que $P =]-2, +\infty[$.

$1 - 2x > 0 \Leftrightarrow x < \frac{1}{2}$, pelo que $Q =]-\infty, \frac{1}{2}[$.

Logo, $P \setminus Q =]-2, +\infty[\setminus]-\infty, \frac{1}{2}[= [\frac{1}{2}, +\infty[$

3. $(\sqrt{3})^{-2} + (\sqrt{3})^{-1} + (\sqrt{3})^0 + (\sqrt{3})^1 + (\sqrt{3})^2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} + 1 + \sqrt{3} + 3$

$$= \frac{1}{3} + 4 + \frac{\sqrt{3}}{3} + \sqrt{3}$$

$$= \frac{13}{3} + \frac{4}{3}\sqrt{3}$$

4.

4.1. $\overline{AB} = \text{raio} = r$ $\overline{AC} = 3r$

Pelo Teorema de Pitágoras:

$$\overline{AC}^2 = \overline{CB}^2 + \overline{AB}^2 \Leftrightarrow (3r)^2 = \overline{CB}^2 + r^2$$

$$\Leftrightarrow \overline{CB}^2 = 9r^2 - r^2$$

$$\Leftrightarrow \overline{CB}^2 = 8r^2$$

Logo, $\overline{CB} = \sqrt{8r^2} = 2\sqrt{2}r$.

4.2. Sejam o "cilindro 1" o cilindro representado na figura e o "cilindro 2" o cilindro referido no enunciado.

$$A_{\text{cilindro 1}} = 2 \times A_{\text{base}} + A_{\text{lateral}} = 2 \times \pi \times \overline{AB}^2 + P_{\text{base}} \times \text{altura}$$

$$= 2 \times (\pi r^2) + (2\pi r) \times (2\sqrt{2}r)$$

$$= 2\pi r^2 + 4\sqrt{2}\pi r^2$$

$$= (2 + 4\sqrt{2})\pi r^2$$

$$A_{\text{cilindro 2}} = 2 \times A_{\text{base}} + A_{\text{lateral}} = 2 \times (\pi(2r)^2) + (2\pi \times 2r) \times (\sqrt{2}r)$$

$$= 8\pi r^2 + 4\sqrt{2}\pi r^2$$

$$= (8 + 4\sqrt{2})\pi r^2$$

$$\text{Razão} = \frac{(2+4\sqrt{2})\pi r^2}{(8+4\sqrt{2})\pi r^2} = \frac{2+4\sqrt{2}}{8+4\sqrt{2}} \times \frac{8-4\sqrt{2}}{8-4\sqrt{2}}$$

$$= \frac{16-8\sqrt{2}+32\sqrt{2}-16 \times 2}{64-16 \times 2}$$

$$= \frac{-16+24\sqrt{2}}{32}$$

$$= \frac{-2+3\sqrt{2}}{4}$$

$$= -\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\sqrt{2}$$

5. $A(x) = 2x^3 - 8x^2 + 3x + 13$

$$B(x) = x + 1$$

$$C(x) = x^2 - x - 6$$

5.1. $B(x) = 0 \Leftrightarrow x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$

$$A(-1) = 2 \times (-1)^3 - 8 \times (-1)^2 + 3 \times (-1) + 13 = -2 - 8 - 3 + 13 = 0$$

Logo, $A(x)$ é divisível por $B(x)$.

5.2.

| | | | | |
|---------|---------|--------|-------|---------------|
| $2x^3$ | $-8x^2$ | $+3x$ | $+13$ | $x^2 - x - 6$ |
| $-2x^3$ | $+2x^2$ | $+12x$ | | $2x - 6$ |
| | $-6x^2$ | $+15x$ | $+13$ | |
| | $6x^2$ | $-6x$ | -36 | |
| | | $9x$ | -23 | |

$$Q(x) = 2x - 6 \text{ e } R(x) = 9x - 23$$

6. $P(x) = x^5 - 4x^3 + 2x^2 + 3x - 2$

6.1. $P(1) = 1^5 - 4 \times 1^3 + 2 \times 1^2 + 3 \times 1 - 2 = 1 - 4 + 2 + 3 - 2 = 0$

$$\begin{array}{r|rrrrrr} 1 & 1 & 0 & -4 & 2 & 3 & -2 \\ & & 1 & 1 & -3 & -1 & 2 \\ \hline 1 & 1 & 1 & -3 & -1 & 2 & 0 \\ & & 1 & 2 & -1 & -2 & \\ \hline 1 & 1 & 2 & -1 & -2 & 0 & \\ & & 1 & 3 & 2 & & \\ \hline 1 & 1 & 3 & 2 & 0 & & \\ & & 1 & 4 & & & \\ \hline 1 & 1 & 4 & 6 & & & \end{array}$$

Assim, 1 é um zero de $P(x)$ de multiplicidade 3.

6.2. $P(x) = x^5 - 4x^3 + 2x^2 + 3x - 2 = (x - 1)^3(x^2 + 3x + 2)$, de acordo com a alínea 6.1.

$$x^2 + 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm 1}{2} \Leftrightarrow x = -2 \vee x = -1$$

Logo, $P(x) = (x - 1)^3(x^2 + 3x + 2) = (x - 1)^3(x + 2)(x + 1)$.

6.3. $P(x) \geq x^5 - 2 \Leftrightarrow x^5 - 4x^3 + 2x^2 + 3x - 2 \geq x^5 - 2 \Leftrightarrow -4x^3 + 2x^2 + 3x \geq 0$
 $\Leftrightarrow x(-4x^2 + 2x + 3) \geq 0$

$$\begin{aligned} -4x^2 + 2x + 3 = 0 \Leftrightarrow x &= \frac{-2 \pm \sqrt{4+48}}{-8} \Leftrightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{52}}{8} \\ \Leftrightarrow x &= \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{13}}{4} \vee x = \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{13}}{4} \end{aligned}$$

Logo:

$$x(-4x^2 + 2x + 3) \geq 0 \Leftrightarrow -x(4x^2 - 2x - 3) \geq 0 \Leftrightarrow -x\left(x - \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{13}}{4}\right)\left(x - \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{13}}{4}\right) \geq 0$$

| x | $-\infty$ | $\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{13}}{4}$ | | 0 | | $\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{13}}{4}$ | $+\infty$ |
|---|-----------|-------------------------------------|---|---|---|-------------------------------------|-----------|
| $-x$ | + | + | + | 0 | - | - | - |
| $x - \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{13}}{4}$ | - | 0 | + | + | + | + | + |
| $x - \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{13}}{4}$ | - | - | - | - | - | 0 | + |
| $x(-4x^2 + 2x + 3)$ | + | 0 | - | 0 | + | 0 | - |

$$\text{C.S.} = \left] -\infty, \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{13}}{4} \right] \cup \left[0, \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{13}}{4} \right]$$

Teste n.º 3

Páginas 45 a 47

Grupo I

1. $P(x) = D(x) \times Q(x) + R(x) = (x^2 - 1) \times (x^2 + 2x + 4) + 6x + 9$
 $= x^4 + 2x^3 + 4x^2 - x^2 - 2x - 4 + 6x + 9$
 $= x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 4x + 5$

(Opção A)

2. $x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$

$$P(2) = 0 \Leftrightarrow 2^3 + 2^2 - (k^2 + 1) \times 2 - k = 0 \Leftrightarrow 8 + 4 - 2k^2 - 2 - k = 0$$

$$\Leftrightarrow -2k^2 - k + 10 = 0$$

$$\Leftrightarrow k = \frac{1 \pm \sqrt{1+80}}{-4}$$

$$\Leftrightarrow k = \frac{1 \pm 9}{-4} \Leftrightarrow k = 2 \vee k = -\frac{5}{2}$$

(Opção D)

3. $a^2 = 27$, logo $a = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$, pelo que $2a = 6\sqrt{3}$.

$b^2 = 8$, logo $b = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$, pelo que $2b = 4\sqrt{2}$.

Assim, sendo d a medida da diagonal do retângulo que circunscreve a elipse:

$$d^2 = (6\sqrt{3})^2 + (4\sqrt{2})^2 \Leftrightarrow d^2 = 36 \times 3 + 16 \times 2 \Leftrightarrow d^2 = 140$$

Logo, $d = \sqrt{140} = 2\sqrt{35}$.

(Opção B)

4. As opções A e D são excluídas porque não se verifica, por exemplo, a condição $1 \leq x \leq 2$.

A opção C é excluída porque não se não se verifica, por exemplo, a condição $y \leq x$.

(Opção B)

5. Um vetor diretor da reta r é $(-1, 1)$, pelo que o declive desta reta é $\frac{1}{-1} = -1$.

O declive da reta AB é $\frac{2-(a-3)}{-1-2} = \frac{2-a+3}{-3} = \frac{a-5}{3}$.

Para que as retas r e AB sejam paralelas os seus declives têm de ser iguais:

$$\frac{a-5}{3} = -1 \Leftrightarrow a - 5 = -3 \Leftrightarrow a = 2$$

(Opção D)

Grupo II

1. $P(x) = x^4 + x^3 - kx^2 - 2x + k$

1.1. $x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$

$$P(-2) = 0 \Leftrightarrow (-2)^4 + (-2)^3 - k \times (-2)^2 - 2 \times (-2) + k = 0$$

$$\Leftrightarrow 16 - 8 - 4k + 4 + k = 0 \Leftrightarrow 12 - 3k = 0 \Leftrightarrow k = 4$$

1.2. $P(x) = x^4 + x^3 - x^2 - 2x + 1$

$$x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$$

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 1 & -1 & -2 & 1 \\ -2 & & -2 & 2 & -2 & 8 \\ \hline & 1 & -1 & 1 & -4 & 9 \end{array}$$

$$Q(x) = x^3 - x^2 + x - 4 \quad R = 9$$

1.3. $P(x) = x^4 + x^3 - 2x$

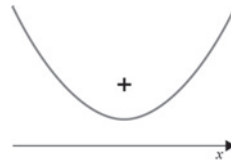
$$P(x) < 0 \Leftrightarrow x^4 + x^3 - 2x < 0 \Leftrightarrow x(x^3 + x^2 - 2) < 0$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & & 1 & 2 & 2 \\ \hline & 1 & 2 & 2 & 0 \end{array}$$

Logo, $x(x^3 + x^2 - 2) < 0 \Leftrightarrow x(x - 1)(x^2 + 2x + 2) < 0$.

Cálculo auxiliar

$$x^2 + 2x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 8}}{2}$$

Equação impossível em \mathbb{R} .

Logo:

| | | | | | |
|-------------------------|-----------|---|---|---|-----------|
| x | $-\infty$ | 0 | | 1 | $+\infty$ |
| x | — | 0 | + | + | + |
| $x - 1$ | — | — | — | 0 | + |
| $x^2 + 2x + 2$ | + | + | + | + | + |
| $(x - 1)(x^2 + 2x + 2)$ | + | 0 | — | 0 | + |

C.S. = $]0, 1[$ **2.**

2.1. $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 9 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 + y^2 - 4y + 4 = 0 \Leftrightarrow (x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 4$

O centro da circunferência tem coordenadas (3, 2) e o raio é 2 ($= \sqrt{4}$).

2.2. $B(1, 0) \quad D(5, 4)$

O declive da reta BD é $\frac{4-0}{5-1} = 1$. Assim, a reta BD é da forma $y = x + b$.

Como B pertence à reta BD , tem-se $0 = 1 + b \Leftrightarrow b = -1$. Logo, $BD: y = x - 1$.

2.3. $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 4$ é uma equação da circunferência.

Intersectando a circunferência com a reta BD , cuja equação reduzida é $y = x - 1$, tem-se:

$$\begin{aligned} (x - 3)^2 + (x - 1 - 2)^2 &= 4 \Leftrightarrow (x - 3)^2 + (x - 3)^2 = 4 \\ &\Leftrightarrow 2(x - 3)^2 = 4 \Leftrightarrow (x - 3)^2 = 2 \\ &\Leftrightarrow x - 3 = \sqrt{2} \vee x - 3 = -\sqrt{2} \\ &\Leftrightarrow x = 3 + \sqrt{2} \vee x = 3 - \sqrt{2} \end{aligned}$$

Se $x = 3 + \sqrt{2}$, então $y = 3 + \sqrt{2} - 1 = 2 + \sqrt{2}$. Obtêm-se as coordenadas do ponto F .

Se $x = 3 - \sqrt{2}$, então $y = 3 - \sqrt{2} - 1 = 2 - \sqrt{2}$. As coordenadas do segundo ponto de interseção da circunferência com a reta BD são $(3 - \sqrt{2}, 2 - \sqrt{2})$.

2.4. A área do círculo é $\pi \times 2^2 = 4\pi$. A área do quadrado $[BCDE]$ é $4 \times 4 = 16$.

Então, a diferença entre ambas as áreas é $16 - 4\pi$. Logo, a área sombreada é:

$$\frac{16 - 4\pi}{4} + \frac{4\pi}{2} = 4 - \pi + 2\pi = 4 + \pi \text{ u.a.}$$

2.5. $((x - 3)^2 + (y - 2)^2 \leq 4 \wedge y \leq x - 1) \vee ((x - 3)^2 + (y - 2)^2 \geq 4 \wedge 1 \leq x \leq 3 \wedge 2 \leq y \leq 4)$

3.

3.1. $\overrightarrow{AB} = B - A = (2, -1) - (-1, 2) = (3, -3) \quad \vec{u}(2, -2)$

Uma vez que $\frac{3}{2} = \frac{-3}{-2}$, então os vetores \overrightarrow{AB} e \vec{u} são colineares.

3.2. $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = (x - 2)^2 + (y + 1)^2$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 = x^2 - 4x + 4 + y^2 + 2y + 1$$

$$\Leftrightarrow -6y = -6x$$

$$\Leftrightarrow y = x$$

Como o declive da mediatriz de AB é 1, então um seu vetor diretor é, por exemplo, $(1,1)$. Uma vez que a mediatriz de AB é a bissetriz dos quadrantes ímpares, então contém a origem do referencial. Assim, uma equação vetorial da mediatriz de AB é: $(x,y) = (0,0) + k(1,1), k \in \mathbb{R}$

$$3.3. \quad \overrightarrow{OB} + \frac{1}{2}\vec{u} = (2, -1) - (0, 0) + \frac{1}{2}(2, -2) = (2, -1) + (1, -1) = (3, -2)$$

$$\left\| \overrightarrow{OB} + \frac{1}{2}\vec{u} \right\| = \|(3, -2)\| = \sqrt{3^2 + (-2)^2} = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13}$$

O lugar geométrico dos pontos cuja distância ao ponto A é inferior a $\left\| \overrightarrow{OB} + \frac{1}{2}\vec{u} \right\|$ é então definido por $(x+1)^2 + (y-2)^2 < 13$.

$$3.4. \quad \overline{AB} = \|\overrightarrow{AB}\| = \|(3, -3)\| = \sqrt{3^2 + (-3)^2} = \sqrt{9 + 9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

$C(x,y)$. Como $\overline{AC} = \overline{BC}$, então C é um ponto da mediatriz de AB cuja equação reduzida é $y = x$.

Assim, $C(x,y)$. Por outro lado:

$$\begin{aligned} \overline{AC} = 3\sqrt{2} &\Leftrightarrow \sqrt{(x+1)^2 + (x-2)^2} = \sqrt{18} \Leftrightarrow (x+1)^2 + (x-2)^2 = 18 \\ &\Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 + x^2 - 4x + 4 = 18 \\ &\Leftrightarrow 2x^2 - 2x - 13 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4+104}}{4} \\ &\Leftrightarrow x = \frac{2 \pm 6\sqrt{3}}{4} \\ &\Leftrightarrow x = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\sqrt{3} \vee x = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}\sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\text{Logo, } C\left(\frac{1}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}\right) \text{ ou } C\left(\frac{1}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}\right).$$

4.

4.1.

4.1.1. $\overrightarrow{FO} + \overrightarrow{BO} = \overrightarrow{OD}$, por exemplo, já que:

$$\overrightarrow{FO} - \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{FO} + \overrightarrow{DO} = \overrightarrow{EO} + \overrightarrow{DO} = \overrightarrow{EO}, \text{ logo } \overrightarrow{FO} + \overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OD}, \text{ mas } \overrightarrow{OE} = \overrightarrow{BO}.$$

4.1.2. $A + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{FE} = A + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = B + \overrightarrow{BC} = C$

$$\begin{aligned} 4.2. \quad \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF} &= (\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}) + (\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OC}) + (\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OD}) + (\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OE}) + (\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OF}) \\ &= 5\overrightarrow{AO} + (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OE}) + (\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OF}) + \overrightarrow{OD} \\ &= 5\overrightarrow{AO} + \vec{0} + \vec{0} + \overrightarrow{AO} \\ &= 6\overrightarrow{AO} \end{aligned}$$

Teste n.º 4

Páginas 50 a 52

Grupo I

$$1. \quad \overrightarrow{AM} = M - A = (-2, 3) - (1, 2) = (-3, 1)$$

$$B = M + \overrightarrow{AM} = (-2, 3) + (-3, 1) = (-5, 4)$$

(Opção C)

$$2. \quad \overrightarrow{AB} = B - A = (-2, 1) - (1, 2) = (-3, -1)$$

$$\overline{AB} = \|\overrightarrow{AB}\| = \|(-3, -1)\| = \sqrt{(-3)^2 + (-1)^2} = \sqrt{9 + 1} = \sqrt{10}$$

$$\overrightarrow{AC} = C - A = (-1, -2) - (1, 2) = (-2, -4)$$

$$\overline{AC} = \|\overrightarrow{AC}\| = \|(-2, -4)\| = \sqrt{(-2)^2 + (-4)^2} = \sqrt{4 + 16} = \sqrt{20}$$

$$\overrightarrow{BC} = C - B = (-1, -2) - (-2, 1) = (1, -3)$$

$$\overline{BC} = \|\overrightarrow{BC}\| = \|(1, -3)\| = \sqrt{1^2 + (-3)^2} = \sqrt{1 + 9} = \sqrt{10}$$

Como $\overline{AB} = \overline{BC} \neq \overline{AC}$, então o triângulo $[ABC]$ é isósceles.

$$\overline{AC}^2 = \sqrt{20}^2 = 20$$

$$\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = \sqrt{10}^2 + \sqrt{10}^2 = 10 + 10 = 20 = \overline{AC}^2$$

Logo, pelo Teorema de Pitágoras, o triângulo $[ABC]$ é retângulo.

(Opção B)

3. Seja $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC} = x$. Pelo Teorema de Pitágoras:

$$\overline{OA}^2 + \overline{OB}^2 = \overline{AB}^2 \Leftrightarrow x^2 + x^2 = (2\sqrt{6})^2 \Leftrightarrow 2x^2 = 4 \times 6 \Leftrightarrow x^2 = 12$$

Logo, $x = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$. Assim:

$$V = \frac{1}{3} \times A_{\text{base}} \times \text{altura} = \frac{1}{3} \times \frac{\overline{OA} \times \overline{OB}}{2} \times \overline{OC} = \frac{1}{3} \times \frac{2\sqrt{3} \times 2\sqrt{3}}{2} \times 2\sqrt{3} = \frac{1}{3} \times \frac{4 \times 3}{2} \times 2\sqrt{3} = 2 \times 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$$

(Opção B)

4. Se a superfície esférica é tangente ao plano de equação $y = 3$, então o seu raio é $-1 + 3 = 2$.

Logo, uma condição que define a superfície esférica nas condições do enunciado é:

$$(x - 2)^2 + (y + 1)^2 + z^2 = 4$$

(Opção A)

5. Uma equação que define o plano BCE é $y = 3$, uma vez que se trata de um plano paralelo ao plano xOz e que a aresta do cubo tem comprimento 3.

Assim, a interseção da reta r com o plano BCE é:

$$(x, 3, z) = (3, 0, 3) + k(0, 1, 0) \Leftrightarrow (x, 3, z) = (3, 0, 3) + (0, k, 0)$$

$$\Leftrightarrow (x, 3, z) = (3, k, 3)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ k = 3 \\ z = 3 \end{cases}$$

Logo, a interseção da reta r com o plano BCE é o ponto de coordenadas $(3, 3, 3)$, ou seja, o ponto E .

(Opção C)

Grupo II

1.

1.1. $\overrightarrow{AB} = B - A = (3, 0) - (-3, 0) = (6, 0)$

$$\overrightarrow{DC} = C - D = (6, 8) - (0, 8) = (6, 0)$$

Logo, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

$$\overrightarrow{BC} = C - B = (6, 8) - (3, 0) = (3, 8)$$

$$\overrightarrow{AD} = D - A = (0, 8) - (-3, 0) = (3, 8)$$

Logo, $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$. Tem-se então que $[ABCD]$ é um paralelogramo.

1.2. $A(-3, 0)$ e $B(3, 0)$

Assim, o segmento de reta $[AB]$ pode ser definido por $-3 \leq x \leq 3 \wedge y = 0$.

1.3. $\overrightarrow{BD} = D - B = (0, 8) - (3, 0) = (-3, 8)$

Como \vec{u} é colinear com \overrightarrow{BD} , então $\vec{u}(-3k, 8k)$, para algum número real k .

$$\begin{aligned}\|\vec{u}\| = 1 &\Leftrightarrow \|(-3k, 8k)\| = 1 \Leftrightarrow \sqrt{(-3k)^2 + (8k)^2} = 1 \Leftrightarrow (-3k)^2 + (8k)^2 = 1 \\ &\Leftrightarrow 9k^2 + 64k^2 = 1 \\ &\Leftrightarrow 73k^2 = 1 \\ &\Leftrightarrow k^2 = \frac{1}{73} \\ &\Leftrightarrow k = \frac{1}{\sqrt{73}} \vee k = -\frac{1}{\sqrt{73}} \\ &\Leftrightarrow k = \frac{\sqrt{73}}{73} \vee k = -\frac{\sqrt{73}}{73}\end{aligned}$$

Como o sentido de \vec{u} é contrário ao de \overrightarrow{BD} , então $k = -\frac{\sqrt{73}}{73}$.

$$\text{Logo, } \vec{u} = \left(\frac{3\sqrt{73}}{73}, -\frac{8\sqrt{73}}{73} \right)$$

1.4. $\overrightarrow{AC} = C - A = (6, 8) - (-3, 0) = (9, 8)$

$$\|\overrightarrow{AC}\| = \|(9, 8)\| = \sqrt{9^2 + 8^2} = \sqrt{81 + 64} = \sqrt{145} = a, \text{ logo } a^2 = 145.$$

Como, $A(-3, 0)$ e $B(3, 0)$ são os focos da elipse, então $c = 3$, logo $c^2 = 9$.

Assim, $b^2 = a^2 - c^2 = 145 - 9 = 136$.

Logo, uma equação da elipse é $\frac{x^2}{145} + \frac{y^2}{136} = 1$.

2. $(x^2 + y^2 \leq 16 \wedge (x + 2)^2 + y^2 \geq 4) \vee (x + 3)^2 + y^2 \leq 1$

3.

3.1. $P\left(\frac{5}{2}, 2, 0\right)$

$$Q(0, 5, 0)$$

$$R\left(-\frac{5}{2}, 5, 3\right)$$

$$\overrightarrow{PQ} = Q - P = (0, 5, 0) - \left(\frac{5}{2}, 2, 0\right) = \left(-\frac{5}{2}, 3, 0\right)$$

$$\|\overrightarrow{PQ}\| = \left\| \left(-\frac{5}{2}, 3, 0\right) \right\| = \sqrt{\left(-\frac{5}{2}\right)^2 + 3^2 + 0^2} = \sqrt{\frac{25}{4} + 9} = \sqrt{\frac{61}{4}} = \frac{\sqrt{61}}{2}$$

$$\overrightarrow{PR} = R - P = \left(-\frac{5}{2}, 5, 3\right) - \left(\frac{5}{2}, 2, 0\right) = (-5, 3, 3)$$

$$\|\overrightarrow{PR}\| = \|(-5, 3, 3)\| = \sqrt{(-5)^2 + 3^2 + 3^2} = \sqrt{25 + 9 + 9} = \sqrt{43}$$

$$\overrightarrow{QR} = R - Q = \left(-\frac{5}{2}, 5, 3\right) - (0, 5, 0) = \left(-\frac{5}{2}, 0, 3\right)$$

$$\|\overrightarrow{QR}\| = \left\| \left(-\frac{5}{2}, 0, 3\right) \right\| = \sqrt{\left(-\frac{5}{2}\right)^2 + 0^2 + 3^2} = \sqrt{\frac{25}{4} + 9} = \sqrt{\frac{61}{4}} = \frac{\sqrt{61}}{2}$$

Assim:

$$P_{[PQR]} = \frac{\sqrt{61}}{2} + \sqrt{43} + \frac{\sqrt{61}}{2}$$

$$= \sqrt{61} + \sqrt{43} \text{ u.m.}$$

3.2.

$$3.2.1. F\left(\frac{5}{2}, 5, 5\right) \quad G\left(-\frac{5}{2}, 5, 5\right)$$

Logo, $FG: y = 5 \wedge z = 5$

$$3.2.2. EFG: z = 5$$

$$3.2.3. -\frac{5}{2} \leq x \leq \frac{5}{2} \wedge 0 \leq y \leq 5 \wedge 0 \leq z \leq 5$$

3.3.

$$3.3.1. A + \overrightarrow{FG} = A + \overrightarrow{AD} = D$$

$$3.3.2. \frac{2}{5} \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{PR} = \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PR} = \overrightarrow{AR}$$

$$3.3.3. \overrightarrow{EH} + \overrightarrow{AB} - \frac{1}{2} \overrightarrow{FG} = \overrightarrow{EH} + \overrightarrow{HG} + \frac{1}{2} \overrightarrow{GF} = \overrightarrow{EG} + \frac{1}{2} \overrightarrow{GF} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CQ} = \overrightarrow{AQ}$$

$$3.4. R\left(-\frac{5}{2}, 5, 3\right)$$

$$D\left(-\frac{5}{2}, 0, 0\right)$$

$$\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 + (y - 5)^2 + (z - 3)^2 = \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 + y^2 + z^2$$

$$\Leftrightarrow y^2 - 10y + 25 + z^2 - 6z + 9 = y^2 + z^2$$

$$\Leftrightarrow -10y - 6z + 34 = 0$$

$$\Leftrightarrow 5y + 3z - 17 = 0$$

$$3.5. \overrightarrow{PR} = R - P = \left(-\frac{5}{2}, 5, 3\right) - \left(\frac{5}{2}, 2, 0\right) = (-5, 3, 3)$$

$$B\left(\frac{5}{2}, 5, 0\right)$$

$$(x, y, z) = \left(\frac{5}{2}, 5, 0\right) + k(-5, 3, 3), k \in \mathbb{R}$$

$$3.6. BCG: y = 5$$

Logo, $k = 5$.

Assim, $M(25, 5, -5)$.

Teste n.º 5**Páginas 55 a 57****Grupo I**

1. $r: y = 3 \wedge z = 5$

A reta r é paralela ao eixo Ox , logo um seu vetor diretor é $(1, 0, 0)$. O ponto $(0, 3, 5)$ pertence à reta r .

Assim, uma equação vetorial da reta r é:

$$(x, y, z) = (0, 3, 5) + k(1, 0, 0), k \in \mathbb{R}$$

(Opção A)

2. $(x - 1)^2 + (y - 3)^2 + (z + 2)^2 \leq 25 \wedge x = 4 \Leftrightarrow (4 - 1)^2 + (y - 3)^2 + (z + 2)^2 \leq 25 \wedge x = 4$

$$\Leftrightarrow 3^2 + (y - 3)^2 + (z + 2)^2 \leq 25 \wedge x = 4$$

$$\Leftrightarrow 9 + (y - 3)^2 + (z + 2)^2 \leq 25 \wedge x = 4$$

$$\Leftrightarrow (y - 3)^2 + (z + 2)^2 \leq 16 \wedge x = 4$$

Assim, o raio do círculo que é a interseção da esfera referida com o plano de equação $x = 4$ é $4 (= \sqrt{16})$. Logo, a área desse círculo é 16π .

(Opção C)

3. $f(x) = x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2$

O gráfico da função f é uma parábola com concavidade voltada para cima e cujo vértice tem coordenadas $(-1, 0)$. Assim, $f(x) \geq 0, \forall x \in [-2, 2]$.

$$f(-2) = (-2 + 1)^2 = (-1)^2 = 1$$

$$f(2) = (2 + 1)^2 = 3^2 = 9$$

Logo, $f(x) \leq 9, \forall x \in [-2, 2]$. Tem-se então que $D'_f = [0, 9]$.

(Opção A)

4. $|x - 5| \geq 3 \Leftrightarrow x - 5 \geq 3 \vee x - 5 \leq -3 \Leftrightarrow x \geq 8 \vee x \leq 2$

$$\Leftrightarrow x \in]-\infty, 2] \cup [8, +\infty[$$

$$|x - 2| \geq 8 \Leftrightarrow x - 2 \geq 8 \vee x - 2 \leq -8 \Leftrightarrow x \geq 10 \vee x \leq -6$$

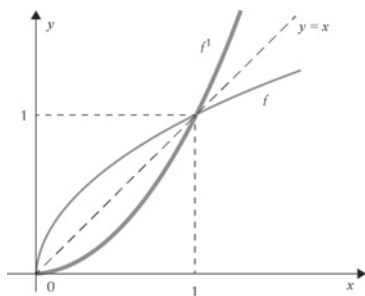
$$\Leftrightarrow x \in]-\infty, -6] \cup [10, +\infty[$$

$$|x - 3| \geq 5 \Leftrightarrow x - 3 \geq 5 \vee x - 3 \leq -5 \Leftrightarrow x \geq 8 \vee x \leq -2$$

$$\Leftrightarrow x \in]-\infty, -2] \cup [8, +\infty[$$

$$|x - 8| \geq 2 \Leftrightarrow x - 8 \geq 2 \vee x - 8 \leq -2 \Leftrightarrow x \geq 10 \vee x \leq 6$$

$$\Leftrightarrow x \in]-\infty, 6] \cup [10, +\infty[$$

(Opção C)**5.****(Opção D)**

Grupo II

1.

1.1. Como a altura do prisma é 6, tem-se que $\overrightarrow{AH} = (0, 0, 6)$.

$$D = K + \overrightarrow{HA} = (1, \sqrt{3}, 7) - (0, 0, 6) = (1, \sqrt{3}, 1)$$

$$C = D + \overrightarrow{DC} = (1, \sqrt{3}, 1) - (-1, \sqrt{3}, 0) = (2, 0, 1)$$

$$B = C + \overrightarrow{CB} = (2, 0, 1) - (1, \sqrt{3}, 0) = (1, -\sqrt{3}, 1)$$

$$A = B + \overrightarrow{BA} = (1, -\sqrt{3}, 1) - (2, 0, 0) = (-1, -\sqrt{3}, 1)$$

1.2. $\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DK} = (2, 0, 0) + \frac{1}{2}(0, 0, 6)$

$$= (2, 0, 0) + (0, 0, 3) = (2, 0, 3)$$

$$\|\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DK}\| = \|(2, 0, 3)\| = \sqrt{2^2 + 0^2 + 3^2} = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}$$

1.3. $\overrightarrow{BC} (1, \sqrt{3}, 0) \quad K(1, \sqrt{3}, 7) \quad r: \begin{cases} x = 1 + k \\ y = \sqrt{3} + \sqrt{3}k, k \in \mathbb{R} \\ z = 7 \end{cases}$

1.4. L_{IB} é o plano mediador do segmento de reta $[KH]$.

$$K(1, \sqrt{3}, 7)$$

$$H = A + \overrightarrow{AH} = (-1, -\sqrt{3}, 1) + (0, 0, 6) = (-1, -\sqrt{3}, 7)$$

$$(x-1)^2 + (y-\sqrt{3})^2 + (z-7)^2 = (x+1)^2 + (y+\sqrt{3})^2 + (z-7)^2 \Leftrightarrow x + \sqrt{3}y = 0$$

2.

2.1. $D_g = [-2, +\infty[\quad D'_g = \{-2\} \cup]-1, +\infty[$

2.2. g tem máximos relativos 3 e -2 , tem mínimo relativo -2 , não tem máximo absoluto e tem mínimo absoluto -2 .

2.3. $f \circ g(2) = f(g(2)) = f(-2) = |-2 - 2| + 3 = |-4| + 3 = 4 + 3 = 7$

2.4. $f(x) = |x - 2| + 3 = \begin{cases} x - 2 + 3 & \text{se } x - 2 \geq 0 \\ -x + 2 + 3 & \text{se } x - 2 < 0 \end{cases}$

$$= \begin{cases} x + 1 & \text{se } x \geq 2 \\ -x + 5 & \text{se } x < 2 \end{cases}$$

2.5. $D_f = \mathbb{R}$, logo, $\forall x \in D_f, -x \in D_f$.

$$f(-x) = |-x - 2| + 3 = |x + 2| + 3$$

Ora, $f(-x)$ não é igual a $f(x)$, $\forall x \in D_f$, por exemplo, $f(-2) = 7 \neq f(2) = 3$, logo, f não é par. Por outro lado, $f(-x)$ não é igual a $-f(x)$, $\forall x \in D_f$, por exemplo, $f(-2) = 7 \neq -f(2) = -3$, logo, f não é ímpar.

2.6. $h(x) = -f(x + 2) = -(|x + 2 - 2| + 3) = -|x| - 3$

Então, o gráfico de h obtém-se do gráfico de f através de uma reflexão em relação ao eixo Oy , seguida de uma translação associada ao vetor $(0, -3)$. Assim, $D'_h =]-\infty, -3]$ e h não tem zeros.

3. $f(x) = g(x) \Leftrightarrow x - 1 = \sqrt{x - 1}$

$$\Rightarrow (x - 1)^2 = x - 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = x - 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 8}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = 2 \vee x = 1$$

Verificação:

Se $x = 2$, então $2 - 1 = \sqrt{2 - 1} \Leftrightarrow 1 = \sqrt{1}$, que é uma proposição verdadeira, logo 2 é solução da equação.

Se $x = 1$, então $1 - 1 = \sqrt{1 - 1} \Leftrightarrow 0 = \sqrt{0}$, que é uma proposição verdadeira, logo 1 é solução da equação.

Como $f(2) = 2 - 1 = 1$, então, $A(2, f(2)) = (2, 1)$ e $B(4, 1)$. Uma vez que $g(4) = \sqrt{4 - 1} = \sqrt{3}$, tem-se que $C(4, g(4)) = (4, \sqrt{3})$.

Como $f(x) = \sqrt{3} \Leftrightarrow x - 1 = \sqrt{3} \Leftrightarrow x = 1 + \sqrt{3}$, logo $D(1 + \sqrt{3}, \sqrt{3})$.

$$\begin{aligned} \text{Assim, } A_{[ABCD]} &= \frac{(\overline{AB} + \overline{DC}) \times \overline{BC}}{2} = \frac{((4-2) + (4-1-\sqrt{3})) \times (\sqrt{3}-1)}{2} = \frac{(2+3-\sqrt{3}) \times (\sqrt{3}-1)}{2} = \frac{(5-\sqrt{3}) \times (\sqrt{3}-1)}{2} \\ &= \frac{5\sqrt{3}-5-3+\sqrt{3}}{2} = \frac{6\sqrt{3}-8}{2} = 3\sqrt{3} - 4 \text{ u. a.} \end{aligned}$$

Teste n.º 6**Páginas 60 a 62****Grupo I**

1.

| | $-\infty$ | a | | b | | c | $+\infty$ |
|------------------------------|-----------|----------|----------|----------|----------|----------|-----------|
| Função f | + | 0 | - | 0 | + | 0 | - |
| Opção A | + | 0 | - | 0 | + | 0 | - |
| Opção B | - | 0 | + | 0 | - | 0 | + |
| Opção C | - | 0 | + | 0 | + | 0 | - |
| Opção D | + | 0 | - | 0 | - | 0 | + |

(Opção A)2. Começemos por determinar a expressão analítica da função inversa de g .

$$2x + 3 = y \Leftrightarrow 2x = y - 3 \Leftrightarrow x = \frac{y-3}{2}$$

$$g^{-1}(x) = \frac{x-3}{2}$$

$$(f \circ g^{-1})(2) = f(g^{-1}(2)) = f\left(\frac{2-3}{2}\right) = f\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) + 2 = \frac{3}{4} \neq 1$$

$$(f \circ g^{-1})(3) = f(g^{-1}(3)) = f\left(\frac{3-3}{2}\right) = f(0) = 0^2 + 2 \times 0 + 2 = 2$$

$$(f \circ g^{-1})(1) = f(g^{-1}(1)) = f\left(\frac{1-3}{2}\right) = f(-1) = (-1)^2 + 2 \times (-1) + 2 = 1 \neq 0$$

$$(f \circ g^{-1})(-1) = f(g^{-1}(-1)) = f\left(\frac{-1-3}{2}\right) = f(-2) = (-2)^2 + 2 \times (-2) + 2 = 2 \neq 1$$

(Opção B)

$$3. \sum_{i=1}^{1000} (2i+3) = 2 \left(\sum_{i=1}^{1000} i + 15k \right) \Leftrightarrow 2 \left(\sum_{i=1}^{1000} i + \sum_{i=1}^{1000} 3 \right) = 2 \sum_{i=1}^{1000} i + 30k \Leftrightarrow 3000 = 30k \Leftrightarrow k = 100$$

(Opção B)

$$4. \sum_{i=1}^7 d_i = 0 \Leftrightarrow 0 - 3 + 2 + 1 + 3 + 2 + d_7 = 0 \Leftrightarrow 5 + d_7 = 0 \Leftrightarrow d_7 = -5$$

$$SS_x = 0 + 9 + 4 + 1 + 9 + 4 + 25 = 52$$

(Opção D)

$$5. \bar{x} = 750$$

$$s_x = 3,2$$

$$\bar{y} = 1,013 \times 750 + 120 = 879,75$$

$$s_y = 1,013 \times 3,2 = 3,2416$$

(Opção D)

Grupo II

1.

$$1.1. f(2) = 0 \Leftrightarrow 2^2 - 2a + b = 0 \Leftrightarrow b = 2a - 4$$

$$\begin{cases} f(2) = 0 \\ f(-1) = -9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 - 2a + b = 0 \\ 1 + a + b = -9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2a - 4 \\ a + 2a - 4 = -9 - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} - \\ a = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2 \times (-2) - 4 \\ - \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -8 \\ a = -2 \end{cases}$$

$$1.2. f(x) = x^2 - 2x + 3$$

$$f(-x) - 4 < g(3) \Leftrightarrow (-x)^2 - 2(-x) + 3 - 4 < 2|3 - 1| - 1 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 3 - 4 < 2 \times 2 - 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x - 4 < 0$$

Cálculo auxiliar

$$x^2 + 2x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 16}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm 2\sqrt{5}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = -1 - \sqrt{5} \vee x = -1 + \sqrt{5}$$



$$\text{C.S.} =]-1 - \sqrt{5}, -1 + \sqrt{5}[$$

$$1.3. h(x) = -2g(x) + 1 = -2(2|x - 1| - 1) + 1 = -4|x - 1| + 2 + 1 = -4|x - 1| + 3$$

Assim, $D'_h =]-\infty, 3]$.

$$h(x) = 0 \Leftrightarrow -4|x - 1| + 3 = 0 \Leftrightarrow |x - 1| = \frac{3}{4} \Leftrightarrow x - 1 = \frac{3}{4} \vee x - 1 = -\frac{3}{4} \Leftrightarrow x = \frac{7}{4} \vee x = \frac{1}{4}$$

$$\text{Zeros: } \frac{1}{4} \text{ e } \frac{7}{4}$$

2.

$$2.1. k \in \left] -\frac{9}{8}, \frac{105}{8} \right[$$

$$2.2. \text{ Uma vez que } -3, 1 \text{ e } 2 \text{ são zeros de } f, \text{ então } f(x) = a(x + 3)(x - 1)(x - 2).$$

O ponto B pertence ao gráfico de f , logo:

$$f(0) = 6 \Leftrightarrow a \times 3 \times (-1) \times (-2) = 6 \Leftrightarrow 6a = 6 \Leftrightarrow a = 1$$

$$\text{Assim, } f(x) = (x + 3)(x - 1)(x - 2) = (x^2 + 2x - 3)(x - 2) = x^3 - 7x + 6.$$

Se o gráfico de g é uma reta paralela à bissetriz dos quadrantes pares, então o seu declive é -1 e

se o ponto B pertence ao gráfico de g , então $g(0) = 6$, pelo que $g(x) = -x + 6$.

$$2.3. f(x) \geq g(x) \Leftrightarrow x^3 - 7x + 6 \geq -x + 6 \Leftrightarrow x^3 - 6x \geq 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 6) \geq 0$$

Cálculo auxiliar

$$x^2 - 6 = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{6} \vee x = -\sqrt{6}$$

| | | | | | | | |
|--------------|-----------|-------------|---|---|---|------------|-----------|
| x | $-\infty$ | $-\sqrt{6}$ | | 0 | | $\sqrt{6}$ | $+\infty$ |
| x | - | - | - | 0 | + | + | + |
| $x^2 - 6$ | + | 0 | - | - | - | 0 | + |
| $x(x^2 - 6)$ | - | 0 | + | 0 | - | 0 | + |

Logo, C.S. = $[-\sqrt{6}, 0] \cup [\sqrt{6}, +\infty[$.

3.

$$3.1. \bar{x} = \frac{0 \times 16 + 1 \times 33 + 2 \times 26 + 3 \times 13 + 4 \times 9 + 5 \times 3}{16 + 33 + 26 + 13 + 9 + 3} = \frac{175}{100} = 1,75$$

$$\begin{aligned} SS_x &= \sum_{i=1}^6 (x_i - \bar{x})^2 n_i \\ &= (0 - 1,75)^2 \times 16 + (1 - 1,75)^2 \times 33 + (2 - 1,75)^2 \times 26 + (3 - 1,75)^2 \times 13 + (4 - 1,75)^2 \times 9 \\ &\quad + (5 - 1,75)^2 \times 3 \\ &= 166,75 \end{aligned}$$

$$s_x = \sqrt{\frac{SS_x}{n-1}} = \sqrt{\frac{166,75}{99}} \approx 1,30$$

$$3.2. P_{10} = \frac{x_{10} + x_{11}}{2} = \frac{0+0}{2} = 0$$

$$P_{40} = \frac{x_{40} + x_{41}}{2} = \frac{1+1}{2} = 1$$

$$P_{90} = \frac{x_{90} + x_{91}}{2} = \frac{4+4}{2} = 4$$

$$3.3. P_{75} = \frac{x_{75} + x_{76}}{2} = \frac{2+3}{2} = 2,5 < 3. \text{ Logo, } 13 + 9 + 3 = 25 \text{ alunos.}$$

$$\begin{aligned} 4. SS_y &= \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 = \sum_{i=1}^n y_i^2 - n\bar{y}^2 \\ &= \sum_{i=1}^n (ax_i + h)^2 - n(\bar{ax} + h)^2 \\ &= \sum_{i=1}^n ((ax_i)^2 + 2ax_i h + h^2) - n((\bar{ax})^2 + 2\bar{ax}h + h^2) - n((\bar{ax})^2 + 2\bar{ax}h + h^2) \\ &= a^2 \sum_{i=1}^n x_i^2 + 2ah \sum_{i=1}^n x_i + \sum_{i=1}^n h^2 - n(\bar{ax})^2 - n2\bar{ax}h - nh^2 \\ &= a^2 \sum_{i=1}^n x_i^2 + 2ahn \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} + nh^2 - na^2 \bar{x}^2 - 2na\bar{x}h - nh^2 \\ &= a^2 \sum_{i=1}^n x_i^2 + 2ahn\bar{x} - na^2 \bar{x}^2 - 2na\bar{x}h \\ &= a^2 \sum_{i=1}^n x_i^2 - na^2 \bar{x}^2 \\ &= a^2 \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2 \right) = a^2 SS_x \end{aligned}$$

Teste Global n.º 1

Páginas 65 a 67

Grupo I

1. Uma vez que a proposição $p \Rightarrow q$ é falsa, então a proposição p é verdadeira e a proposição q é falsa.

Assim, na opção A, a proposição $p \wedge q$ é falsa, por se tratar da conjunção entre uma proposição verdadeira e uma proposição falsa; na opção B, a proposição $\sim p \vee q$ é falsa, por se tratar da disjunção entre duas proposições falsas; na opção C, $p \Rightarrow (q \vee \sim p)$ é uma proposição falsa, uma vez que p é verdadeira e $q \vee \sim p$ é falsa, por se tratar da disjunção entre duas proposições falsas; na opção D, $\sim p \Rightarrow q$ é verdadeira, uma vez que $\sim p$ é falsa e q é falsa.

(Opção D)

2. $x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

$$P(1) = 0 \Leftrightarrow 2 \times 1^3 + a \times 1^2 + 2 \times 1 + b = 0 \Leftrightarrow 2 + a + 2 + b = 0 \Leftrightarrow a = -4 - b$$

$$2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$$

$$P\left(-\frac{1}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^3 + a \times \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) + b = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{4} + \frac{a}{4} - 1 + b = 0$$

$$\Leftrightarrow -1 + a - 4 + 4b = 0 \Leftrightarrow -5 + (-4 - b) + 4b = 0$$

$$\Leftrightarrow -9 + 3b = 0 \Leftrightarrow b = 3$$

Logo, $a = -4 - 3 = -7$.

(Opção A)

3. $\overrightarrow{OP} = P - O = (2,3)$

$$\|\overrightarrow{OP}\| = \|(2,3)\| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13} \text{ Logo, o raio da circunferência menor é } \sqrt{13}.$$

$$\overrightarrow{OQ} = Q - O = (3,4)$$

$$\|\overrightarrow{OQ}\| = \|(3,4)\| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5 \text{ Logo, o raio da circunferência maior é } 5.$$

$$\overrightarrow{PQ} = Q - P = (3,4) - (2,3) = (1,1)$$

\overrightarrow{PQ} é um vetor diretor da reta PQ . Assim, o declive desta reta é $\frac{1}{1} = 1$.

Como P pertence à reta PQ , então $3 = 1 \times 2 + b \Leftrightarrow b = 1$.

Logo, a equação reduzida da reta PQ é $y = x + 1$.

Assim, uma condição que define a região a sombreado é:

$$x^2 + y^2 \geq 13 \wedge x^2 + y^2 \leq 25 \wedge ((y \leq x + 1 \wedge y \geq 0) \vee (y \geq x + 1 \wedge y \leq 0))$$

(Opção A)

4. $\sqrt{x-1} = x-2 \Rightarrow x-1 = (x-2)^2$

$$\Leftrightarrow x-1 = x^2 - 4x + 4$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 5x + 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{25-20}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Verificação: Se $x = \frac{5}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$, então:

$$\sqrt{\frac{5}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} - 1} = \frac{5}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} - 2 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{6+2\sqrt{5}}}{2} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$\Leftrightarrow 6 + 2\sqrt{5} = (1 + \sqrt{5})^2$$

Ambos os membros são positivos

$$\Leftrightarrow 6 + 2\sqrt{5} = 1 + 2\sqrt{5} + 5$$

$$\Leftrightarrow 6 + 2\sqrt{5} = 6 + 2\sqrt{5}, \text{ que é uma proposição verdadeira.}$$

Logo, $\frac{5}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$ é solução da equação.

Se $x = \frac{5}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}$, então:

$$\sqrt{\frac{5}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} - 1} = \frac{5}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} - 2 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{6-2\sqrt{5}}}{2} = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow \sqrt{6-2\sqrt{5}} = 1 - \sqrt{5}$$

Mas $\sqrt{6-2\sqrt{5}}$ é positivo e $1 - \sqrt{5}$ é negativo, logo esta igualdade é falsa e, portanto, $\frac{5}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}$ não é solução da equação.

(Opção C)

5. Na opção A, $\sum_{i=1}^{1000} i^2 = 0^2 + \sum_{i=1}^{1000} i^2 = \sum_{i=1}^{1000} i^2$, logo trata-se de uma proposição verdadeira.

Na opção B, $\sum_{i=1}^{1000} i^2 = 1^2 + 2^2 + \dots + 1000^2 \neq (1+2+\dots+1000)^2 = \left(\sum_{i=1}^{1000} i\right)^2$, logo trata-se de uma proposição falsa.

Na opção C, $\sum_{i=1}^{1000} (3i) = (3 \times 1) + (3 \times 2) + \dots + (3 \times 1000) = 3 \times (1 + 2 + \dots + 1000) = 3 \sum_{i=1}^{1000} i$, logo trata-se de uma proposição verdadeira.

Na opção D, $\sum_{i=1}^{1000} (3+i) = (3+1) + (3+2) + \dots + (3+1000) = \underbrace{(3+3+\dots+3)}_{1000 \text{ vezes}} + (1+2+\dots+1000)$

$= 3000 + \sum_{i=1}^{1000} i$, logo trata-se de uma proposição verdadeira.

(Opção B)

Grupo II

1.

1.1. $p(x) \wedge q(x)$

$$p(x): x^2 - 4 \leq 0$$

Cálculo auxiliar

$$x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \vee x = -2$$



Logo, $x \in [-2, 2]$.

$$q(x): 3|x + 1| - 2 \leq 3 \Leftrightarrow 3|x + 1| \leq 5 \Leftrightarrow |x + 1| \leq \frac{5}{3}$$

$$\Leftrightarrow x + 1 \leq \frac{5}{3} \wedge x + 1 \geq -\frac{5}{3}$$

$$\Leftrightarrow x \leq \frac{2}{3} \wedge x \geq -\frac{8}{3}$$

Logo, $x \in \left[-\frac{8}{3}, \frac{2}{3}\right]$.

$$\text{Assim, } p(x) \wedge q(x) \Leftrightarrow x \in [-2, 2] \cap \left[-\frac{8}{3}, \frac{2}{3}\right] \Leftrightarrow x \in \left[-\frac{8}{3}, \frac{2}{3}\right]$$

1.2. $\sim p(x) \vee r(x) \Leftrightarrow x^2 - 4 > 0 \vee x^3 + 3x^2 + 2x \leq 0$

$$x^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[$$

$$x^3 + 3x^2 + 2x \leq 0 \Leftrightarrow x(x^2 + 3x + 2) \leq 0$$

Cálculo auxiliar

$$x^2 + 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{2} \Leftrightarrow x = -1 \vee x = -2$$

| x | $-\infty$ | -2 | | -1 | | 0 | $+\infty$ |
|-------------------|-----------|------|---|------|---|-----|-----------|
| x | — | — | — | — | — | 0 | + |
| $x^2 + 3x + 2$ | + | 0 | — | 0 | + | + | + |
| $x(x^2 + 3x + 2)$ | — | 0 | + | 0 | — | 0 | + |

Logo, $x \in]-\infty, -2] \cup [-1, 0]$.

Assim, $\sim p(x) \vee r(x) \Leftrightarrow x \in]-\infty, -2] \cup [-1, 0] \cup]2, +\infty[$.

$$\begin{aligned}
 2. \quad \begin{cases} 3x - 2\sqrt{3}y = 4\sqrt{3} \\ 3\sqrt{3}x + y = 5 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 2\sqrt{3}(5 - 3\sqrt{3}x) = 4\sqrt{3} \\ y = 5 - 3\sqrt{3}x \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 10\sqrt{3} + 18x = 4\sqrt{3} \\ - \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 21x = 14\sqrt{3} \\ - \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{14\sqrt{3}}{21} \\ - \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2\sqrt{3}}{3} \\ y = 5 - 3\sqrt{3} \times \frac{2\sqrt{3}}{3} \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2\sqrt{3}}{3} \\ y = 5 - 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2\sqrt{3}}{3} \\ y = -1 \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$\text{C.S.} = \left\{ \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}, -1 \right) \right\}$$

3.

3.1. $\overrightarrow{AB} = B - A = (3, -1) - (2, 0) = (1, -1)$

$C(-1, 3)$

Logo, uma equação vetorial da reta que contém o ponto C e é paralela a AB é:

$$(x, y) = (-1, 3) + k(1, -1), k \in \mathbb{R}$$

3.2. $\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB} = (-1, 1)$, de acordo com a alínea anterior.

$$\|\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AC}\| = \|(-1, 1)\| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}.$$

Assim, o conjunto dos pontos do plano cuja distância ao ponto A é inferior ou igual a $\|\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AC}\|$ é o círculo de centro em A e raio $\|\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AC}\|$, que é definido pela condição $(x-2)^2 + y^2 \leq 2$.

3.3. $A(2, 0)$ e $A'(-2, 0)$ são os focos da elipse, logo $c = 2$. Como o eixo maior é 8, então

$$a = 4. \text{ Assim, } b^2 = a^2 - c^2 = 16 - 4 = 12. \text{ Logo, a equação da elipse é } \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1.$$

4. $O(0, 0, 0)$ é um dos vértices do prisma. De acordo com o enunciado, $B(0, 5, 0)$. Segundo o Teorema de Pitágoras:

$$\begin{aligned} \overline{OB}^2 &= \overline{OA}^2 + \overline{AB}^2 \Leftrightarrow 5^2 = \overline{OA}^2 + (\overline{OA} + 1)^2 \Leftrightarrow 25 = \overline{OA}^2 + \overline{OA}^2 + 2\overline{OA} + 1 \\ &\Leftrightarrow 2\overline{OA}^2 + 2\overline{OA} - 24 = 0 \Leftrightarrow \overline{OA}^2 + \overline{OA} - 12 = 0 \\ &\Leftrightarrow \overline{OA} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+48}}{2} \Leftrightarrow \overline{OA} = -4 \vee \overline{OA} = 3. \end{aligned}$$

Logo, $\overline{OA} = 3$ e $\overline{AB} = \overline{OA} + 1 = 4$. O volume do prisma é 60, ou seja:

$$\frac{\overline{OA} \times \overline{AB}}{2} \times \overline{OE} = 60 \Leftrightarrow \frac{3 \times 4}{2} \times \overline{OE} = 60 \Leftrightarrow 6\overline{OE} = 60 \Leftrightarrow \overline{OE} = 10$$

Assim, $E(0, 0, 10)$ e $D(0, 5, 10)$. Seja $A(x, y, 0)$, com $x > 0$ e $y > 0$.

$$\begin{aligned} \overline{OA} &= 4 \wedge \overline{BA} = 3 \Leftrightarrow \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2 + (0-0)^2} = 4 \wedge \sqrt{(x-0)^2 + (y-5)^2 + (0-0)^2} = 3 \\ &\Leftrightarrow x^2 + y^2 = 16 \wedge x^2 + (y-5)^2 = 9 \\ &\Leftrightarrow x^2 = 16 - y^2 \wedge 16 - y^2 + y^2 - 10y + 25 = 9 \\ &\Leftrightarrow x^2 = 16 - y^2 \wedge -10y = -32 \\ &\Leftrightarrow x^2 = 16 - \left(\frac{16}{5}\right)^2 \wedge y = \frac{16}{5} \\ &\Leftrightarrow x^2 = \frac{144}{25} \wedge y = \frac{16}{5} \end{aligned}$$

Como $x > 0$, então $x = \frac{12}{5}$. Logo, $A\left(\frac{12}{5}, \frac{16}{5}, 0\right)$ e $C\left(\frac{12}{5}, \frac{16}{5}, 10\right)$.

5.

5.1. $f(x) = 0 \Leftrightarrow -|x-3| + 2 = 0 \Leftrightarrow |x-3| = 2 \Leftrightarrow x-3 = 2 \vee x-3 = -2 \Leftrightarrow x = 5 \vee x = 1$

Assim, a abscissa do ponto A é 1 e a abscissa do ponto C é 5, pelo que a abscissa do ponto B é 3 e, portanto, a abscissa de P varia entre 1 e 3. Logo, $D_g =]1, 3[$.

$f(3) = 2$, logo $D'_g =]0, 2]$.

Daqui também se conclui que $\overline{SR} = (3-x) \times 2 = 6 - 2x$.

$$f(x) = -|x-3| + 2 = \begin{cases} -(x-3) + 2 & \text{se } x-3 \geq 0 \\ -(-x+3) + 2 & \text{se } x-3 < 0 \end{cases} = \begin{cases} -x+5 & \text{se } x \geq 3 \\ x-1 & \text{se } x < 3 \end{cases}$$

Donde, as coordenadas de P são $(x, x-1)$. Logo, $\overline{PS} = x-1$.

Tem-se então:

$$g(x) = \overline{SR} \times \overline{PS} = (6 - 2x) \times (x - 1) = 6x - 6 - 2x^2 + 2x \\ = -2x^2 + 8x - 6$$

$$5.2. \quad h(x) = 0 \Leftrightarrow -2f(x) + 1 = 0 \Leftrightarrow -2(-|x - 3| + 2) + 1 = 0 \Leftrightarrow 2|x - 3| - 4 + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow |x - 3| = \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow x - 3 = \frac{3}{2} \vee x - 3 = -\frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{9}{2} \vee x = \frac{3}{2}$$

6.

$$6.1. \quad \frac{10 \times 60}{100} = 6, \text{ logo, } P_{10} = \frac{x_6 + x_7}{2} = \frac{31,35 + 31,55}{2} = 31,45.$$

$$\frac{25 \times 60}{100} = 15, \text{ logo, } P_{25} = \frac{x_{15} + x_{16}}{2} = \frac{33,22 + 33,28}{2} = 33,25.$$

$$\frac{90 \times 60}{100} = 54, \text{ logo, } P_{90} = \frac{x_{54} + x_{55}}{2} = \frac{35,93 + 35,93}{2} = 35,93.$$

$$6.2. \quad x_{37} = 35,25$$

Logo, sendo k a ordem do percentil que se procura, tem-se que:

$$35 < \frac{60k}{100} < 36 \Leftrightarrow 58 < k < 60$$

Assim, 35,25 pertence a P_{59} .

$$6.3. \quad \text{Começando por determinar } P_{50}, \text{ tem-se } \frac{50 \times 60}{100} = 30 \text{ logo } P_{50} = \frac{x_{30} + x_{31}}{2} = \frac{34,52 + 34,58}{2} = 34,55.$$

6.4. Este valor não se encontra entre os dados, mas pode ser enquadrado da seguinte forma:

$$34,52 < 34,55 < 34,58$$

Logo, o atleta com o tempo mais baixo de entre os que têm os tempos 50% mais altos obteve o tempo 34,52.

Teste Global n.º 2

Páginas 70 a 72

Grupo I

1. A opção A é verdadeira, uma vez que qualquer número real é maior que zero ou menor que 1.

A opção B é verdadeira:

$$|x - 1| < 1 \Leftrightarrow x - 1 < 1 \wedge x - 1 > -1 \Leftrightarrow x < 2 \wedge x > 0 \Leftrightarrow x \in]0, 2[$$

logo, uma vez que $1 \in]0, 2[$ e 1 é um número natural, então existe um número natural que é solução da inequação.

A opção C é falsa, já que existe um elemento de \mathbb{Z}_0^+ que não verifica a desigualdade, nomeadamente, o elemento 0 (zero).

A opção D é verdadeira: $x^3 + 1 = 0 \Leftrightarrow x^3 = -1 \Leftrightarrow x = -1$ e $-1 \in \mathbb{R}$.

(Opção C)

$$\begin{aligned}
2. \quad x\sqrt{3}(x-2) + 3\sqrt{3} &= 6(x-1) \Leftrightarrow \sqrt{3}x^2 - 2\sqrt{3}x + 3\sqrt{3} = 6x - 6 \\
&\Leftrightarrow \sqrt{3}x^2 - 2\sqrt{3}x + 3\sqrt{3} - 6x + 6 = 0 \\
&\Leftrightarrow \sqrt{3}x^2 + (-2\sqrt{3} - 6)x + (3\sqrt{3} + 6) = 0 \\
&\Leftrightarrow x = \frac{2\sqrt{3}+6 \pm \sqrt{(-2\sqrt{3}-6)^2 - 4\sqrt{3}(3\sqrt{3}+6)}}{2\sqrt{3}} \\
&\Leftrightarrow x = \frac{2\sqrt{3}+6 \pm \sqrt{12+24\sqrt{3}+36-36-24\sqrt{3}}}{2\sqrt{3}} \\
&\Leftrightarrow x = \frac{2\sqrt{3}+6 \pm \sqrt{12}}{2\sqrt{3}} \Leftrightarrow x = \frac{2\sqrt{3}+6+2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} \vee x = \frac{2\sqrt{3}+6-2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} \\
&\Leftrightarrow x = \frac{4\sqrt{3}+6}{2\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \vee x = \frac{6}{2\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \\
&\Leftrightarrow x = \frac{12+6\sqrt{3}}{6} \vee x = \frac{6\sqrt{3}}{6} \Leftrightarrow x = 2 + \sqrt{3} \vee x = \sqrt{3}
\end{aligned}$$

$$C.S. = \{\sqrt{3}, 2 + \sqrt{3}\}$$

(Opção A)

3. (I) $y = 2x + 3$: o declive da reta é 2.

$$(II) \quad 2y + 4x = 3 \Leftrightarrow 2y = -4x + 3 \Leftrightarrow y = -2x + \frac{3}{2}: \text{ o declive da reta é } -2.$$

$$(III) \quad (x, y) = (1, 3) + k(2, 4), k \in \mathbb{R}: \text{ o declive da reta é } \frac{4}{2} = 2.$$

$$(IV) \quad (x, y) = (1, 3) + k(0, 3), k \in \mathbb{R}: \text{ trata-se de uma reta vertical.}$$

Logo, as retas definidas por I e III são paralelas, uma vez que têm o mesmo declive.

(Opção B)

4. O gráfico da função h obtém-se do gráfico da função f através de uma reflexão em relação ao eixo Ox , seguida de uma reflexão em relação ao eixo Oy .

(Opção A)

5. Seja x a classificação da Helena no último teste.

$$\frac{17,3 \times 5 + x}{6} = 17,5 \Leftrightarrow 86,5 + x = 105$$

$$\Leftrightarrow x = 18,5$$

(Opção C)

Grupo II

$$1. \quad (p \Rightarrow q) \vee (p \Rightarrow r)$$

$$\Leftrightarrow (\sim p \vee q) \vee (\sim p \vee r)$$

$$\Leftrightarrow \sim p \vee (q \vee r)$$

$$\Leftrightarrow p \Rightarrow (q \vee r)$$

2.

2.1.

Cálculo auxiliar

$$2x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{3}{2}$$

$$p\left(-\frac{3}{2}\right) = -5 \Leftrightarrow 2 \times \left(-\frac{3}{2}\right)^3 + 3 \times \left(-\frac{3}{2}\right)^2 + a \times \left(-\frac{3}{2}\right) - 2 = -5 \Leftrightarrow -\frac{27}{4} + \frac{27}{4} - \frac{3}{2}a = -3$$

$$\Leftrightarrow -\frac{3}{2}a = -3 \Leftrightarrow 3a = 6 \Leftrightarrow a = 2$$

2.2. $p(x) = 2x^3 + 3x^2 - 3x - 2$

Cálculo auxiliar

$$x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

$$\begin{array}{c|cccc} & 2 & 3 & -3 & -2 \\ 1 & & 2 & 5 & 2 \\ \hline & 2 & 5 & 2 & 0 \end{array}$$

Logo, $p(x) = (x - 1)(2x^2 + 5x + 2)$.

$$2x^2 + 5x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 16}}{4} \Leftrightarrow x = \frac{-5 \pm 3}{4} \Leftrightarrow x = -2 \vee x = -\frac{1}{2}$$

Logo, $p(x) = 2(x - 1)(x + 2)\left(x + \frac{1}{2}\right) = (x - 1)(x + 2)(2x + 1)$.

Assim, $p(x) \leq 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x + 2)(2x + 1) \leq 0$

| x | $-\infty$ | -2 | | $-\frac{1}{2}$ | | 1 | $+\infty$ |
|----------|-----------|------|---|----------------|---|-----|-----------|
| $x - 1$ | - | - | - | - | - | 0 | + |
| $x + 2$ | - | 0 | + | + | + | + | + |
| $2x + 1$ | - | - | - | 0 | + | + | + |
| $p(x)$ | - | 0 | + | 0 | - | 0 | + |

Logo, $x \in]-\infty, -2] \cup \left[-\frac{1}{2}, 1\right]$.

3. Os pontos de coordenadas $(-6, 0)$ e $(6, 0)$ são os extremos do eixo maior da elipse, logo $a = 6$. Os pontos de coordenadas $(0, -4)$ e $(0, 4)$ são os extremos do eixo menor da elipse, logo $b = 4$.

Então, $c^2 = a^2 - b^2 = 36 - 16 = 20$. Logo, $c = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$.

Assim, $A(-2\sqrt{5}, 0)$ e $B(2\sqrt{5}, 0)$. Uma equação que define a elipse é $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} = 1$.

Se $x = 2\sqrt{5}$, então:

$$\frac{(2\sqrt{5})^2}{36} + \frac{y^2}{16} = 1 \Leftrightarrow \frac{y^2}{16} = 1 - \frac{20}{36} \Leftrightarrow \frac{y^2}{16} = \frac{16}{36}$$

$$\Leftrightarrow y^2 = \frac{16^2}{6^2} \Leftrightarrow y = \frac{16}{6} \vee y = -\frac{16}{6} \Leftrightarrow y = \frac{8}{3} \vee y = -\frac{8}{3}$$

Logo, uma condição que define a região sombreada é:

$$-2\sqrt{5} \leq x \leq 2\sqrt{5} \wedge -\frac{8}{3} \leq y \leq \frac{8}{3}$$

4.

- 4.1. Uma reta paralela a r tem a mesma direção da reta r . Assim, uma vez que $(-1, 2, 1)$ é um vetor diretor da reta r , este será também um vetor diretor de qualquer reta paralela a r . O ponto F tem coordenadas $(3, 3, 3)$.

Logo, um sistema de equações paramétricas da reta paralela a r e que passa em F é:

$$\begin{cases} x = 3 - k \\ y = 3 + 2k, k \in \mathbb{R} \\ z = 3 + k \end{cases}$$

- 4.2. $FBC: y = 3$

Substituindo y por 3 na equação da reta r :

$$(x, 3, z) = (1, -1, 2) + k(-1, 2, 1) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - k \\ 3 = -1 + 2k \\ z = 2 + k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - k \\ 2k = 4 \\ z = 2 + k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - 2 \\ k = 2 \\ z = 2 + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ k = 2 \\ z = 4 \end{cases}$$

Logo, o ponto de interseção da reta r com o plano FBC tem coordenadas $(-1, 3, 4)$.

- 4.3. $X = A + \frac{1}{2}\overrightarrow{EF} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CG}$ corresponde ao centro da face $[ABEF]$, logo $X(3, 0, 0)$.

$$Y = B + \frac{1}{2}\overrightarrow{FG} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CG} \text{ corresponde ao centro da face } [BCGF], \text{ logo } Y(0, 3, 0).$$

$$Z = H - \frac{1}{2}\overrightarrow{CG} + \frac{1}{2}\overrightarrow{EF} \text{ corresponde ao centro da face } [CGHO], \text{ logo } Z(-3, 0, 0).$$

$$\overline{XY} = \sqrt{(3-0)^2 + (0-3)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

$$\overline{XZ} = \sqrt{(3-(-3))^2 + (0-0)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{36} = 6$$

$$\overline{YZ} = \sqrt{(0-(-3))^2 + (3-0)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

$$\text{Logo, } P_{[xyz]} = 3\sqrt{2} + 6 + 3\sqrt{2} = 6\sqrt{2} + 6 \text{ u.c.}$$

5.

5.1.

$$\begin{aligned} 5.1.1. \quad (f+g)(1) &= f(1) + g(1) = (1 + \sqrt{1^2 - 5 \times 1 + 6}) + (2 - |2 \times 1 + 1|) \\ &= 1 + \sqrt{1-5+6} + 2 - 3 = \sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5.1.2. \quad (f \circ g)(1) &= f(g(1)) = f(2 - |2 \times 1 + 1|) = f(2 - 3) = f(-1) = 1 + \sqrt{(-1)^2 - 5 \times (-1) + 6} \\ &= 1 + \sqrt{1+5+6} \\ &= 1 + \sqrt{12} \\ &= 1 + 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

- 5.2. $D_f = \{x \in \mathbb{R}: x^2 - 5x + 6 \geq 0\}$

Cálculo auxiliar

$$x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{5 \pm 1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = 3 \vee x = 2$$



Logo, $D_f =]-\infty, 2] \cup [3, +\infty[$.

5.3. $2 - |2x + 1| = 0 \Leftrightarrow |2x + 1| = 2 \Leftrightarrow 2x + 1 = 2 \vee 2x + 1 = -2 \Leftrightarrow 2x = 1 \vee 2x = -3$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \vee x = -\frac{3}{2}$$

Assim, a abcissa do vértice do gráfico da função g é $\frac{\frac{1}{2} + (-\frac{3}{2})}{2} = -\frac{1}{2}$.

Ora, $g(-\frac{1}{2}) = 2 - |2 \times (-\frac{1}{2}) + 1| = 2 - |-1 + 1| = 2$. Logo, $D'_g =]-\infty, 2]$.

5.4. f não é uma função invertível, uma vez que não é injetiva. Por exemplo, $f(2) = f(3) = 1$.

g não é uma função invertível, uma vez que também não é uma função injetiva.

Por exemplo $g(\frac{1}{2}) = g(-\frac{3}{2}) = 0$. Logo, a afirmação é verdadeira.

6. $A_{\text{total}} = 10 + 40 + 70 + 120 + 70 + 110 + 40 + 20 + 10 + 40 + 30 + 10 + 20 = 590$

Como $10 + 40 < \frac{10 \times 590}{100} < 10 + 40 + 70$ então $P_{10} \in [50, 60[$.

$$10 + 40 + 7(P_{10} - 50) = \frac{10 \times 590}{100} \Leftrightarrow P_{10} - 50 = \frac{59 - 50}{7} \Leftrightarrow P_{10} = \frac{9}{7} + 50, \text{ logo } P_{10} \approx 51,29.$$

Como $10 + 40 + 70 + 120 < \frac{50 \times 590}{100} < 10 + 40 + 70 + 120 + 70$, então $P_{50} \in [70, 80[$.

$$10 + 40 + 70 + 120 + 7(P_{50} - 70) = \frac{50 \times 590}{100} \Leftrightarrow P_{50} - 70 = \frac{295 - 240}{7} \Leftrightarrow P_{50} = \frac{45}{7} + 70,$$

logo $P_{50} \approx 77,86$.

Título

*Expoente*¹⁰
Dossiê do Professor
Resoluções
Matemática A

Autoras

Daniela Raposo
Luzia Gomes

Com a colaboração de
Alexandra Queirós

Execução Gráfica

TALIGRAF - Artes Gráficas,
Lda.

Depósito Legal
Nº 396 420/15

ISBN

978-888-89-0446-7

Ano/Edição/Tiragem

2015/1ª Edição/1ª Tiragem

