# TD Introduction à la physique quantique

**Données**

Le diagramme ci-contre fait correspondre couleur absorbée et couleur complémentaire.

Constante de Planck : $h = 6{,}63 \times 10^{-34}$ J s.

Vitesse de la lumière dans le vide : $c = 3{,}00 \times 10^{8}$ m s$^{-1}$.

Permittivité du vide : $\varepsilon_0 = 8{,}85 \times 10^{-12}$ F m$^{-1}$.

Charge élémentaire : $e = 1{,}60 \times 10^{-19}$ C.

Masse d'un électron : $m_e = 9{,}11 \times 10^{-31}$ kg.

## Exercice 1 : Diffusion Compton

L'Américain Arthur Compton réalisa en 1923 l'expérience suivante : il envoya sur une mince feuille de graphite des rayons X durs, c'est-à-dire une onde électromagnétique de courte longueur d'onde $\lambda$, comprise entre 1 pm et 1 nm environ. Il observa alors que l'onde était diffusée (déviée) dans une certaine gamme de directions $\theta$ vérifiant

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{m_e c}(1 - \cos\theta),$$

avec $\lambda'$ la longueur d'onde diffusée.

**1.** Montrer que $\dfrac{h}{m_e c}$ est homogène à une longueur et calculer sa valeur numérique.

**2.** Pourquoi cette expérience est-elle particulièrement intéressante pour des rayons X ?

**3.** Comment évolue l'énergie d'un photon dans cette expérience ? Que se passe-t-il ?

**4.** Pour des rayons X incidents de longueur d'onde $\lambda = 70{,}8$ pm, on observe des rayons X diffusés à $90°$. Quelle est leur longueur d'onde $\lambda'$ ?

**5.** Quelle est l'énergie perdue par un photon ? Qu'en déduire sachant qu'une énergie d'ionisation est de l'ordre de la dizaine d'électronvolts ?

Cette expérience peut être interprétée en termes corpusculaires, mais pas de manière ondulatoire, vu le changement de fréquence du photon. Tout comme l'effet photoélectrique, elle nécessite donc la notion de photon.

## Exercice 2 : Microscope électronique

Dans un microscope électronique, les électrons sont accélérés par une différence de potentiel d'une cinquantaine de kV qui leur communique une énergie cinétique d'environ 50 keV.

**1.** Quelle est la quantité de mouvement d'un électron en sortie ?

**2.** Quelle est sa longueur d'onde ?

**3.** Conclure quant à l'intérêt par rapport à un microscope optique.

## Exercice 3 : Énergie et fonction d'onde d'un électron confiné

Certaines molécules ayant une longue chaine linéaire, comme le $\beta$-carotène, contiennent des électrons qui ne sont pas attachés à un noyau particulier, mais peuvent au contraire se déplacer sur toute la longueur de la molécule.

On modélise ici un tel électron comme une particule qui se déplace librement sur un segment de droite, entre les abscisses $x = 0$ et $x = L$ ; son énergie potentielle $E_p$ est nulle sur le segment et infiniment grande partout ailleurs. Sa fonction d'onde $\psi(x)$ est alors liée à son énergie totale $E$ par l'équation différentielle $-\dfrac{h^2}{8\pi^2 m_e}\dfrac{d^2\psi}{dx^2} = E\psi$ (équation de Schrödinger stationnaire).

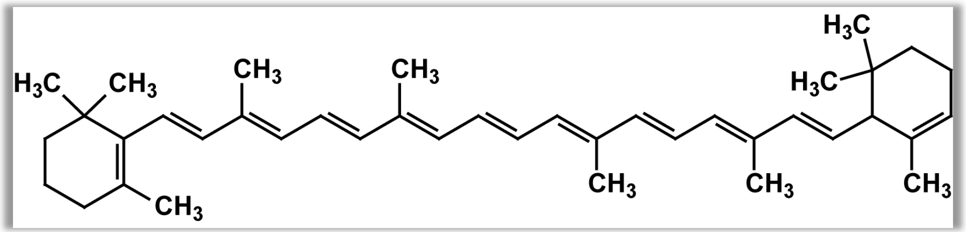
**1.** On cherche tout d'abord à déterminer la fonction d'onde $\psi(x)$.

**a.** Justifier que $\psi(x) = 0$ en dehors de l'intervalle $[0, L]$.

**b.** $\psi$ étant une fonction continue, elle est nulle aux deux extrémités de la molécule : $\psi(0) = \psi(L) = 0$. Montrer que la solution de l'équation différentielle est de la forme $\psi(x) = A\sin\left(\dfrac{n\pi x}{L}\right)$, où $n$ est un entier strictement positif et $A$ une constante d'intégration qu'on ne cherchera pas à déterminer.

**2.** En déduire l'expression des niveaux d'énergie $E_n$ en fonction de $m$, $L$, $h$ et $n$.

**3.** Dans le $\beta$-carotène (formule ci-dessous), ce sont les électrons des onze liaisons doubles qui se comportent comme des particules libres confinées, sur une longueur $L = 1{,}83$ nm.



Dans l'état fondamental, ces électrons occupent les onze niveaux d'énergie les plus bas.

**a.** Calculer les niveaux d'énergie $E_{11}$ et $E_{12}$.

**b.** En déduire l'énergie, puis la longueur d'onde $\lambda$ dans le vide, d'un photon absorbé par la molécule lorsqu'un électron passe du niveau 11 au niveau 12.

**c.** Expliquer alors la couleur orangée des organismes contenant une grande quantité de cette molécule (carottes, citrouilles…).

## Exercice 4 : Énergie minimale d'un électron dans un atome d'hydrogène

Considérons un atome d'hydrogène constitué d'un proton et d'un électron. Le proton est supposé fixe et constitue l'origine du repère. L'électron possède une énergie potentielle $E_{\mathrm{p}} = -\dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$ du fait de son interaction électrostatique avec le proton, avec $r$ la distance entre les deux particules. L'électron possède également une énergie cinétique $E_{\mathrm{c}}$.

**1.** Supposons que l'électron est confiné au voisinage du proton dans une région d'extension spatiale notée $a$. Établir l'inégalité en ordre de grandeur sur l'énergie cinétique

$$E_{\mathrm{c}} \gtrsim \frac{\hbar^2}{2m_{\mathrm{e}}a^2}.$$

**2.** Déterminer la valeur $a_0$ de $a$ pour laquelle l'énergie mécanique de l'électron est minimale. Calculer $a_0$ en picomètres.

**3.** Exprimer cette énergie minimale $E_0$. Calculer sa valeur en électronvolts.

**4.** Commenter les résultats obtenus.

## Exercice 5 : Modèle de l'atome d'hydrogène (d'après CCINP PC 2019)

On considère qu'un électron évolue, avec un mouvement circulaire uniforme, autour d'un noyau massif de charge électrique positive.

On considèrera qu'un électron sur une orbite de rayon $r$ possède une vitesse $v = \dfrac{e}{\sqrt{4\pi\varepsilon_0 m_{\mathrm{e}} r}}$ et une énergie mécanique $E_{\mathrm{M}} = -\dfrac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 r}$.

**1.** En traduisant le fait que l'onde de matière associée à l'électron doit interférer constructivement avec elle-même après un tour sur son orbite, établir une relation entre la longueur d'onde de De Broglie de l'électron $\lambda_{\mathrm{e}}$ et le périmètre $\mathcal{P}$ de son orbite.

**2.** En déduire que l'électron ne peut se trouver que sur certaines orbites de rayon $r_n = r_0 n^2$, où $n$ est le nombre quantique principal, $n \in \mathbb{N}^*$.

Préciser l'expression de $r_0$ en fonction de $\varepsilon_0$, $h$, $m_{\mathrm{e}}$ et $e$. Calculer la valeur de $r_0$.

**3.** Montrer que l'électron qui se trouve sur une orbite de rayon $r_n$ possède une énergie mécanique $E_{\mathrm{M}} = -\dfrac{E_0}{n^2}$.

Préciser l'expression de $E_0$ en fonction de $\varepsilon_0$, $h$, $m_{\mathrm{e}}$ et $e$. Calculer, en électronvolt, la valeur de $E_0$. Que représente physiquement $E_0$ ?

Lorsqu'un électron va d'une orbite externe vers une orbite interne, on parle de réarrangement du cortège électronique ou de désexcitation et cela se traduit par l'émission d'un photon.

**4.** Montrer que la longueur d'onde du photon émis est liée aux nombres quantiques $n_{\mathrm{i}}$ et $n_{\mathrm{f}}$ des orbites de départ et d'arrivée de l'électron par l'expression de Rydberg-Ritz : $\dfrac{1}{\lambda} = R_{\mathrm{H}}\left(\dfrac{1}{n_{\mathrm{f}}^2} - \dfrac{1}{n_{\mathrm{i}}^2}\right)$ avec $n_{\mathrm{i}} > n_{\mathrm{f}}$. $R_{\mathrm{H}}$ est la constante de Rydberg.

Préciser l'expression de $R_{\mathrm{H}}$ en fonction de $E_0$, $h$ et $c$. Indiquer sa valeur et son unité.

**5.** Les raies de la série de Lyman sont celles pour lesquelles l'électron est revenu à la couche K $(n_{\mathrm{f}} = 1)$. Dans ce cas, la mesure des trois premières raies donne les longueurs d'onde suivantes : $\lambda_1 = 121{,}5$ nm ; $\lambda_2 = 102{,}5$ nm ; $\lambda_3 = 97{,}2$ nm.

À quelle partie du spectre électromagnétique ces longueurs d'onde correspondent-elles ?

Calculer, à partir de ces valeurs expérimentales, la constante de Rydberg. Conclure.

## Exercice 6 : Déviation du césium par un faisceau lumineux (D'après Mines-Ponts PC 2018)

Afin de vérifier certains résultats de la théorie cinétique des gaz, on chauffe des atomes de césium, de masse $m$, placés dans un four percé d'un petit orifice. Ils en sortent avec une vitesse caractéristique $v = 3{,}0 \times 10^2$ m s$^{-1}$. Deux fentes $\mathrm{F}_1$ et $\mathrm{F}_2$ parallèles à $(\mathrm{O}y)$, de largeur $\varepsilon = 10$ µm et distantes de $\ell$, permettent d'obtenir des trajectoires quasi-parallèles à $(\mathrm{O}z)$ jusqu'au détecteur d'atomes : un fil chaud de 10 µm de diamètre au sein duquel un courant d'ionisation est créé par bombardement atomique. Ce courant est ensuite mesuré par un électromètre qui permet donc de déduire le nombre d'atomes reçus en fonction de la position $x$ du fil chaud.

À travers un hublot, on irradie, sur une longueur $a \approx 20$ cm, le jet atomique avec une lampe spectrale classique dont la longueur d'onde $\lambda \approx 0{,}9$ µm correspond à une raie d'absorption du césium.

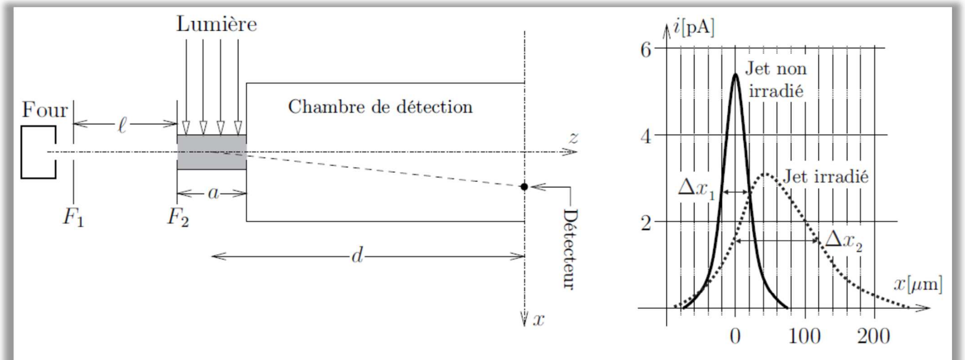



FIGURE 2 – L'expérience de PICQUÉ et VIALLE (à gauche) et les résultats expérimentaux (à droite)

On considèrera que l'irradiation a lieu à une distance $d = 72$ cm du détecteur. L'expérience a été réalisée par Jean-Louis Picqué et Jean-Louis Vialle au laboratoire Aimé Cotton de l'Université d'Orsay en 1972. Le dispositif est représenté sur la partie gauche de la figure 2.

*Données* :

➢ Nombre d'Avogadro : $\mathcal{N}_A = 6{,}0 \times 10^{-23}$ mol$^{-1}$.

➢ Masse molaire du césium : $M = 133 \times 10^{-3}$ kg mol$^{-1}$.

**1.** Rappeler l'expression de la quantité de mouvement d'un photon du faisceau irradiant.

**2.** On suppose que la quantité de mouvement totale se conserve lors de l'absorption d'un photon par un atome de césium, et l'on note $\theta$ l'angle que fait par rapport à $(\mathrm{O}z)$ la vitesse d'un atome de césium après cette absorption. Exprimer $\theta$ en fonction de $h$, $m$, $\lambda$ et $v$. En déduire la déviation $\delta x$ d'un atome, au niveau du détecteur, associée à l'absorption d'un seul photon.

**3.** En analysant les résultats expérimentaux, estimer le nombre moyen $N_\gamma$ de photons absorbés par les atomes lors de leur irradiation.

## Exercice 7 : Rayonnement stellaire

Au niveau du sol, le rayonnement solaire transporte une puissance surfacique $\Phi_S$ de l'ordre de 500 W m$^{-2}$.

**1.** Donner l'ordre de grandeur de l'énergie $\varepsilon_S$ reçue par un œil regardant pendant une seconde le Soleil au travers d'un filtre ne laissant passer que $10^{-3}$ % de l'énergie. La pupille a alors un diamètre $D \approx 2$ mm.





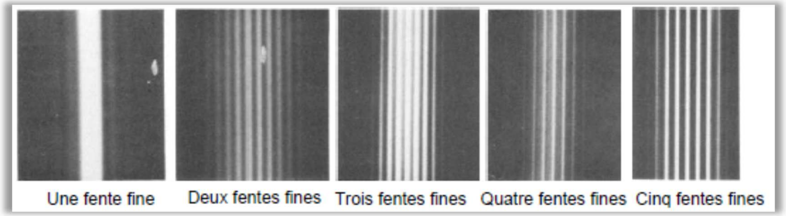
**2.** Estimer le nombre $N_S$ de photons qui atteignent l'œil pendant cette durée (on prendra comme longueur d'onde moyenne $\lambda = 600$ nm)

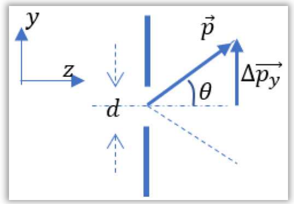
**3.** Les étoiles visibles les plus faibles du ciel émettent un rayonnement possédant au niveau de la Terre une puissance surfacique $\Phi_E$ de l'ordre de $10^{-14}$ W cm$^{-2}$. Combien l'œil reçoit-il de photons chaque seconde d'une telle étoile ?

**4.** Pour une perception continue de la lumière, on estime que plusieurs cellules de l'œil (environ 5) doivent être excitées environ toutes les 0,1 s. Commenter.

## Exercice 8 : Propriétés ondulatoires des électrons (d'après CAPES 2020)

La physique quantique associe aux particules une longueur d'onde et leur confère des propriétés ondulatoires. Afin de mettre en évidence le caractère ondulatoire des particules, C. Jönsson réalisé en 1961 des expériences consistant à envoyer des électrons à travers une ou plusieurs fentes. Les figures ci-dessous sont obtenues sur un écran fluorescent.



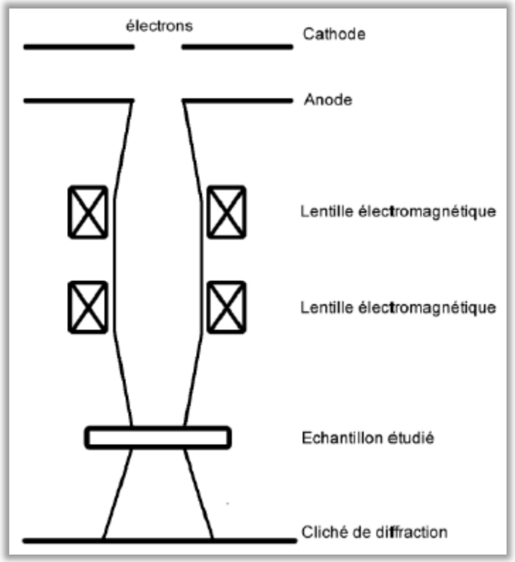




Soir un électron auquel on associe une longueur d'onde $\lambda_e$ arrivant en incidence normale sur une fente fine. On suppose qu'après avoir franchi cette fente fine, son vecteur quantité de mouvement $\vec{p}$ s'inscrit dans un prisme de demi-angle au sommet $\theta$.

Il existe donc, pour cet électron, une indétermination de la composante $\Delta p_y$ de $\vec{p}$. De même, l'électron qui passe par la fente fine, de largeur $d$, possède une certaine indétermination spatiale $\Delta y$ dont la valeur peut être estimée par $d$.

**1.** On donne la relation d'indétermination d'Heisenberg qui relie $\Delta y$ et $\Delta p_y$ telle que $\Delta y \Delta p_y \geqslant \dfrac{h}{4\pi}$. Montrer, en utilisant la relation de de Broglie, que la physique quantique prévoit bien l'existence d'un écart angulaire minimum $\theta_m$ de diffraction fonction de $d$ et $\lambda_e$.

Les résultats de C. Jönsson mettent aussi en évidence que la résolution de la figure d'interférences, c'est-à-dire la précision maximale avec laquelle on peut faire des pointés, augmente lorsque le nombre $N$ de fentes augmente. Cette propriété est mise à profit dans les microscopes électroniques en transmission. Les électrons, initialement immobiles, sont accélérés grâce à une tension $U > 0$ entre une cathode et une anode. Ces électrons sont supposés non relativistes. Ils sont associés à une longueur d'onde d'environ un ordre de grandeur plus petit que la distance interatomique $d_e$.




Après accélération et focalisation, ces électrons atteignent un nombre important d'atomes d'un très mince échantillon. L'analyse de la figure de diffraction peut permettre ensuite d'étudier la structure cristalline de l'échantillon.

**2. Résolution de problème**

Donner une estimation de la valeur de la tension $U$ nécessaire pour analyser un solide cristallin par l'étude de la figure de diffraction électronique. Commenter à posteriori l'hypothèse d'un mouvement non relativiste des électrons.

*La réponse à cette question nécessite de l'initiative.*

## Exercice 9 : Fonction d'onde d'une particule dans un puits infini

Une particule quantique est confinée dans la zone comprise entre les plans $x = 0$ et $x = \ell$ dans un puits infini. On admet que sa fonction d'onde est de la forme

$$\psi(x,t) = A\sin(kx)\exp(-\mathrm{i}\omega t),$$

où $A$, $k$ et $\omega$ sont des constantes réelles positives.

**1.** Déterminer les valeurs possibles de $k$ en fonction de $\ell$ et d'un entier $n$ positif quelconque.

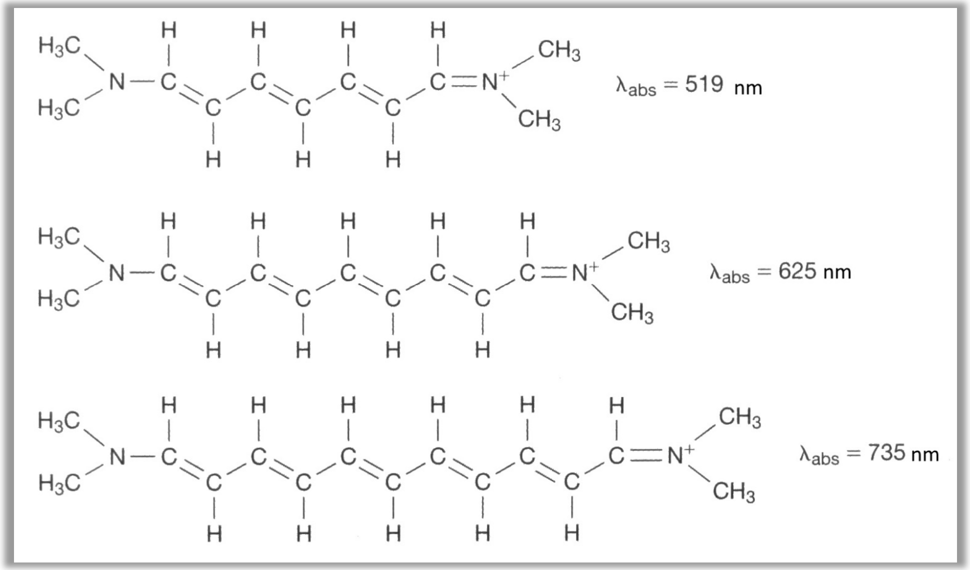
**2.** La probabilité de trouver la particule dans l'intervalle $[x, x+\mathrm{d}x]$ est $|\psi(x,t)|^2\,\mathrm{d}x$. Justifier la condition de normalisation $\int_0^\ell |\psi(x,t)|^2\,\mathrm{d}x = 1$. L'utiliser pour trouver l'expression de $A$ en fonction de $\ell$.

**3.** Tracer $|\psi(x,t)|^2$ en fonction de $x$ dans les cas $n = 1$ et $n = 2$. Commenter. Comparer aussi au cas d'une particule classique.

## Exercice 10 : Cyanines

Les cyanines sont des colorants organiques. Le but de cet exercice est de montrer que leur couleur est simplement liée à leur longueur. En général, établir le lien entre la structure d'une molécule et les longueurs d'onde qu'elle absorbe est complexe. La particularité de la structure des cyanines en permet une estimation simple.

Les cyanines sont des molécules formées d'une chaine carbonée (voir la figure ci-après, où est également indiquée la longueur d'onde d'absorption de la molécule). Les électrons participant aux liaisons $\pi$ (c'est à dire, grossièrement, participant à la seconde liaison de la liaison double) ne sont pas localisés entre deux atomes, mais répartis tout au long de la chaine. La molécule peut alors être modélisée pour ces électrons par un fil conducteur de longueur $L$.




La distance entre deux atomes de carbone ou entre un atome de carbone et un atome d'azote est $d \approx 0{,}14$ nm.

**1.** Rappeler rapidement les longueurs d'onde possibles pour la fonction d'onde associée à un électron dans une boite de longueur $L$. Déduire la quantité de mouvement d'un tel électron en utilisant la relation de de Broglie. Obtenir alors les valeurs associées $E_n$ de l'énergie de l'électron. On exprimera $E_n$ en fonction de $h$, $m_e$ et $L$ et d'un entier $n > 0$.
On s'intéresse à la molécule de cyanine possédant 9 atomes de carbone entre les atomes d'azote.
**2.** Quelle est la longueur $L$ du fil associé ? On supposera qu'il faut considérer tous les atomes possédant une double liaison, ainsi que le second atome d'azote, et que le fil associé dépasse les atomes extrémaux d'une demi-liaison. On considèrera enfin que les atomes sont en ligne droite.
**3.** Calculer les niveaux d'énergie en eV jusqu'à $n = 7$. Les représenter graphiquement.
**4.** Il s'agit de remplir les niveaux. Combien d'électrons sont-ils concernés (il s'agit d'électrons $\pi$ des doubles liaisons, ainsi que 2 électrons pour l'atome d'azote non engagé dans une double liaison) ? Le principe d'exclusion de Pauli indique que l'on peut placer deux électrons (de spins opposés) par niveau. Tracer alors le diagramme d'occupation dans l'état d'énergie le plus bas.
**5.** Quelle est la transition pour l'excitation de plus basse énergie ? Calculer la longueur d'onde associée en supposant que la transition est induite par l'absorption d'un photon. Comparer avec les données expérimentales. De quelle couleur apparait cette molécule ?
**6.** Reprendre le raisonnement pour la molécule à 11 atomes de carbone...
**7.** ... puis pour celle à 7 atomes de carbone.
**8.** Commenter les résultats obtenus.



## Éléments de réponses

**1 :** 1. $\dfrac{h}{m_e c} = 2{,}4$ pm. 4. $\lambda' = \lambda + \dfrac{h}{m_e c} = 7{,}32\times10^{-11}$ m.
5. $\Delta\mathcal{E} = hc\left(\dfrac{1}{\lambda} - \dfrac{1}{\lambda'}\right) = 1\times10^{-16}$ J $= 0{,}6$ keV.

**2 :** 1. $p = \sqrt{2m_e E_c} = 1{,}2\times10^{-22}$ kg m s$^{-1}$. 2. $\lambda = \dfrac{h}{p} = 5{,}5\times10^{-12}$ m.

**3 :** 2. $E = \dfrac{n^2h^2}{8m_eL^2}$. 3.a. $E_{11} = 2{,}18\times10^{-18}$ J ; $E_{12} = 2{,}59\times10^{-18}$ J.
b. $\mathcal{E} = E_{12} - E_{11} = 4{,}1\times10^{-19}$ J ; $\lambda = \dfrac{hc}{\mathcal{E}} = 0{,}49$ µm.

**4 :** 2. $a_0 \approx \dfrac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}{m_e e^2} = 53$ pm. 3. $E_0 \approx \dfrac{\hbar^2}{2m_e a_0^2} - \dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 a_0} = -14$ eV.

**5 :** 1. $\mathcal{P} = n_1\lambda_e$. 2. $r_0 = \dfrac{\varepsilon_0 h^2}{\pi m_e e^2} = 53{,}1$ pm. 3. $E_0 = \dfrac{m_e e^4}{8\varepsilon_0^2 h^2} = 13{,}5$ eV.
4. $R_H = \dfrac{E_0}{hc} = 1{,}09\times10^7$ m$^{-1}$. 5. $R_H = \dfrac{(i+1)^2}{i(i+2)\lambda_i}$.

**6 :** 1. $p = \dfrac{h}{\lambda}$. 2. $\theta = \dfrac{h}{mv\lambda}$ ; $\delta x = \dfrac{\mathcal{N}_A hd}{Mv\lambda} = 8$ µm. 3. $N_\gamma = \dfrac{\Delta x}{\delta x} = 5$.

**7 :** 1. $\varepsilon_S = \dfrac{\pi}{4}k\Phi_S D^2\Delta t \approx 10^{-8}$ J. 2. $N_S = \dfrac{\varepsilon_S\lambda}{hc} \approx 10^{10}$. 3. $N_E = \dfrac{\pi\lambda}{4hc}\Phi_E D^2\Delta t \approx 10^3$.

**8 :** 1. $\theta_m = \arcsin\left(\dfrac{\lambda_e}{4\pi d}\right)$. 2. $U = \dfrac{50h^2}{em_e d_e^2} = 15$ kV ; $v = \sqrt{\dfrac{2eU}{m_e}} = 7\times10^7$ m s$^{-1}$.

**9 :** 1. $k = \dfrac{n\pi}{\ell}$. 2. $A = \sqrt{\dfrac{2}{\ell}}$.

**10 :** 1. $\lambda_n = \dfrac{2L}{n}$ ; $p_n = \dfrac{nh}{2L}$ ; $E_n = \dfrac{n^2h^2}{8m_eL^2}$. 2. $L = 11d = 1{,}5$ nm.
5. $\lambda = \dfrac{hc}{E_7 - E_6} = 0{,}59$ µm. 6. $\lambda = \dfrac{1352cm_ed^2}{15h} = 0{,}73$ µm.
7. $\lambda = \dfrac{648cm_ed^2}{11h} = 0{,}48$ µm.