
Processus stochastiques

M2 Mathématiques

Jean-Christophe BRETON

Université de Rennes 1

Septembre–Octobre 2022

Table des matières

I	Processus stochastiques	1
1	Processus stochastiques	3
1.1	Loi d'un processus	3
1.2	Régularité des trajectoires	7
1.3	Convergence faible des lois de processus	10
1.3.1	Rappels sur la convergence faible	11
1.3.2	Équitension	15
2	Processus gaussiens	17
2.1	Lois des processus gaussiens	17
2.2	Régularité gaussienne	20
2.3	Espace gaussien	21
2.4	Exemples de processus gaussiens	23
3	Mouvement brownien	29
3.1	Historique	29
3.2	Définition, premières propriétés	31
3.2.1	Propriétés immédiates	31
3.3	Constructions du mouvement brownien	33
3.3.1	Principe d'invariance de Donsker	34
3.3.2	Mesure de Wiener	38
3.4	Propriétés en loi du mouvement brownien	39
3.5	Propriétés trajectorielles du mouvement brownien	41
3.5.1	Loi du 0/1 de Blumenthal	41
3.5.2	Conséquences trajectorielles de la loi du 0/1 de Blumenthal	44
3.5.3	Régularité trajectorielle brownienne	46
3.6	Variation quadratique	47
3.7	Propriété de Markov forte	50
3.7.1	Temps d'arrêt	50
3.7.2	Propriété de Markov	53
3.7.3	Principe de réflexion	54
3.8	Équation de la chaleur	56
3.8.1	Origine physique	56

3.8.2	Origine mathématique	57
II	Martingales	61
4	Martingales en temps continu	63
4.1	Filtration et processus	63
4.2	Filtrations et temps d'arrêt	66
4.3	Définition et exemples de martingales en temps continu	71
4.4	Inégalités pour martingales en temps continu	72
4.5	Régularisation de trajectoires	75
4.6	Théorèmes de convergence	79
4.7	Théorème d'arrêt	81
4.8	Processus de Poisson	85
5	Semimartingales continues	87
5.1	Processus à variation bornée	87
5.1.1	Fonctions à variation bornée	87
5.1.2	Intégrale de Stieltjes	90
5.1.3	Extension de l'intégration de Stieltjes à \mathbb{R}_+	91
5.1.4	Processus à variation bornée	91
5.2	Martingales locales	93
5.3	Variation quadratique d'une martingale locale	97
5.4	Semimartingales continues	111
III	Intégration stochastique	115
6	Intégration stochastique	117
6.1	Par rapport à une martingale bornée dans L^2	117
6.2	Par rapport à une martingale locale	126
6.3	Par rapport à une semimartingale	131
6.4	Cas non continu	133
7	Formule d'Itô et conséquences	135
7.1	Formule d'Itô	135
7.2	Théorème de Lévy	145
7.3	Dubins-Schwarz	147
7.4	Inégalités de Burkholder-Davis-Gundy	149
7.5	Représentation des martingales browniennes	155
7.6	Formules de Tanaka	159

Introduction

Ces notes de cours ont pour but d'introduire au calcul stochastique et à ses outils fondamentaux. Elles sont principalement destinées aux étudiants du Master 2 Mathématiques et applications de l'Université de Rennes 1. Ces notes ont plusieurs sources d'inspiration, dont principalement [LG1] mais aussi les notes de cours [Gué], [EGK], [Mal]. Par ailleurs, des références standards conseillées sur le sujet sont les livres [KS], [RY] (en anglais) et [Gal], [CM] (en français).

Le contenu de ces notes est le suivant :

On commence par quelques rappels gaussiens en introduction. La notion générale de processus stochastique est présentée au Chapitre 1. Le Chapitre 2 introduit la classe des processus gaussiens. Ces chapitres s'inspirent de [Dav] et des références classiques sont [Bil2], [Kal].

Au Chapitre 3, on présente le mouvement brownien, processus stochastique central, dont on discute de nombreuses propriétés.

Au Chapitre 4, on introduit la notion de martingale en temps continu. On revisite les principales propriétés connues dans le cas des martingales discrètes.

La notion de semimartingale, essentielle dans la théorie de l'intégration stochastique, est présentée au Chapitre 5.

Le Chapitre 6 est consacré à la construction des intégrales stochastiques et à ses principales propriétés.

On achève ces notes avec la formule d'Itô dans le Chapitre 7. Ce résultat est essentiel et constitue le point de départ du calcul stochastique qui est la suite naturelle de cours et pour laquelle on renvoie à [JCB-stoch].

Les propriétés de l'intégrale stochastique, en particulier la formule d'Itô et le théorème de Girsanov, sont des outils qui fondent le calcul stochastique.

Les prérequis de ce cours sont des probabilités de base (des fondements des probabilités aux conséquences de la LGN et du TCL – niveau L3) pour lesquelles on pourra consulter [JCB-proba], les martingales en temps discret (niveau M1), voir [JCB-martingale].

Rappels gaussiens

Dans ce chapitre, on rappelle les principaux résultats sur les variables aléatoires gaussiennes et sur les vecteurs aléatoires gaussiens. Ces rappels seront utiles pour généraliser le cadre gaussien aux processus au Chapitre 2 et présenter la notion de processus gaussien.

Variables gaussiennes

Définition 0.1 Une variable aléatoire X suit la loi normale standard $\mathcal{N}(0, 1)$ si elle admet pour densité

$$t \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-t^2/2).$$

De façon générale, une variable aléatoire X suit la loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ ($m \in \mathbb{R}$, $\sigma^2 > 0$) si elle admet pour densité

$$t \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}\right).$$

Si $\sigma^2 = 0$, la loi est dégénérée, la variable aléatoire X est constante égale à m . Sa loi est une mesure de Dirac en m : $\mathbb{P}_X = \delta_m$.

Proposition 0.2 Une variable aléatoire $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$ peut se voir comme la translatée et la dilatée de $X_0 \sim \mathcal{N}(0, 1)$ par $X = m + \sigma X_0$.

Autrement dit si $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$, $\sigma^2 > 0$, on définit la variable aléatoire centrée réduite $\tilde{X} = (X-m)/\sigma$. Elle suit la loi $\mathcal{N}(0, 1)$. Cette action s'appelle "centrer, réduire".

Proposition 0.3 Une variable aléatoire X de loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ a pour

- espérance : $\mathbb{E}[X] = m$;
- variance : $\text{Var}(X) = \sigma^2$;
- fonction caractéristique : $\varphi_X(t) = \exp(imt - \sigma^2 t^2/2)$.

Si $X \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ alors les moments de X sont donnés par

$$\mathbb{E}[X^{2n}] = \frac{(2n)!}{2^n n!} \sigma^{2n} \quad \text{et} \quad \mathbb{E}[X^{2n+1}] = 0. \tag{1}$$

Démonstration : [Esquisse] Centrer, réduire pour se ramener à $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Calculs simples pour $\mathbb{E}[X]$, $\text{Var}(X)$. Pour la fonction caractéristique, identifier les fonctions holomorphes $\mathbb{E}[e^{zX}]$ et $e^{z^2/2}$ pour $z \in \mathbb{R}$ et considérer $z = ix$. Pour les moments de tous ordres faire des intégrations par parties successives. \square

L'estimation de la queue normale suivante s'avère utile : pour $N \sim \mathcal{N}(0, 1)$ et $x \geq 1$, on a

$$\mathbb{P}(N \geq x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{+\infty} e^{-t^2/2} dt \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{+\infty} t e^{-t^2/2} dt \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}. \quad (2)$$

En fait, on a une estimation valable pour tout $x > 0$ et meilleure si $x \geq 1$:

Proposition 0.4 Soit $N \sim \mathcal{N}(0, 1)$ et $x > 0$ alors

$$\mathbb{P}(N \geq x) \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}x^2} \exp(-x^2/2).$$

Démonstration : En notant $f(x) = \frac{1}{x\sqrt{2\pi}} \exp(-x^2/2)$, on a

$$f'(x) = -\frac{\exp(-x^2/2)}{\sqrt{2\pi}} - \frac{1}{x^2} \frac{\exp(-x^2/2)}{\sqrt{2\pi}} \leq -\frac{\exp(-x^2/2)}{\sqrt{2\pi}}.$$

D'où

$$\mathbb{P}(N \geq x) = \int_x^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-u^2/2) du \leq - \int_x^{+\infty} f'(u) du = -[f(u)]_x^{+\infty} = f(x).$$

\square

Proposition 0.5 Soit $N_1 \sim \mathcal{N}(m_1, \sigma_1^2)$ et $N_2 \sim \mathcal{N}(m_2, \sigma_2^2)$ indépendantes. Alors $N_1 + N_2 \sim \mathcal{N}(m_1 + m_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$.

Démonstration : Par les fonctions caractéristiques, avec l'indépendance, on a :

$$\begin{aligned} \varphi_{N_1+N_2}(t) &= \varphi_{N_1}(t) \varphi_{N_2}(t) = \exp(im_1 t - \sigma_1^2 t^2/2) \exp(im_2 t - \sigma_2^2 t^2/2) \\ &= \exp(i(m_1 + m_2)t - (\sigma_1^2 + \sigma_2^2)t^2/2) = \varphi_{\mathcal{N}(m_1+m_2, \sigma_1^2+\sigma_2^2)}(t) \end{aligned}$$

ce qui prouve le résultat. \square

Proposition 0.6 Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables normales de loi $\mathcal{N}(m_n, \sigma_n^2)$.

1. La suite $(X_n)_{n \geq 1}$ converge en loi ssi $m_n \rightarrow m \in \mathbb{R}$ et $\sigma_n^2 \rightarrow \sigma^2 \in \mathbb{R}_+$. La loi limite est alors $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$.
2. Si la suite $(X_n)_{n \geq 1}$ converge en probabilité vers X , la convergence a lieu dans tous les espaces L^p , $p < +\infty$.

Démonstration : 1) D'après le théorème de Paul Lévy, la convergence en loi $X_n \Longrightarrow X$ est équivalente à avoir pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\varphi_{X_n}(t) = \exp\left(im_n t - \frac{\sigma_n^2}{2} t^2\right) \rightarrow \varphi_X(t), \quad n \rightarrow +\infty. \quad (3)$$

Comme φ_X est continue et $\varphi_X(0) = 1$, il existe $t \neq 0$ tel que $|\varphi_X(t)| \neq 0$. Pour ce t , en prenant le module dans (3), on a $\exp(-\frac{\sigma_n^2}{2} t^2) \rightarrow |\varphi_X(t)|$. On déduit alors que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sigma_n^2 = -\frac{2}{t^2} \ln |\varphi_X(t)| := \sigma^2$ existe. Par suite, on a aussi

$$\exp(im_n t) \rightarrow \exp(\sigma^2 t^2 / 2) \varphi_X(t).$$

Supposons que $(m_n)_{n \geq 1}$ est non bornée. On construit alors une sous-suite $m_{n_k} \rightarrow +\infty$, $k \rightarrow +\infty$ (ou $-\infty$ ce qui mène à un raisonnement analogue). Alors pour tout $\eta > 0$,

$$\mathbb{P}(X \geq \eta) \geq \limsup_{k \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(X_{n_k} \geq \eta) \geq \frac{1}{2}$$

puisque, pour k assez grand, $\mathbb{P}(X_{n_k} \geq \eta) \geq \mathbb{P}(X_{n_k} \geq m_k) = 1/2$ (la moyenne m_k étant aussi la médiane). En faisant $\eta \rightarrow +\infty$, on a $\mathbb{P}(X = +\infty) \geq 1/2$, ce qui est absurde car $\mathbb{P}(X \in \mathbb{R}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(X_n \in \mathbb{R}) = 1$.

On a donc $(m_n)_{n \geq 1}$ bornée. Dès lors, si m et m' sont deux valeurs d'adhérence de $(m_n)_{n \geq 1}$, en passant à la limite sur les bonnes sous-suites, on doit avoir $e^{imt} = e^{im't}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, ce qui exige $m = m'$. Il y a donc unicité de la valeur d'adhérence, c'est à dire existence de la limite m de m_n .

Finalement, $m_n \rightarrow m$ et $\sigma_n \rightarrow \sigma$ ($n \rightarrow +\infty$) et en passant à la limite dans (3), on a :

$$\varphi_X(t) = \exp\left(imt - \frac{\sigma^2}{2} t^2\right)$$

ce qui assure $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$.

2) On écrit $X_n = \sigma_n N_n + m_n$ avec $N_n \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Comme X_n converge en loi, les suites $(m_n)_{n \geq 1}$ et $(\sigma_n)_{n \geq 1}$ sont bornées d'après la partie 1). Par convexité pour $q \geq 1$

$$|\sigma_n N_n + m_n|^q \leq 2^{q-1} (|\sigma_n|^q |N_n|^q + |m_n|^q)$$

et l'expression des moments de N_n , donnée en (1) assure alors

$$\sup_{n \geq 1} \mathbb{E}[|X_n|^q] < +\infty \quad \forall q \geq 1.$$

Comme la convergence en probabilité donne la convergence ps d'une sous-suite X_{n_k} , par le lemme de Fatou, on a :

$$\mathbb{E}[|X|^q] = \mathbb{E}\left[\lim_{k \rightarrow +\infty} |X_{n_k}|^q\right] \leq \liminf_{k \rightarrow +\infty} \mathbb{E}[X_{n_k}^q] \leq \sup_{k \geq 1} \mathbb{E}[|X_{n_k}|^q] \leq \sup_{n \geq 1} \mathbb{E}[|X_n|^q] < +\infty.$$

Soit $p \geq 1$, la suite $|X_n - X|^p$ converge vers 0 en probabilité et est uniformément intégrable car bornée dans L^2 (d'après ce qui précède avec $q = 2p$). Elle converge donc dans L^1 vers 0, ce qui prouve 2) dans la Prop. 0.6. \square

Le caractère universel de la loi normale est illustré par le résultat suivant. Il montre que la loi normale standard contrôle les fluctuations par rapport à leur moyenne des effets cumulés d'un phénomène aléatoire répété avec des répétitions indépendantes.

Dans la suite, *iid* signifiera indépendant(e)s et identiquement distribué(e)s, c'est à dire de même loi. Souvent, on notera aussi *vaiid* pour variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées.

Théorème 0.7 (TCL) *Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires iid, d'espérance m et de variance finie $\sigma^2 > 0$. Soit $S_n = X_1 + \dots + X_n$ la somme partielle. Alors*

$$\frac{S_n - nm}{\sqrt{\sigma^2 n}} \Longrightarrow \mathcal{N}(0, 1), \quad n \rightarrow +\infty.$$

Remarque 0.8 — Le TCL complète la loi des grands nombres : en effet, la LGN donne $S_n/n \rightarrow m$, c'est à dire $S_n - nm \approx 0$. Le TCL donne la vitesse de cette convergence (en loi) : elle est en \sqrt{n} . Noter que la convergence est presque sûre dans la LGN et en loi (donc beaucoup plus faible) dans le TCL.

— La loi $\mathcal{N}(0, 1)$ apparaît à la limite dans le TCL alors que les variables aléatoires X_i sont de lois arbitraires (de carré intégrable) : ce résultat justifie le rôle universel de la loi normale. Elle modélise les petites variations de n'importe quelle loi (avec un moment d'ordre 2) par rapport à sa moyenne.

Démonstration : D'après le théorème de Paul Lévy, il suffit de montrer la convergence des fonctions caractéristiques. Posons $Y_i = (X_i - m)/\sigma$, si bien que les variables aléatoires Y_i sont indépendantes de même loi avec $\mathbb{E}[Y_i] = 0$, $\text{Var}(Y_i) = \text{Var}(X_i)/\sigma^2 = 1$. Notons $S'_n = Y_1 + \dots + Y_n$ et $Z_n = \frac{S_n - nm}{\sqrt{n}} = \frac{S'_n}{\sqrt{n}}$. On a

$$\begin{aligned} \varphi_{Z_n}(t) &= \mathbb{E} \left[\exp \left(it \frac{S'_n}{\sqrt{n}} \right) \right] = \mathbb{E} \left[\exp \left(i \frac{t}{\sqrt{n}} S'_n \right) \right] = \varphi_{S'_n} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) \\ &= \varphi_{Y_1} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) \dots \varphi_{Y_n} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) = \left(\varphi_{Y_1} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) \right)^n \end{aligned}$$

en utilisant $\varphi_{Y_1 + \dots + Y_n} = \varphi_{Y_1} \dots \varphi_{Y_n} = \varphi_{Y_1}^n$ par indépendance et identique distribution des variables aléatoires Y_i .

Comme Y_1 a un moment d'ordre 2, φ_{Y_1} est dérivable 2 fois avec $\varphi_{Y_1}(0) = 1$, $\varphi'_{Y_1}(0) = i\mathbb{E}[Y_1] = 0$ et $\varphi''_{Y_1}(0) = i^2\mathbb{E}[Y_1^2] = -1$. La formule de Taylor à l'ordre 2 en 0 donne alors

$$\varphi_{Y_1}(x) = \varphi_{Y_1}(0) + x\varphi'_{Y_1}(0) + \frac{x^2}{2}\varphi''_{Y_1}(0) + x^2\epsilon(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + x^2\epsilon(x)$$

où la fonction ϵ vérifie $\lim_{x \rightarrow 0} \epsilon(x) = 0$. On a donc

$$\begin{aligned}\varphi_{Z_n}(t) &= \left(\varphi_{Y_1} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) \right)^n = \left(1 - \frac{t^2}{2\sqrt{n}^2} + \frac{t}{\sqrt{n}^2} \epsilon(t/\sqrt{n}) \right)^n = \left(1 - \frac{t^2}{2n} + \frac{1}{n} \epsilon(1/\sqrt{n}) \right)^n \\ &= \exp \left(n \ln \left(1 - \frac{t^2}{2n} + \frac{1}{n} \epsilon(1/\sqrt{n}) \right) \right) = \exp \left(n \left(-\frac{t^2}{2n} + \frac{1}{n} \epsilon(1/\sqrt{n}) \right) \right) \\ &= \exp \left(-\frac{t^2}{2} + \epsilon(1/\sqrt{n}) \right).\end{aligned}$$

(Noter que la fonction reste $\epsilon(\cdot)$ dans φ_{Y_1} est à valeurs complexes si bien qu'il est un peu rapide de prendre directement le logarithme comme précédemment. Cependant l'argument peut être précisé sans passer par la forme exponentielle avec les logarithmes ; on renvoie à un (bon) cours de L3 ou de M1.) On a donc pour chaque $t \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi_{Z_n}(t) = \exp \left(-t^2/2 \right) = \varphi_{\mathcal{N}(0,1)}(t).$$

Le théorème de Paul Lévy donne alors la convergence en loi de Z_n vers $\mathcal{N}(0, 1)$, ce qui prouve le TCL. \square

Remarque 0.9 En général, lorsque n est grand, on approxime la loi d'une somme de variables aléatoires *iid* de $L^2(\Omega)$ par une loi normale grâce au TCL de la façon suivante : Soit $S_n = X_1 + \dots + X_n$ la somme de variables aléatoires *iid* X_i avec $\sigma^2 < +\infty$, on a d'après le TCL

$$\frac{X_1 + \dots + X_n - n\mathbb{E}[X_1]}{\sigma\sqrt{n}} \Longrightarrow \mathcal{N}(0, 1).$$

Quand n est grand, on approxime alors la loi de $\frac{X_1 + \dots + X_n - n\mathbb{E}[X_1]}{\sigma\sqrt{n}}$ par celle de $N \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Si bien que la loi de la somme $S_n = X_1 + \dots + X_n$ est approximée par celle de

$$n\mathbb{E}[X_1] + \sigma\sqrt{n}N \sim \mathcal{N}(n\mathbb{E}[X_1], \sigma^2 n).$$

Règle d'approximation : La somme S_n d'une suite de *va iid* L^2 de moyenne m et de variance σ^2 s'approxime par $S_n \approx \mathcal{N}(nm, n\sigma^2)$.

Application (Moivre-Laplace). Comme une variable aléatoire X_n de loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ peut se voir comme la somme de n variables aléatoires ϵ_i $1 \leq i \leq n$, indépendantes de loi de Bernoulli $b(p)$, $X_n = \epsilon_1 + \dots + \epsilon_n$, la remarque précédente montre qu'on peut approcher la loi $\mathcal{B}(n, p)$ par la loi normale $\mathcal{N}(np, np(1-p))$.

Vecteurs gaussiens

On considère des vecteurs aléatoires dans \mathbb{R}^n . Muni de son produit scalaire canonique, \mathbb{R}^n est un espace euclidien. Pour deux vecteurs $a = (a_1, \dots, a_n), b = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$, on note $\langle a, b \rangle = \sum_{i=1}^n a_i b_i$ leur produit scalaire. On peut généraliser cette section à un espace E euclidien (si $\dim(E) = n$ alors $E \sim \mathbb{R}^n$).

Définition 0.10 (Vecteur gaussien) *Un vecteur aléatoire $X = (X_1, \dots, X_n)$ est gaussien si et seulement si toutes les combinaisons linéaires de ses coordonnées $\langle a, X \rangle = a_1 X_1 + \dots + a_n X_n$ suivent une loi gaussienne dans \mathbb{R} (pour tout $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$). Dans un cadre euclidien E , X vecteur à valeurs dans E est gaussien ssi pour tout $a \in E$, $\langle a, X \rangle$ suit une loi gaussienne.*

En particulier, chaque marginale X_i suit une loi normale et a donc un moment d'ordre 2 fini. Les moments joints $\mathbb{E}[X_i X_j]$, $1 \leq i, j \leq n$, sont donc bien définis (par l'inégalité de Cauchy-Schwarz) et on peut définir licitement la matrice de covariance :

Définition 0.11 *La matrice de covariance d'un vecteur gaussien $X = (X_1, \dots, X_n)$ est la matrice carrée symétrique, positive*

$$K = (\text{Cov}(X_i, X_j))_{1 \leq i, j \leq n}.$$

Si $\det K = 0$, le vecteur est dit **dégénéré**.

L'**espérance** de $X = (X_1, \dots, X_n)$ est le vecteur des espérances de ses marginales

$$\mathbb{E}[X] = (\mathbb{E}[X_1], \dots, \mathbb{E}[X_n]).$$

Si $\mathbb{E}[X] = 0$, le vecteur X est dit **centré**.

Fonction caractéristique gaussienne en dimension n

Si $X = (X_1, \dots, X_n)$ est un vecteur gaussien alors $\langle a, X \rangle = \sum_{i=1}^n a_i X_i$ suit une loi normale de paramètres

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\langle a, X \rangle] &= \mathbb{E}[a_1 X_1 + \dots + a_n X_n] = a_1 \mathbb{E}[X_1] + \dots + a_n \mathbb{E}[X_n] = \langle a, \mathbb{E}[X] \rangle, \\ \text{Var}(\langle a, X \rangle) &= \text{Var}(a_1 X_1 + \dots + a_n X_n) = \sum_{i,j=1}^n a_i a_j \text{Cov}(X_i, X_j) = a^t \text{Cov}(X) a. \end{aligned}$$

La variable aléatoire $\langle a, X \rangle$ suit donc la loi $\mathcal{N}(\langle a, \mathbb{E}[X] \rangle, a^t \text{Cov}(X) a)$, sa fonction caractéristique est donnée par

$$\varphi_{\langle a, X \rangle}(x) = \exp \left(ix \langle a, \mathbb{E}[X] \rangle - \frac{1}{2} (a^t \text{Cov}(X) a) x^2 \right).$$

D'après la définition des fonctions caractéristiques d'une variable aléatoire et d'un vecteur aléatoire

$$\varphi_X(x) = \mathbb{E}[e^{i\langle x, X \rangle}] = \varphi_{\langle x, X \rangle}(1).$$

On en déduit :

Proposition 0.12 *La fonction caractéristique d'un vecteur gaussien $X = (X_1, \dots, X_n)$ est donnée par*

$$\begin{aligned} \varphi_X(x) &= \exp \left(i \langle x, \mathbb{E}[X] \rangle - \frac{1}{2} (x^t \text{Cov}(X) x) \right) \\ &= \exp \left(i \langle x, \mathbb{E}[X] \rangle - \frac{1}{2} \langle x, \text{Cov}(X) x \rangle \right). \end{aligned} \quad (4)$$

Remarque 0.13 — La loi d'un vecteur gaussien est connue dès qu'on a le vecteur moyenne $\mathbb{E}[X]$ et la matrice de covariance $\text{Cov}(X)$.

— On parle du vecteur gaussien standard en dimension n lorsque $\mathbb{E}[X] = 0$ et $\text{Cov}(X) = I_n$. Sa fonction caractéristique se simplifie en

$$\varphi_X(x) = \exp \left(- \langle x, x \rangle / 2 \right) = \exp \left(- \|x\|^2 / 2 \right).$$

— Pour un vecteur gaussien centré, on a $\mathbb{E}[X] = 0$ et on montre que

$$\langle x, \text{Cov}(X) x \rangle = \mathbb{E}[\langle x, X \rangle^2],$$

si bien que dans le cas centré la fonction caractéristique se réécrit :

$$\varphi_X(x) = \exp \left(- \frac{1}{2} \langle x, \text{Cov}(X) x \rangle \right) = \exp \left(- \frac{1}{2} \mathbb{E}[\langle x, X \rangle^2] \right).$$

— En prenant $x = (x_1, 0, \dots, 0)$, on a

$$\varphi_{X_1}(x_1) = \varphi_X(x) = \exp \left(i \mathbb{E}[X_1] x_1 - \text{Var}(X_1) x_1^2 / 2 \right).$$

On retrouve que $X_1 \sim \mathcal{N}(\mathbb{E}[X_1], \text{Var}(X_1))$. Plus généralement, pour tout $1 \leq i \leq n$, on a $X_i \sim \mathcal{N}(\mathbb{E}[X_i], \text{Var}(X_i))$.

Comme pour les variables aléatoires gaussiennes, on peut se ramener à un vecteur gaussien standard en centrant et en réduisant un vecteur gaussien quelconque non dégénéré. On a en effet :

Proposition 0.14 *Soit $X \sim \mathcal{N}(m, K)$ un vecteur gaussien non dégénéré (ie. $\det K \neq 0$) avec $m \in \mathbb{R}^n$ et K sa matrice de covariance. Alors*

$$\sqrt{K}^{-1}(X - m) \sim \mathcal{N}(0, I_n). \quad (5)$$

Si $X \sim \mathcal{N}(m, K)$ est dégénéré, c'est que le vecteur X vit dans un sous-espace vectoriel strict de \mathbb{R}^n . Il faut l'étudier dans ce sous-espace vectoriel.

Démonstration : Comme le vecteur X est non dégénéré, sa matrice de covariance K est définie (c'est à dire inversible). Il existe donc une matrice $A = \sqrt{K}$ inversible telle que $K = AA^t$. (Par la méthode de Cholesky, A peut être choisie triangulaire inférieure.) Il est donc légitime d'utiliser \sqrt{K}^{-1} dans (5).

On montre maintenant que $\tilde{X} = \sqrt{K}^{-1}(X - m)$ est gaussien, standard :

$$\begin{aligned}
\varphi_{\tilde{X}}(x) &= \mathbb{E} \left[\exp(i\langle x, \tilde{X} \rangle) \right] \\
&= \mathbb{E} \left[\exp(i\langle x, \sqrt{K}^{-1}(X - m) \rangle) \right] \\
&= \mathbb{E} \left[\exp(i\langle (\sqrt{K}^{-1})^t x, X - m \rangle) \right] \\
&= \mathbb{E} \left[\exp(i\langle (\sqrt{K}^{-1})^t x, X \rangle) \right] \times \exp \left(-i\langle (\sqrt{K}^{-1})^t x, m \rangle \right) \\
&= \varphi_X \left((\sqrt{K}^{-1})^t x \right) \times \exp \left(-i\langle (\sqrt{K}^{-1})^t x, m \rangle \right) \\
&= \exp \left(i\langle m, (\sqrt{K}^{-1})^t x \rangle - \frac{1}{2} \langle (\sqrt{K}^{-1})^t x, K(\sqrt{K}^{-1})^t x \rangle \right) \times \exp \left(-i\langle (\sqrt{K}^{-1})^t x, m \rangle \right) \\
&= \exp \left(-\frac{1}{2} \langle (\sqrt{K}^{-1})^t x, K(\sqrt{K}^{-1})^t x \rangle \right) \\
&= \exp \left(-\frac{1}{2} \langle x, \sqrt{K}^{-1} K (\sqrt{K}^{-1})^t x \rangle \right) = \exp \left(-\frac{1}{2} \langle x, \sqrt{K}^{-1} \sqrt{K} (\sqrt{K})^t (\sqrt{K}^{-1})^t x \rangle \right) \\
&= \exp \left(-\frac{1}{2} \langle x, x \rangle \right) = \exp \left(-\frac{1}{2} \|x\|^2 \right).
\end{aligned}$$

On a donc bien $\tilde{X} \sim \mathcal{N}(0, I_n)$. □

Remarque 0.15 Comme pour les variables aléatoires normales, un vecteur aléatoire $X \sim \mathcal{N}(m, K)$ avec K inversible peut se voir comme la translatée et dilatée du vecteur gaussien standard $N \sim \mathcal{N}(0, I_n)$:

$$X \sim \sqrt{K}N + m.$$

Indépendance de variables gaussiennes

Proposition 0.16 Soit (X, Y) un couple gaussien. Alors X et Y sont indépendantes si et seulement si $\text{Cov}(X, Y) = 0$.

Démonstration : Le sens direct est vrai quelque soit la loi de X et de Y et suit de $\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$ lorsque $X \perp Y$. Pour la réciproque, on sait que, lorsque (X, Y) est un couple

gaussien, X et Y sont indépendantes si et seulement si $\varphi_{(X,Y)}(t_1, t_2) = \varphi_X(t_1)\varphi_Y(t_2)$. Supposons le couple centré pour simplifier. Le vecteur gaussien (X, Y) a une matrice de covariance diagonale :

$$\begin{pmatrix} \sigma_X^2 & 0 \\ 0 & \sigma_Y^2 \end{pmatrix}$$

car les termes diagonaux sont $\text{Cov}(X, Y) = \text{Cov}(Y, X) = 0$. On déduit de l'expression (4) de la fonction caractéristique de (X, Y) que, pour tout $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} \varphi_{(X,Y)}(t_1, t_2) &= \exp\left(-\frac{1}{2}(t_1^2\sigma_X^2 + t_2^2\sigma_Y^2)\right) = \exp\left(-\frac{1}{2}t_1^2\sigma_X^2\right) \times \exp\left(-\frac{1}{2}t_2^2\sigma_Y^2\right) \\ &= \varphi_X(t_1)\varphi_Y(t_2), \end{aligned}$$

ce qui justifie l'indépendance de X et de Y et prouve la Prop. 0.16. \square

Il est aisé de généraliser de la même façon le résultat pour des vecteurs. Attention, il faut bien veiller à ce que, considérés *ensemble*, les vecteurs forment encore un vecteur gaussien, sinon l'exemple ci-dessous montre que le résultat est faux (cf. aussi un autre exemple ci-dessous).

Exemple 0.17 On considère une variable aléatoire $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$ et une seconde variable aléatoire ε indépendante de X et telle que $\mathbb{P}(\varepsilon = 1) = \mathbb{P}(\varepsilon = -1) = 1/2$. Alors $X_1 = X$, $X_2 = \varepsilon X$ sont deux variables aléatoires $\mathcal{N}(0, 1)$. De plus, $\text{Cov}(X_1, X_2) = \mathbb{E}[X_1 X_2] = \mathbb{E}[\varepsilon] \mathbb{E}[X^2] = 0$. Cependant X_1 et X_2 ne sont évidemment pas indépendantes (par exemple parce que $|X_1| = |X_2|$). Dans cet exemple, le couple (X_1, X_2) n'est pas un vecteur gaussien dans \mathbb{R}^2 bien que ses coordonnées soit des variables gaussiennes.

Proposition 0.18 Soit $(X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_p)$ un vecteur gaussien de dimension $n + p$. Les deux vecteurs aléatoires $X = (X_1, \dots, X_n)$ et $Y = (Y_1, \dots, Y_p)$ sont indépendants si et seulement si toutes les covariances $\text{Cov}(X_i, Y_j)$, $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p$ sont nulles.

Densité gaussienne en dimension n

Soit $X \sim \mathcal{N}(0, I_n)$ un vecteur gaussien standard en dimension n . Comme $\text{Cov}(X) = I_n$, les marginales X_1, \dots, X_n sont toutes indépendantes. La loi du vecteur $X = (X_1, \dots, X_n)$ est donc la loi produit de ses marginales $\mathbb{P}_X = \mathbb{P}_{X_1} \otimes \dots \otimes \mathbb{P}_{X_n}$. En terme de densité, la densité de X est alors donnée par le produit tensoriel des densités marginales

$$\begin{aligned} f_X(x_1, \dots, x_n) &= f_{X_1}(x_1) \times \dots \times f_{X_n}(x_n) \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-x_1^2/2) \right) \times \dots \times \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-x_n^2/2) \right) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \exp\left(-\frac{x_1^2 + \dots + x_n^2}{2}\right). \end{aligned}$$

On a justifié :

Proposition 0.19 *La densité d'un vecteur gaussien $X \sim \mathcal{N}(0, I_n)$ standard en dimension n est*

$$f_X(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}(x_1^2 + \cdots + x_n^2)\right).$$

Pour passer au cas général d'un vecteur gaussien $X \sim \mathcal{N}(m, K)$ non dégénéré (ie. $K = \text{Cov}(X)$ inversible), on utilise la représentation donnée en (5) avec le vecteur gaussien réduit $N \sim \mathcal{N}(0, I_n) : X \sim \sqrt{K}X_0 + m$. Cela permet d'utiliser la densité déjà justifiée dans la proposition précédente : Soit $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X \in A) &= \mathbb{P}(\sqrt{K}X_0 + m \in A) \\ &= \mathbb{P}(X_0 \in \sqrt{K}^{-1}(A - m)) \\ &= \int_{\sqrt{K}^{-1}(A-m)} \frac{\exp(-\|x\|^2/2)}{(2\pi)^{n/2}} dx \\ &= \int_A \frac{\exp(-\|\sqrt{K}^{-1}(y - m)\|^2/2)}{(2\pi)^{n/2}} \frac{dy}{\det \sqrt{K}} \\ &\quad \text{(avec le changement de variable } y = \sqrt{K}x + m) \\ &= \int_A \frac{\exp\left(-\langle (x - m), K^{-1}(x - m) \rangle / 2\right)}{((2\pi)^n \det K)^{1/2}} dx. \end{aligned}$$

On a obtenu la forme générale de la densité d'un vecteur gaussien non dégénéré :

Proposition 0.20 *La densité d'un vecteur gaussien $X \sim \mathcal{N}(m, K)$ non dégénéré est*

$$f_X(x) = \frac{\exp\left(-\langle (x - m), K^{-1}(x - m) \rangle / 2\right)}{((2\pi)^n \det K)^{1/2}}.$$

Variables gaussiennes et vecteurs non gaussiens

On a déjà vu que si un vecteur $X = (X_1, \dots, X_n)$ est gaussien alors ses marginales X_i le sont aussi, de même les combinaisons linéaires de ses marginales le sont. **La réciproque est fausse :** si des variables aléatoires sont gaussiennes alors le vecteur formé par ces variables n'est pas nécessairement gaussien. En effet, prenons X une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(0, 1)$ et Y de loi donnée, pour $a > 0$ fixé, par

$$Y = \begin{cases} X & \text{si } |X| \leq a, \\ -X & \text{si } |X| > a. \end{cases}$$

Alors Y est de loi $\mathcal{N}(0, 1)$ en effet

$$\begin{aligned} \varphi_Y(t) &= \mathbb{E}[e^{itY}] = \mathbb{E}[e^{itX} \mathbf{1}_{|X| \leq a}] + \mathbb{E}[e^{-itX} \mathbf{1}_{|X| > a}] \\ &= \mathbb{E}[e^{itX} \mathbf{1}_{\{|X| \leq a\}}] + \mathbb{E}[e^{itX} \mathbf{1}_{\{-X > a\}}] = \mathbb{E}[e^{itX} \mathbf{1}_{\{|X| \leq a\}}] + \mathbb{E}[e^{itX} \mathbf{1}_{\{|X| > a\}}] \\ &= \mathbb{E}[e^{itX} (\mathbf{1}_{\{|X| \leq a\}} + \mathbf{1}_{\{|X| > a\}})] = \mathbb{E}[e^{itX}] = e^{-t^2/2} \end{aligned}$$

car la loi de X est symétrique : $\mathcal{L}(X) = \mathcal{L}(-X)$. Puis, la variable $X + Y$ est donnée par

$$\begin{aligned} X + Y &= \begin{cases} X + X = 2X & \text{si } |X| \leq a \\ X - X = 0 & \text{si } |X| > a \end{cases} \\ &= 2X \mathbf{1}_{\{|X| \leq a\}}. \end{aligned}$$

La combinaison linéaire $X + Y$ a un atome en 0 car $\mathbb{P}(X + Y = 0) \geq \mathbb{P}(|X| > a) > 0$. Elle ne suit donc pas une loi gaussienne. Le couple aléatoire (X, Y) n'est donc pas gaussien (sinon on devrait avoir $X + Y$ de loi gaussienne!).

De plus, cet exemple montre aussi que dans la Proposition 0.16, l'hypothèse (X, Y) gaussien est nécessaire et il ne suffit pas de supposer que X et Y sont des variables aléatoires gaussiennes. En effet,

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X, Y) &= \mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X^2 \mathbf{1}_{|X| \leq a}] - \mathbb{E}[X^2 \mathbf{1}_{|X| > a}] \\ &= \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X^2 \mathbf{1}_{|X| > a}] - \mathbb{E}[X^2 \mathbf{1}_{|X| > a}] \\ &= 1 - 2\mathbb{E}[X^2 \mathbf{1}_{|X| > a}]. \end{aligned}$$

La fonction $u(a) = \mathbb{E}[X^2 \mathbf{1}_{|X| > a}]$ tend vers 0 en $+\infty$ par convergence dominée, est continue et vaut $\mathbb{E}[X^2] = 1$ en 0. Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe donc $a \in \mathbb{R}_+$ tel que $u(a) = 1/2$ et $\text{Cov}(X, Y) = 0$. Pourtant, X et Y sont non indépendantes sinon la loi du couple (X, Y) serait

$$\mathbb{P}_{(X,Y)} = \mathbb{P}_X \otimes \mathbb{P}_Y = \mathcal{N}(0, 1) \otimes \mathcal{N}(0, 1) = \mathcal{N}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$$

qui est gaussienne, ce qui est faux. On a donc des variables aléatoires gaussiennes X et Y non corrélées mais non indépendantes.

Première partie

Processus stochastiques

Chapitre 1

Processus stochastiques

Ce chapitre présente la notion générale de processus stochastique. On décrit d'abord les lois des processus, leurs propriétés (Section 1.1), les trajectoires des processus (Section 1.2) et la notion de convergence faible des processus (Section 1.3).

Définition 1.1 (Processus stochastique) *Un processus stochastique $X = (X_t)_{t \in T}$ est une famille de variables aléatoires X_t indexée par un ensemble T .*

En général $T = \mathbb{R}$ ou \mathbb{R}_+ et on considère que le processus est indexé par le temps t .

Si T est un ensemble fini, le processus est un vecteur aléatoire. Si $T = \mathbb{N}$ alors le processus est une suite de variables aléatoires. Plus généralement quand $T \subset \mathbb{Z}$, le processus est dit discret. Pour $T \subset \mathbb{R}^d$, on parle de champ aléatoire (drap quand $d = 2$).

Un processus dépend de deux paramètres : $X_t(\omega)$ dépend de t (en général le temps) et de l'aléatoire $\omega \in \Omega$:

- Pour $t \in T$ fixé, $\omega \in \Omega \mapsto X_t(\omega)$ est une variable aléatoire sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$;
- Pour $\omega \in \Omega$ fixé, $t \in T \mapsto X_t(\omega)$ est une fonction à valeurs réelles, appelée trajectoire du processus. C'est un enjeu que de savoir si un processus admet des trajectoires mesurables, continues, dérivables ou encore plus régulières.

Dans la suite, sauf mention contraire, on prendra $T = \mathbb{R}_+$ ou $[0, 1]$.

1.1 Loi d'un processus

Définition 1.2 (Lois fini-dimensionnelles) *On appelle lois fini-dimensionnelles d'un processus l'ensemble des lois*

$$\{\mathcal{L}(X_{t_1}, \dots, X_{t_p}) : t_1, \dots, t_p \in T, p \in \mathbb{N}^*\}. \quad (1.1)$$

Un processus $X = (X_t)_{t \in T}$ est à valeurs dans \mathbb{R}^T . On munit \mathbb{R}^T de la tribu cylindrique $\sigma(\text{Cyl})$ engendrée par la famille des cylindres :

$$\text{Cyl} = \left\{ \{x : T \rightarrow \mathbb{R} : x(t_1) \in A_1, \dots, x(t_p) \in A_p\}, A_1, \dots, A_p \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), p \in \mathbb{N}^* \right\}.$$

Il s'agit de la tribu sur \mathbb{R}^T rendant mesurables les applications coordonnées $\Pi_t : x \in \mathbb{R}^T \mapsto x(t) \in \mathbb{R}$. Il est légitime de regarder un processus X comme une fonction aléatoire à valeurs dans $(\mathbb{R}^T, \sigma(\text{Cyl}))$:

$$X : \begin{cases} (\Omega, \mathcal{F}) & \rightarrow & (\mathbb{R}^T, \sigma(\text{Cyl})) \\ \omega & \mapsto & X(\omega) = (X_t(\omega))_{t \in T}. \end{cases} \quad (1.2)$$

On définit bien une variable aléatoire à valeurs dans $(\mathbb{R}^T, \sigma(\text{Cyl}))$. En effet pour tout cylindre $C = \{x \in \mathbb{R}^T : x(t_1) \in A_1, \dots, x(t_p) \in A_p\}$, on a $X^{-1}(C) = \bigcap_{i=1}^p X_{t_i}^{-1}(A_i)$. Mais chaque X_{t_i} étant une variable aléatoire, on a $X_{t_i}^{-1}(A_i) \in \mathcal{F}$ et $X^{-1}(C) \in \mathcal{F}$. Comme Cyl engendre $\sigma(\text{Cyl})$, on a bien la $(\mathcal{F}, \sigma(\text{Cyl}))$ -mesurabilité de (1.2).

On peut alors considérer la loi \mathbb{P}_X du processus sur $(\mathbb{R}^T, \sigma(\text{Cyl}))$ comme mesure image \mathbb{P} par la variable aléatoire (1.2). En fait les lois fini-dimensionnelles (1.1) de X définissent une loi sur $(\mathbb{R}^T, \sigma(\text{Cyl}))$ par extension :

Théorème 1.3 (Extension de Kolmogorov) Soit $\mathcal{Q} = \{Q_{t_1, \dots, t_p} : t_1, \dots, t_p \in T, p \in \mathbb{N}^*\}$ une famille de lois fini-dimensionnelles vérifiant les **conditions de compatibilité** :

- si $\mathbf{s} = (t_{i_1}, \dots, t_{i_p})$ est une permutation de $\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_p)$ alors pour tout $A_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $i = 1, \dots, p$, on a

$$Q_{\mathbf{t}}(A_1 \times \dots \times A_p) = Q_{\mathbf{s}}(A_{i_1} \times \dots \times A_{i_p});$$

- si $\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_p)$ avec $p \geq 1$, $\mathbf{s} = (t_1, \dots, t_{p-1})$ et $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{p-1})$ alors

$$Q_{\mathbf{t}}(A \times \mathbb{R}) = Q_{\mathbf{s}}(A).$$

Alors il existe une mesure de probabilité P sur $(\mathbb{R}^T, \sigma(\text{Cyl}))$ qui admet $\mathcal{Q} = \{Q_{t_1, \dots, t_p} : t_1, \dots, t_p \in T, p \in \mathbb{N}^*\}$ pour famille de lois fini-dimensionnelles.

Démonstration : Admis, cf. [Kal] ou [KS]. □

Comme les lois fini-dimensionnelles d'un processus $X = (X_t)_{t \in T}$ satisfont immédiatement les relations de compatibilité, le théorème d'extension de Kolmogorov (Th. 1.3) permet effectivement de considérer la loi \mathbb{P}_X d'un processus X sur $(\mathbb{R}^T, \sigma(\text{Cyl}))$. De plus :

Proposition 1.4 La loi \mathbb{P}_X d'un processus stochastique $X = (X_t)_{t \in T}$ est entièrement caractérisée par ses lois fini-dimensionnelles $\{\mathcal{L}(X_{t_1}, \dots, X_{t_p}) : t_1, \dots, t_p \in T, p \in \mathbb{N}^*\}$.

Démonstration : Considérons deux processus $X^{(1)}$ et $X^{(2)}$ partageant les mêmes lois fini-dimensionnelles. Nous montrons que leur loi $P_1 := \mathbb{P}_{X^{(1)}}$ et $P_2 := \mathbb{P}_{X^{(2)}}$ sont égales sur $(\mathbb{R}^T, \sigma(\text{Cyl}))$.

Remarquons que l'ensemble Cyl des cylindres est un π -système (stable par intersection finie : l'intersection de deux cylindres est encore un cylindre). Notons $\mathcal{M} = \{A \in \sigma(\text{Cyl}) : P_1(A) = P_2(A)\}$. Il s'agit d'une classe monotone ($\mathbb{R}^T \in \mathcal{M}$; \mathcal{M} est stable par différence

ensembliste, \mathcal{M} est stable par réunion croissante) et \mathcal{M} contient Cyl (puisque $X^{(1)}$ et $X^{(2)}$ ont mêmes lois fini-dimensionnelles) : pour un cylindre C ,

$$P_1(C) = \mathbb{P}(X_{t_1}^{(1)} \in A_1, \dots, X_{t_p}^{(1)} \in A_p) = \mathbb{P}(X_{t_1}^{(2)} \in A_1, \dots, X_{t_p}^{(2)} \in A_p) = P_2(C).$$

Le théorème de classe monotone assure alors que $\sigma(\text{Cyl}) \subset \mathcal{M}$, ce qui prouve la Prop. 1.4. \square

Il y a plusieurs façons pour des processus stochastiques X et Y d'être égaux :

Définition 1.5 (Égalités de processus)

- Deux processus X et Y ont même lois s'ils ont même lois fini-dimensionnelles : pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ et $t_1, \dots, t_p \in T$,

$$(X_{t_1}, \dots, X_{t_p}) \stackrel{\mathcal{L}}{=} (Y_{t_1}, \dots, Y_{t_p}).$$

On écrira $X \stackrel{\mathcal{L}}{=} Y$.

- On dira que Y est une version (ou une modification) du processus X si pour tout $t \in T$, on a $\mathbb{P}(X_t = Y_t) = 1$.
- Deux processus X et Y sont dit indistinguables s'il existe $N \in \mathcal{F}$ négligeable tels que, pour tout $\omega \notin N$, on a $X_t(\omega) = Y_t(\omega)$ pour tout $t \in T$; de façon un peu abusive (parce que $\{X_t = Y_t : \forall t \in T\}$ n'est pas nécessairement un événement), on écrit : $\mathbb{P}(X_t = Y_t : \forall t \in T) = 1$.

Il est facile de voir que pour deux processus stochastiques X et Y , les notions d'égalité des lois de processus s'ordonnent logiquement de la façon suivante :

Proposition 1.6 *indistinguishable \Rightarrow modification \Rightarrow même lois fini-dimensionnelles.*

Les implications sont strictes, comme indiqué dans les exemples ci-dessous :

Exemple 1.7 1. Soit $N \sim \mathcal{N}(0, 1)$ et pour tout t : $X_t = N$, $Y_t = -N$. Alors $(X_t)_{t \geq 0}$ et $(Y_t)_{t \geq 0}$ ont même lois fini-dimensionnelles tandis que $\mathbb{P}(X_t = Y_t) = \mathbb{P}(2N = 0) = 0$, ie. X, Y ne sont pas version l'un de l'autre.

2. Soit l'espace de probabilité $([0, 1], \mathcal{B}([0, 1]), \lambda)$ et $T = [0, 1]$. Considérons D la diagonale de $[0, 1] \times [0, 1]$ et définissons

$$X(t, \omega) = 0 \quad \forall (t, \omega), \quad Y(t, \omega) = \mathbf{1}_D(t, \omega).$$

Pour t fixé, on a $X(t, \omega) = 0$ et $Y(t, \omega) = \mathbf{1}_{\{t\}}(\omega)$. On a donc $X(t, \omega) = Y(t, \omega)$ pour tout $\omega \neq t$, c'est à dire presque sûrement : les processus X, Y sont versions l'un de l'autre. Pourtant, $\mathbb{P}(\{\omega : X(t, \omega) = Y(t, \omega), \forall t \in [0, 1]\}) = 0$: les processus X et Y ne sont pas indistinguables.

Dans l'exemple 2) ci-dessus, on observe que les trajectoires de X sont continues tandis que celles de Y ne le sont pas. En fait, c'est ce qu'il manque pour avoir une réciproque :

Proposition 1.8 *Soit T séparable (ie. T contient une partie dense dénombrable) et X, Y modifications avec des trajectoires continues presque sûrement alors ils sont indistinguables.*

Remarque 1.9 Si $T \subset \mathbb{R}$ alors on peut supposer seulement la continuité à droite ou à gauche des trajectoires.

Démonstration : On choisit D une partie dénombrable dense dans T . Pour tout $t \in D$, on a $\mathbb{P}(X_t = Y_t) = 1$ et par dénombrabilité de D , l'ensemble $A = \{X_t = Y_t : t \in D\} \in \mathcal{F}$ est de probabilité 1. L'ensemble $B = \{X \text{ et } Y \text{ sont à trajectoires continues}\}$ est au de probabilité 1. Soit $\omega \in A \cap B$ tel que $t \mapsto X_t(\omega)$, $t \mapsto Y_t(\omega)$ sont continues. On a $\mathbb{P}(A \cap B) = 1$ et pour $\omega \in A \cap B$:

- si $t \in D$, on a $X_t = Y_t$;
- si $t \notin D$, il existe $t_n \in D$ avec $t_n \rightarrow t$, $n \rightarrow +\infty$. On a $X_{t_n} = Y_{t_n}$ ($t_n \in D, \omega \in A$) et $X_{t_n} \rightarrow X_t$, $Y_{t_n} \rightarrow Y_t$ (continuité des deux trajectoires pour $\omega \in B$). On a donc $X_t = Y_t$ sur $A \cap B$.

Finalement pour $\omega \in A \cap B$: $X_t = Y_t$ pour tout $t \in T$; ce qui signifie que X, Y sont des processus indistinguables. \square

Exemples de propriétés en loi des processus

Il existe de nombreuses classes de processus particuliers : les processus de Markov (en particulier les chaînes de Markov quand $T = \mathbb{N}$), les martingales, les processus gaussiens, les processus de Poisson, les processus stables ou encore les processus de Lévy (qui contiennent les trois exemples précédents). Ces types de processus sont caractérisés par des propriétés remarquables de leurs lois fini-dimensionnelles. Nous donnons ici quelques exemples de telles propriétés en loi des processus. Ces propriétés sont souvent fort utiles pour modéliser des phénomènes réels.

Définition 1.10 *Un processus est dit (strict) stationnaire si pour tout $h \geq 0$, $(X_{t+h})_{t \geq 0} \stackrel{\mathcal{L}}{=} (X_t)_{t \geq 0}$ ne dépend pas de $h > 0$, c'est à dire pour tout $h > 0$ et tout $t_1, \dots, t_p \geq 0$, on a $(X_{t_1+h}, \dots, X_{t_p+h}) \stackrel{\mathcal{L}}{=} (X_{t_1}, \dots, X_{t_p})$.*

Un processus est dit à accroissements stationnaires si la loi des accroissements $X_{t+h} - X_t$ ne dépend pas de $t > 0$, ie. $X_{t+h} - X_t \stackrel{\mathcal{L}}{=} X_h$.

Un processus X est dit à accroissements indépendants si pour tout $p \geq 1$ et $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_p$, les variables aléatoires X_{t_1} , $X_{t_2} - X_{t_1}$, \dots , $X_{t_p} - X_{t_{p-1}}$ sont indépendantes.

Exemple 1.11 ($T = \mathbb{N}$) Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes. On considère $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ le processus discret des sommes partielles. On parle de marche aléatoire. Alors $(S_n)_{n \geq 1}$ est un processus à accroissements indépendants. Si en plus les variables aléatoires X_n , $n \geq 1$, sont de même loi (les variables aléatoires sont iid), le processus est à accroissements indépendants et stationnaires.

1.2 Régularité des trajectoires

D'après l'Exemple 1.7, les versions d'un processus stochastiques n'ont pas toujours la même régularité de leurs trajectoires. Aussi, il est intéressant de chercher si un processus X admet des versions \tilde{X} dont les trajectoires ont de bonnes propriétés de régularité et d'avoir des conditions le garantissant. Dans cette section, on s'attache à trouver des versions à trajectoires continues d'un processus.

Théorème 1.12 (Kolmogorov-Čentsov) *Soit $(X_t)_{t \in T}$ un processus indexé par un intervalle T de \mathbb{R} et à valeurs dans (E, d) espace métrique complet. On suppose qu'il existe $a, b, C > 0$ vérifiant pour tout $s, t \in T$:*

$$\mathbb{E}[d(X_t, X_s)^a] \leq C|t - s|^{1+b}. \quad (1.3)$$

Alors il existe une version \tilde{X} de X dont les trajectoires sont localement höldériennes d'exposant γ pour tout $\gamma \in]0, b/a[,$ ie. pour tout $s, t \in T$: $d(\tilde{X}_s(\omega), \tilde{X}_t(\omega)) \leq C_\gamma(\omega)|t - s|^\gamma$. En particulier, \tilde{X} est une version continue de X .

Remarque 1.13 — La condition du théorème porte sur les lois de dimension 2 :

$$\mathbb{E}[d(X_t, X_s)^a] = \int_{\mathbb{R}^2} |x - y|^a \mathbb{P}_{(X_t, X_s)}(dx, dy),$$

ce qui est une condition légère sur la loi, caractérisée par toutes les loi fini-dimensionnelles. En pratique, pour vérifier (1.3), il faut donc calculer des moments pour des vecteurs de dimension 2.

- Quand $(E, d) = (\mathbb{R}, |\cdot|)$, a priori, dans le théorème, a et b sont non liés. En réalité, on peut toujours prendre $a \geq 1 + b$. En effet, si $a < 1 + b$, alors (1.3) se réécrit

$$\mathbb{E} \left[\left| \frac{d(X_t, X_s)}{t - s} \right|^a \right] \leq c|t - s|^{1+b-a}$$

avec $1 + b - a > 0$. En faisant $s \rightarrow t$, la dérivée dans le sens L^a de $(X_t)_{t \in T}$ est nulle et $(X_t)_{t \in T}$ est donc constant. Ce n'est donc pas très intéressant d'utiliser le Théorème 1.12 dans un tel cas : puisque le processus initial est en fait constant, il est évident qu'il est aussi continu.

- La condition $b > 0$ est essentielle : le processus de Poisson compensé $(\Pi_t - t)_{t \geq 0}$ fournit un contre-exemple quand $b = 0$. Soit $X_t = \Pi_t - t$ où $(\Pi_t)_{t \geq 0}$ est un processus de Poisson (processus à accroissements indépendants, stationnaires avec des marginales de loi de Poisson, cf. Section 4.8). On a

$$\Pi_t \sim \mathcal{P}(t), \quad \mathbb{E}[\Pi_t] = t, \quad \text{Var}(\Pi_t) = t,$$

soit pour X :

$$\mathbb{E}[|X_t - X_s|^2] = \text{Var}(\Pi_t - \Pi_s) = \text{Var}(\Pi_{t-s}) = t - s.$$

On a donc (1.3) avec $a = 2$, $b = 0$ et $C = 1$. Or les trajectoires du processus de Poisson sont *càdlàg* (et même constantes par morceaux avec des sauts $+1$) or d'après la Prop. 1.8 et la Rem. 1.9, il devrait coïncider avec sa version continue !

Démonstration : (Th. 1.12, Kolmogorov-Čenstov) Nous supposons que T est l'intervalle borné $[0, 1]$. Si l'intervalle T est non borné (par exemple si $T = \mathbb{R}_+$), on peut appliquer le cas borné à $T = [0, 1]$, $[1, 2]$, $[2, 3]$ etc et on trouve encore que X a une modification continue définie sur T , qui est localement höldérienne d'exposant γ pour tout $\gamma \in]0, b/a[$.

Pour simplifier la présentation, on prend dans la suite $T = [0, 1]$.

Il suffit de montrer que pour $\gamma \in]0, b/a[$ fixé, X a une modification dont les trajectoires sont höldériennes d'exposant γ . En effet, on appliquera alors ce résultat à une suite $\gamma_n \nearrow b/a$ en observant que les processus obtenus sont des versions continues du même processus X donc indistinguables par la Prop. 1.8.

On note D l'ensemble (dénombrable) des nombres dyadiques $t \in [0, 1[$ qui s'écrivent sous la forme

$$t = \sum_{k=1}^p \epsilon_k 2^{-k} \quad \text{avec } \epsilon_k \in \{0, 1\}, \quad 1 \leq k \leq p.$$

Le point clef est le résultat suivant dû au lemme de Borel-Cantelli :

Lemme 1.14 *Pour tout $\gamma \in]0, b/a[$, ps il existe une constante $C_\gamma(\omega) < +\infty$ telle que pour tout $s, t \in D$:*

$$d(X_s, X_t) \leq C_\gamma(\omega) |t - s|^\gamma.$$

Preuve du lemme. Avec l'inégalité de Markov, l'hypothèse (1.3) du Théorème 1.12 entraîne que, pour $a > 0$ et $s, t \in T$, $u > 0$

$$\mathbb{P}(d(X_s, X_t) \geq u) \leq u^{-a} \mathbb{E}[d(X_s, X_t)^a] \leq C u^{-a} |t - s|^{1+b}.$$

En appliquant cette inégalité avec $s = (i-1)2^{-n}$, $t = i2^{-n}$ (pour $i = 1, \dots, 2^n$) et $u = 2^{-n\gamma}$, on a :

$$\mathbb{P}(d(X_{(i-1)2^{-n}}, X_{i2^{-n}}) \geq 2^{-n\gamma}) \leq C 2^{na\gamma} 2^{-(1+b)n}.$$

En sommant sur $i \in [1, 2^n]$, on trouve

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{2^n} \{d(X_{(i-1)2^{-n}}, X_{i2^{-n}}) \geq 2^{-n\gamma}\}\right) \leq 2^n C 2^{na\gamma - (1+b)n} = C 2^{-n(b-a\gamma)}.$$

Comme $b - a\gamma > 0$, on a

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{2^n} \{d(X_{(i-1)2^{-n}}, X_{i2^{-n}}) \geq 2^{-n\gamma}\}\right) < +\infty$$

et le lemme de Borel-Cantelli assure que presque sûrement il existe $n_0(\omega) \in \mathbb{N}$ tel que dès que $n \geq n_0(\omega)$ pour tout $i \in \{1, \dots, 2^n\}$, on a

$$d(X_{(i-1)2^{-n}}, X_{i2^{-n}}) \leq 2^{-n\gamma}. \quad (1.4)$$

A fortiori, ps

$$K_\gamma(\omega) := \sup_{n \geq 1} \left(\sup_{1 \leq i \leq 2^n} \frac{d(X_{(i-1)2^{-n}}, X_{i2^{-n}})}{2^{-n\gamma}} \right) < +\infty$$

(pour $n \geq n_0(\omega)$, le terme entre parenthèses est majoré par 1 par (1.4), et il y a un nombre fini de terme $n \leq n_0(\omega)$: le $\sup_{n \geq 1}$ ci-dessus est donc bien fini !).

On obtient alors le résultat du Lemme 1.14 avec

$$C_\gamma(\omega) = 2^{\gamma+1} \frac{1 - 2^{-\gamma} + 2^{1-\gamma}}{1 - 2^{-\gamma}} K_\gamma(\omega).$$

En effet, considérons $s, t \in D$ avec $s < t$. Soit $p \geq 1$ tel que $2^{-p-1} < t - s \leq 2^{-p}$. Il existe $m \geq 1$ tel qu'on puisse écrire $s, t \in D$ sous la forme :

$$\begin{aligned} s &= k2^{-p} + \epsilon_0 2^{-p} + \epsilon_1 2^{-p-1} + \dots + \epsilon_m 2^{-p-m} \\ t &= k2^{-p} + \epsilon'_0 2^{-p} + \epsilon'_1 2^{-p-1} + \dots + \epsilon'_m 2^{-p-m} \end{aligned}$$

où $\epsilon_j, \epsilon'_j \in \{0, 1\}$. On note pour $j = 0, \dots, m$

$$\begin{aligned} s_j &= k2^{-p} + \epsilon_0 2^{-p} + \epsilon_1 2^{-p-1} + \dots + \epsilon_j 2^{-p-j} \\ t_j &= k2^{-p} + \epsilon'_0 2^{-p} + \epsilon'_1 2^{-p-1} + \dots + \epsilon'_j 2^{-p-j} \end{aligned}$$

de sorte que $s = s_m$ et $t = t_m$. Par l'inégalité triangulaire, on a

$$\begin{aligned} d(X_s, X_t) &= d(X_{s_m}, X_{t_m}) \\ &\leq d(X_{s_0}, X_{t_0}) + \sum_{j=1}^m d(X_{s_{j-1}}, X_{s_j}) + \sum_{j=1}^m d(X_{t_{j-1}}, X_{t_j}) \\ &\leq K_\gamma(\omega) 2^{-p\gamma} + \sum_{j=1}^m K_\gamma(\omega) 2^{-(p+j)\gamma} + \sum_{j=1}^m K_\gamma(\omega) 2^{-(p+j)\gamma} \\ &\leq K_\gamma(\omega) 2^{-p\gamma} + K_\gamma(\omega) 2^{-p\gamma} \frac{2^{-\gamma}}{1 - 2^{-\gamma}} + K_\gamma(\omega) 2^{-p\gamma} \frac{2^{-\gamma}}{1 - 2^{-\gamma}} \\ &\quad \left(\text{car } \sum_{j=1}^m 2^{-(p+j)\gamma} \leq 2^{-p\gamma} 2^{-\gamma} / (1 - 2^{-\gamma}) \right) \\ &\leq K_\gamma(\omega) \frac{2^{1-\gamma} + 1 - 2^{-\gamma}}{1 - 2^{-\gamma}} 2^{-p\gamma} \\ &\leq C_\gamma(\omega) (t - s)^\gamma \end{aligned}$$

où la dernière ligne vient de $2^{-p} \leq 2(t-s)$ et prouve le Lemme 1.14. \square

On termine la preuve du Théorème 1.12 de la façon suivante : d'après le Lemme 1.14, la fonction $t \mapsto X_t(\omega)$ est ps γ -höldérienne sur D , donc uniformément continue sur D . Comme (E, d) est complet, il existe ps un unique prolongement continu de cette fonction à $T = [0, 1]$. Le prolongement reste γ -höldérien. Plus précisément, on pose pour tout $t \in [0, 1]$:

$$\tilde{X}_t(\omega) = \lim_{\substack{s \rightarrow t \\ s \in D}} X_s(\omega)$$

sur l'ensemble presque sûr $\{\omega \in \Omega : K_\gamma(\omega) < +\infty\}$ où $s \mapsto X_s(\omega)$ est γ -höldérienne sur D et on pose $\tilde{X}_t(\omega) = x_0$ sur l'ensemble $\{\omega \in \Omega : K(\omega) = +\infty\}$ négligeable où x_0 est un point fixé quelconque de E . Par construction, le processus \tilde{X} a alors des trajectoires höldériennes d'exposant γ sur $[0, 1]$.

Il reste à voir que \tilde{X} est bien une version de X . Or l'hypothèse (1.3) assure avec l'inégalité de Markov :

$$\mathbb{P}(d(X_s, X_t) \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{E}[d(X_s, X_t)^a]}{\varepsilon^a} \leq \frac{|t-s|^{1+b}}{\varepsilon^a}. \quad (1.5)$$

Ainsi, pour tout $t \in T$ fixé,

$$X_s \xrightarrow{\mathbb{P}} X_t, \quad s \rightarrow t.$$

Comme par construction $X_s \rightarrow \tilde{X}_t$ ps quand $s \rightarrow t$, $s \in D$, on conclut que $X_t = \tilde{X}_t$ ps par unicité ps de la limite en probabilité. \square

1.3 Convergence faible des lois de processus

On a vu qu'un processus $X = (X_t)_{t \in T}$ définit en (1.2) une variable aléatoire sur $(\mathbb{R}^T, \sigma(\text{Cyl}))$. Cependant avec de bonnes propriétés trajectorielles, on peut améliorer l'espace d'arrivée $(\mathbb{R}^T, \sigma(\text{Cyl}))$, typiquement si X est à trajectoires continues alors X est à valeurs dans $C(T, \mathbb{R})$ (ou si ce n'est X , une de ses versions en utilisant le Théorème 1.12). Quand $T = [0, 1]$ (ou T borné), $C(T, \mathbb{R})$ est normé par

$$\|x - y\|_\infty = \sup_{t \in T} |x(t) - y(t)|, \quad x, y \in C(T, \mathbb{R}), \quad (1.6)$$

qui définit la topologie de la convergence uniforme. Il s'agit alors d'un espace de Banach.

Quand $T = \mathbb{R}_+$ (ou T borné), $C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ admet pour distance

$$d(x, y) = \sum_{n=1}^{+\infty} 2^{-n} \min(\|x - y\|_{\infty, n}, 1), \quad (1.7)$$

où on note $\|x - y\|_{\infty, n} = \sup_{t \in [0, n]} |x(t) - y(t)|$, $x, y \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$,

qui métrise la convergence uniforme sur tous les compacts.

L'intérêt de considérer X à valeurs dans $C(T, \mathbb{R})$ (ou un autre espace fonctionnel, souvent $\mathbb{D}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, l'espace des fonctions *càdlàg* –continue à droite avec des limites à gauche– dit espace de Skorohod, cf. [Bil2]) est alors que X est à valeurs dans un espace métrique (et même souvent un espace métrique complet, séparable, dit espace polonais) et que dans ce cadre la notion de convergence faible est bien développée, cf. Section 1.3.1.

On commence par s'assurer que le processus $X = (X_t)_{t \in T}$ reste bien une variable aléatoire sur $C(T, \mathbb{R})$:

$$X : \begin{cases} (\Omega, \mathcal{F}) & \rightarrow (C(T, \mathbb{R}), \mathcal{B}(C(T, \mathbb{R}))) \\ \omega & \mapsto X(\omega) = (X_t(\omega))_{t \in T}. \end{cases} \quad (1.8)$$

L'espace $C(T, \mathbb{R})$ est muni de deux tribus naturelles : la trace de la tribu cylindrique $\sigma(\text{Cyl}) \cap C(T, \mathbb{R})$ et sa propre tribu borélienne $\mathcal{B}(C(T, \mathbb{R}))$. En fait ces deux tribus coïncident :

Proposition 1.15 *Sur $C(T, \mathbb{R})$, la tribu cylindrique trace coïncide avec la tribu borélienne :*

$$\sigma(\text{Cyl}) \cap C(T, \mathbb{R}) = \mathcal{B}(C(T, \mathbb{R})).$$

Démonstration : D'abord, Π_{t_0} est continue sur $(C(T, \mathbb{R}), d)$ pour d en (1.7) puisque

$$|\Pi_{t_0}(x) - \Pi_{t_0}(y)| = |x(t_0) - y(t_0)| \leq \|x - y\|_{\infty, n}$$

pour tout $n \geq t_0$ dont on déduit aisément la continuité pour d . Dès lors Π_{t_0} est mesurable sur $(C(T, \mathbb{R}), \mathcal{B}(C(T, \mathbb{R})))$. Comme tout cylindre s'écrit $C = \bigcap_{i=1}^p \Pi_{t_i}^{-1}(A_i)$, $A_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, on a bien $C \in \mathcal{B}(C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}))$ et donc $\text{Cyl} \subset \mathcal{B}(C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}))$ puis $\sigma(\text{Cyl}) \subset \mathcal{B}(C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}))$.

Réciproquement, si $A = \{y \in C(T, \mathbb{R}) : \|x - y\|_{[0, n]} < \eta\}$ est ouvert pour la convergence uniforme sur les compacts, on a $A = \bigcap_{t \in [0, n] \cap \mathbb{Q}} \Pi_t^{-1}(|x(t) - \eta, x(t) + \eta|)$ car la condition $|y(t) - x(t)| < \eta$ pour tout $t \in [0, n] \cap \mathbb{Q}$ est complétée pour tout $t \in [0, n]$ par continuité. L'ouvert A s'écrit alors comme une intersection (dénombrable) de cylindres, ie. $A \in \sigma(\text{Cyl})$. Puisque de tels A engendrent $\mathcal{B}(C(T, \mathbb{R}))$, on a $\mathcal{B}(C(T, \mathbb{R})) \subset \sigma(\text{Cyl})$. \square

Finalement d'après la Prop. 1.15, le processus X vu comme en (1.8) définit bien une variable aléatoire sur $C(T, \mathbb{R})$ et \mathbb{P}_X est alors une loi sur $C(T, \mathbb{R})$.

1.3.1 Rappels sur la convergence faible

On rappelle la notion de convergence faible de variables aléatoires à valeurs dans un espace métrique S . Quand S est un espace fonctionnel, typiquement $C(T, \mathbb{R})$, la variable aléatoire est en fait un processus stochastique à trajectoires continues.

Définition 1.16 (Convergence faible) Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ et X à valeurs dans S espace métrique de lois P_n et P , on a $X_n \Rightarrow X$ (ou $P_n \Rightarrow P$) si et seulement si pour toute fonction $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ continue et bornée

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}[f(X_n)] = \mathbb{E}[f(X)].$$

Nous utiliserons les formulations équivalentes suivantes de la convergence faible. Pour plus de détails on renvoie à [Bil2].

Théorème 1.17 (Porte-manteau) Les assertions suivantes sont équivalentes quand $n \rightarrow +\infty$ pour des variables aléatoires X_n à valeurs dans un espace métrique S .

1. $X_n \Rightarrow X$, ie. pour toute fonction $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ continue et bornée

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}[f(X_n)] = \mathbb{E}[f(X)].$$

2. Pour toute fonction $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ uniformément continue et bornée

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}[f(X_n)] = \mathbb{E}[f(X)];$$

3. Pour tout fermé F , $\limsup_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(X_n \in F) \leq \mathbb{P}(X \in F)$;

4. Pour tout ouvert G , $\liminf_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(X_n \in G) \geq \mathbb{P}(X \in G)$;

5. Pour tout $A \in \mathcal{B}(S)$ tel que $\mathbb{P}(X \in \bar{A} \setminus A^\circ) = 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(X_n \in A) = \mathbb{P}(X \in A)$.

Démonstration : 1) \Rightarrow 2) est évident.

2) \Rightarrow 3). On considère F fermé et $\delta > 0$. Pour $\varepsilon > 0$ assez petit, $G_\varepsilon = \{x : d(x, F) < \varepsilon\}$ vérifie $\mathbb{P}(X \in G_\varepsilon) \leq \mathbb{P}(X \in F) + \delta$ puisque (comme F est fermé) $\bigcap_{\varepsilon > 0} G_\varepsilon = F$. On considère $f(x) = \varphi(d(x, F)/\varepsilon)$ avec

$$\varphi(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \leq 0 \\ 1 - t & \text{si } 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{si } t \geq 1 \end{cases}$$

Alors, on montre que f est uniformément continue sur S , $f(x) = 1$ si $x \in F$ et $f(x) = 0$ si $x \in G_\varepsilon^c$. De plus, $0 \leq f(x) \leq 1$ pour tout $x \in S$. D'après 2), on a $\mathbb{E}[f(X_n)] \rightarrow \mathbb{E}[f(X)]$, $n \rightarrow +\infty$. Puis comme $\mathbf{1}_F(x) = f(x)\mathbf{1}_F(x)$ et $f(x) = f(x)\mathbf{1}_{G_\varepsilon}(x)$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_n \in F) &= \mathbb{E}[f(X_n)\mathbf{1}_F(X_n)] \leq \mathbb{E}[f(X_n)] \\ \mathbb{E}[f(X)] &= \mathbb{E}[f(X)\mathbf{1}_{G_\varepsilon}(X)] \leq \mathbb{P}(X \in G_\varepsilon) \leq \mathbb{P}(X \in F) + \delta. \end{aligned}$$

Finalement,

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(X_n \in F) \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}[f(X_n)] = \mathbb{E}[f(X)] \leq \mathbb{P}(X \in F) + \delta.$$

Comme $\delta > 0$ est arbitraire, cela établit 3).

3) \Leftrightarrow 4) s'obtient facilement par passage au complémentaire.

3), 4) \Rightarrow 5). Soit A tel que $X \notin \overline{A} \setminus A^\circ$ ps. On a $\mathbb{P}(X \in \overline{A}) = \mathbb{P}(X \in A^\circ)$. Avec 3) et 4) on déduit

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(X_n \in A) \leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(X_n \in \overline{A}) \leq \mathbb{P}(X \in \overline{A}) = \mathbb{P}(X \in A^\circ) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(X_n \in A^\circ).$$

Finalement $\limsup_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(X_n \in A) = \mathbb{P}(X \in A) = \liminf_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(X_n \in A)$ ce qui montre $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(X_n \in A) = \mathbb{P}(X \in A)$.

5) \Rightarrow 3). Soit F fermé et $F_\varepsilon = \{x \in S : d(x, F) \leq \varepsilon\}$. Comme les ensembles $\partial F_\varepsilon = \{x \in S : d(X, F) = \varepsilon\}$ sont disjoints, on a $X \notin \partial F_\varepsilon$ pour presque tout $\varepsilon > 0$. Pour un tel $\varepsilon > 0$, d'après 5) on a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_n \in F) &\leq \mathbb{P}(X_n \in F_\varepsilon) \\ \limsup_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(X_n \in F) &\leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(X_n \in F_\varepsilon) = \mathbb{P}(X \in F_\varepsilon) \end{aligned}$$

ce qui prouve 3) car $F = \bigcap_{\varepsilon > 0} F_\varepsilon$ et $\mathbb{P}(X \in F_\varepsilon) \rightarrow \mathbb{P}(X \in F)$, $\varepsilon \rightarrow 0$ (convergence monotone).

4) \Rightarrow 1). Soit $f \geq 0$ une fonction continue. Avec le lemme de Fatou, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[f(X)] &= \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(f(X) > t) dt \leq \int_0^{+\infty} \liminf_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(f(X_n) > t) dt \\ &\leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(f(X_n) > t) dt = \liminf_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}[f(X_n)]. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Pour f continue et bornée par M , on applique (1.9) à $M + f$ et $M - f$ pour obtenir $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}[f(X_n)] = \mathbb{E}[f(X)]$, ce qui prouve 1). \square

Proposition 1.18 Soit X et X_n , $n \geq 1$ des variables aléatoires à valeurs dans un espace métrique S . Les propriétés suivantes sont faciles à vérifier :

1. La convergence en proba $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ implique la convergence faible $X_n \Rightarrow X$.
2. **(Continuous mapping theorem)** Soit $f : S \rightarrow S'$ une application entre espaces métriques. Alors si $X_n \Rightarrow X$ et f est continue \mathbb{P}_X -ps, on a aussi $f(X_n) \Rightarrow f(X)$.
3. Si X_n, X sont des processus à trajectoires continues (ie. $S = C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ avec $X_n \Rightarrow X$, on a la convergence faible des lois fini-dimensionnelles : pour tout $p \geq 1$ et t_1, \dots, t_p

$$(X_n(t_1), \dots, X_n(t_p)) \Rightarrow (X(t_1), \dots, X(t_p)), \quad n \rightarrow +\infty.$$

Le continuous mapping theorem montre que la convergence en loi se conserve par les applications continues : de la même façon que si $x_n \rightarrow x$ alors $f(x_n) \rightarrow f(x)$ quand f est continue, le résultat reste vrai pour des variables (ou processus aléatoires) qui convergent faiblement.

Démonstration : 1) Le premier point se justifie comme pour les variables aléatoires.

2) Le deuxième point est une conséquence facile du théorème porte-manteau (Th. 1.17) : Soit F un ensemble fermé de S . Observons que $\overline{f^{-1}(F)} \subset f^{-1}(F) \cup D_f$ où D_f désigne l'ensemble des points de discontinuité de f . En effet, soit $x \in \overline{f^{-1}(F)}$ limite d'une suite $(x_n)_{n \geq 1}$ de $f^{-1}(F)$. Alors si f est continue en x , on a $f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) \in F$ car F est fermé et $f(x_n) \in F$, sinon c'est que $x \in D_f$. Par le théorème porte-manteau (Th. 1.17) pour $X_n \Rightarrow X$, on a :

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(f(X_n) \in F) &\leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(X_n \in f^{-1}(F)) \leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(X_n \in \overline{f^{-1}(F)}) \\ &\leq \mathbb{P}(X \in \overline{f^{-1}(F)}) \leq \mathbb{P}(X \in f^{-1}(F)) + \mathbb{P}(X \in D_f) \\ &= \mathbb{P}(X \in f^{-1}(F)) \end{aligned}$$

c'est à dire, encore par le théorème porte-manteau (Th. 1.17) : $f(X_n) \Rightarrow f(X)$.

3) Le troisième point est une conséquence du deuxième point avec l'application continue $\Pi_{t_1, \dots, t_p} : C(T, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^p$ définie par $\Pi_{t_1, \dots, t_p}(x) = (x(t_1), \dots, x(t_p))$. \square

La convergence faible de processus à trajectoires continues entraîne la convergence des lois fini-dimensionnelles. La réciproque est fausse : la convergence des lois fini-dimensionnelles n'entraîne pas la convergence faible des processus. Il peut y avoir un phénomène de perte de masse vers l'infini comme illustré dans l'exemple suivant pour des variables aléatoires réelles. De plus l'affirmation est fausse pour des processus qui ne sont pas à valeurs dans $C(T, \mathbb{R})$: par exemple pour des processus *càdlàg*, $X_n \Rightarrow X$ entraîne $X(t) \Rightarrow X(t)$ seulement si X est continu en t .

Exemple 1.19 Sur $C([0, 1], \mathbb{R})$, on considère les fonctions

$$x_n(t) = \begin{cases} 2nt & \text{si } t \in [0, 1/2n] \\ 2 - 2nt & \text{si } t \in [1/2n, 1/n] \\ 0 & \text{si } t \in [1/n, 1] \end{cases}$$

La suite de fonction x_n converge simplement vers $x = 0$. On considère alors la suite de loi $P_n = \delta_{x_n}$ et $P = \delta_x$ et on observe que

— On n'a pas $P_n \Rightarrow P$ car pour la fonction continue bornée $f(y) = \sup_{t \in [0, 1]} y(t)$, on a $f(x_n) = 1$, $f(x) = 0$, soit

$$\int f dP_n = f(x_n) = 1 \not\rightarrow 0 = f(x) = \int f dP, \quad n \rightarrow +\infty;$$

- Pour tout $0 < t_1 < \dots < t_p$, avec $\Pi_{t_1, \dots, t_p}(y) = (y(t_1), \dots, y(t_p))$ on a $\Pi_{t_1, \dots, t_p}(x) = (0, \dots, 0)$ et pour $n > 1/t_1$ aussi $\Pi_{t_1, \dots, t_p}(x_n) = (0, \dots, 0)$, c'est à dire la convergence des lois fini-dimensionnelles

$$P_n \Pi_{t_1, \dots, t_p}^{-1} \Rightarrow P \Pi_{t_1, \dots, t_p}^{-1}, \quad n \rightarrow +\infty.$$

La convergence des lois fini-dimensionnelles n'entraîne donc pas la convergence en loi de tout le processus.

Pour éviter une telle pathologie, il faut une condition supplémentaire, c'est l'objet de la section suivante.

1.3.2 Équitension

L'équitension est la condition qui empêche la perte de masse probabiliste. C'est la condition qui avec la convergence des lois fini-dimensionnelles donnera la convergence faible, cf. Théorème 1.24. On renvoie à [Bil2] pour plus de détails sur cette notion.

Définition 1.20 (Équitension) Soit $(P_n)_{n \geq 1}$ une suite de mesures de probabilité sur un espace métrique. La suite est dite équitendue si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un compact K_ε tel que pour tout $n \geq 1$ on a $P_n(K_\varepsilon) > 1 - \varepsilon$.

En fait, l'équitension s'exprime aussi par une propriété de relative compacité (dans les bons espaces métriques : ceux qui sont séparables et complets, ie. polonais).

Définition 1.21 (Relative compacité) Une suite de mesures $(P_n)_{n \geq 1}$ est dite relativement compacte si pour toute sous suite $(n') \subset \mathbb{N}$, il existe $(n'') \subset (n')$ telle que $P_{n''}$ converge faiblement vers une mesure de probabilité.

Théorème 1.22 (Prohorov) Soit $(P_n)_{n \geq 1}$ une suite de mesures dans un espace métrique séparable complet. Alors $(P_n)_{n \geq 1}$ est équitendue si et seulement si $(P_n)_{n \geq 1}$ est relativement compacte.

Démonstration : Admis, cf. [Bil2]. □

En général—dans ce cours—, les processus qu'on considère sont à trajectoires continues et leurs lois sont donc des mesures de probabilité sur l'espace des fonctions continues $C(T, \mathbb{R})$, complet et séparable pour la topologie uniforme associée à la norme uniforme $\|f\|_\infty = \sup_{x \in T} |f(x)|$, donc polonais. Dans ce cas, on a un critère d'équitension plus explicite :

Théorème 1.23 Soit $(P_n)_{n \geq 1}$ la suite des lois de processus X_n à trajectoires continues. On suppose qu'il existe $a, b, C > 0$ tels que pour tout $s, t \in [0, 1]$,

$$\sup_{n \geq 1} \mathbb{E}[|X_n(t) - X_n(s)|^a] \leq C|t - s|^{1+b}.$$

Alors la suite $(P_n)_{n \geq 1}$ est équitendue.

Noter la ressemblance avec le Th. 1.12 (Kolmogorov-Čentsov).

Démonstration : Admis, cf. [Bil2]. □

Théorème 1.24 *Soit $(P^{(n)})_{n \geq 1}$ une suite équitendue dans $\mathcal{C}(T, \mathbb{R})$ telle que les lois fini-dimensionnelles $P_{t_1, \dots, t_m}^{(n)}$ convergent faiblement pour tout $t_1, \dots, t_p \in T : P_{t_1, \dots, t_p}^{(n)} \Rightarrow P_{t_1, \dots, t_p}$. Alors il existe P de lois fini-dimensionnelles $\{P_{t_1, \dots, t_p} : t_1, \dots, t_p \in T, p \in \mathbb{N}^*\}$ telle que $P^{(n)} \Rightarrow P$.*

En fait, la vraie condition supplémentaire nécessaire dans le Th. 1.24 est la relative compacité de la suite $(P_n)_{n \geq 1}$ mais d'après le théorème de Prohorov (Th. 1.22), c'est équivalent à l'équitension de la suite pour laquelle on dispose de critères explicites.

Démonstration : Pour montrer que $P^{(n)} \Rightarrow P$, il suffit de voir que pour toute $(n') \subset \mathbb{N}$, il existe $(n'') \subset (n')$ tel que $P^{(n'')} \Rightarrow P$.

En effet, on montre qu'alors pour f continue bornée, on a $\int f dP^{(n)} \rightarrow \int f dP$. Si ce n'était pas le cas, il existerait f continue bornée telle que $\int f dP^{(n)} \not\rightarrow \int f dP$, ie. il existerait $\varepsilon > 0$ et $(n') \subset (n)$ tels que

$$\left| \int f dP^{(n')} - \int f dP \right| > \varepsilon. \quad (1.10)$$

Par la propriété supposée, il existe $(n'') \subset (n')$ tel que $P^{(n'')} \Rightarrow P$. En particulier, d'après le théorème porte-manteau (Th. 1.17) $\int f dP^{(n'')} \rightarrow \int f dP$. Comme $(\int f dP^{(n'')})_{n''}$ est une suite extraite de $(\int f dP^{(n')})_{n'}$, il y a une contradiction avec (1.10). La contradiction justifie finalement la convergence cherchée : $\int f dP^{(n)} \rightarrow \int f dP$.

Soit donc $(n') \subset (n)$ une sous-suite. Par équitension (relative compacité), il existe $(n'') \subset (n')$ et Q tels que $P^{(n'')} \Rightarrow Q$. En particulier, la convergence des lois fini-dimensionnelles exige que $P_{t_1, \dots, t_p}^{(n'')} \Rightarrow Q_{t_1, \dots, t_p}$. Mais par hypothèse $P_{t_1, \dots, t_p}^{(n)} \Rightarrow P_{t_1, \dots, t_p}$ et donc en particulier $P_{t_1, \dots, t_p}^{(n'')} \Rightarrow P_{t_1, \dots, t_p}$. On doit donc avoir $Q_{t_1, \dots, t_p} = P_{t_1, \dots, t_p}$, pour tout $t_1, \dots, t_p \in T$. La Prop. 1.4 assure alors $P = Q$. Finalement, $P^{(n'')} \Rightarrow P = Q$ ce qui conclut car la première partie de la preuve. □

Chapitre 2

Processus gaussiens

Dans ce chapitre, on commence par présenter la classe des processus gaussiens dont on introduit d'abord la loi en Section 2.1. La régularité des trajectoires est considérée en Section 2.2. La notion d'espace gaussien est décrite en Section 2.3. Enfin, on donne plusieurs exemples de processus gaussiens en Section 2.4.

2.1 Lois des processus gaussiens

Définition 2.1 (Processus gaussien) *Un processus stochastique $(X_t)_{t \in T}$ est gaussien si toutes ses lois fini-dimensionnelles $\mathcal{L}(X_{t_1}, \dots, X_{t_p})$ sont gaussiennes (pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ et $t_1, \dots, t_p \in T$).*

Autrement dit $X = (X_t)_{t \in T}$ est gaussien si et seulement si toute combinaison linéaire de ses marginales $a_1 X_{t_1} + \dots + a_p X_{t_p}$ suit une loi gaussienne (pour tout $p \in \mathbb{N}^$, $t_1, \dots, t_p \in T$ et $a_1, \dots, a_p \in \mathbb{R}$).*

Remarque 2.2 Les conséquences suivantes sont immédiates :

- Toutes les marginales d'un processus gaussien sont gaussiennes.
- Toute combinaison linéaire de marginales d'un processus gaussien est encore gaussienne.

Il est connu que la loi d'un vecteur gaussien $(X_{t_1}, \dots, X_{t_p})$ est déterminée (par exemple via sa fonction caractéristique) par le vecteur moyenne $m_X = (\mathbb{E}[X_{t_1}], \dots, \mathbb{E}[X_{t_p}])$ et la matrice de covariance $\Sigma_X = (\text{Cov}(X_{t_i}, X_{t_j}))_{1 \leq i, j \leq p}$. On comprend dès lors que toutes les lois fini-dimensionnelles d'un processus gaussien (donc la loi du processus, cf. Prop. 1.4) est connue dès qu'on se donne la fonction moyenne $m(t) = \mathbb{E}[X_t]$ et l'opérateur de covariance $K(s, t) = \text{Cov}(X_s, X_t)$. En effet, la loi fini-dimensionnelle de $(X_{t_1}, \dots, X_{t_p})$ est alors la loi gaussienne $\mathcal{N}(m_p, K_p)$ de dimension p avec $m_p = (m(t_1), \dots, m(t_p))$ et $K_p = (K(t_i, t_j))_{1 \leq i, j \leq p}$. Les fonctions m et K définissent donc toutes les lois fini-dimensionnelles de X et donc aussi sa loi en tant que processus, cf. Prop. 1.4. Observons en plus que

- K est symétrique : $K(s, t) = K(t, s)$;

— K est de type positif, ie. si $c : T \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction à support fini alors :

$$\sum_{s,t \in T} c(s)c(t)K(s,t) = \text{Var} \left(\left(\sum_{s \in T} c(s)X_s \right)^2 \right) \geq 0. \quad (2.1)$$

Réciproquement, étant donné une fonction m sur T et un opérateur K sur $T \times T$, existe-t-il un processus gaussien X admettant m pour fonction moyenne et K pour opérateur de covariance ? La réponse est donnée par le résultat suivant :

Théorème 2.3 *Soit K une fonction symétrique de type positif sur $T \times T$. Il existe alors un processus gaussien (centré) dont la fonction de covariance est K .*

Démonstration : Quitte à considérer ensuite le processus $X(t) + m(t)$, on considère pour simplifier le cas d'un processus centré ($m = 0$). Il s'agit alors d'une application simple du théorème d'extension de Kolmogorov (Th. 1.3). On construit une probabilité $P^{(K)}$ sur l'espace mesurable $(\mathbb{R}^T, \sigma(\text{Cyl}))$ de telle sorte que sous $P^{(K)}$ le processus des coordonnées $X_t(\omega) = \omega(t)$ (dit processus canonique) est un processus gaussien de fonction de covariance K .

Pour cela, si $\{t_1, \dots, t_p\}$ est une partie finie de T , on construit d'abord une probabilité $P_{\{t_1, \dots, t_p\}}^{(K)}$ sur $\mathbb{R}^{\{t_1, \dots, t_p\}} \sim \mathbb{R}^p$ comme la loi du vecteur gaussien de matrice de covariance $(K(t_i, t_j))_{1 \leq i, j \leq p}$ (qui existe d'après les rappels gaussiens puisque la matrice est symétrique positive).

On vérifie aisément que les lois $P_{\{t_1, \dots, t_p\}}^{(K)}$ satisfont les propriétés de compatibilité du théorème d'extension de Kolmogorov (Th. 1.3) qui s'applique donc.

La loi $P^{(K)}$ ainsi construite sur $(\mathbb{R}^T, \sigma(\text{Cyl}))$ est bien celle d'un processus gaussien puisque par construction toutes ses lois fini-dimensionnelles sont gaussiennes avec pour fonction de covariance K . \square

Exemple 2.4 (Processus stationnaire) On considère le cas $T = \mathbb{R}$ et on se donne une mesure finie symétrique (ie. $\nu(-A) = \nu(A)$) sur \mathbb{R} . On pose alors

$$K(s, t) = \int_{\mathbb{R}} e^{iu(t-s)} \nu(du). \quad (2.2)$$

On vérifie aisément que K est un opérateur réel symétrique $K(t, s) = K(s, t)$ (car ν est symétrique) et de type positif :

$$\sum_{s,t \in T} c(s)c(t)K(s,t) = \int \left| \sum_{s \in T} c(s)e^{ius} \right|^2 \nu(du) \geq 0.$$

La fonction K possède la propriété supplémentaire de dépendre seulement de la différence $t - s$. On parle de **stationnarité faible** (ou de deuxième ordre) et on écrit alors $K(t, s) =$

$K(|t - s|)$. On en déduit aussitôt que le processus (centré) X associé à K par le théorème précédent est stationnaire (au sens strict), c'est à dire pour tout choix de $p \in \mathbb{N}^*$ et $t_1, \dots, t_p \geq 0$, $h \in \mathbb{R}$, on a

$$(X_{t_1+h}, \dots, X_{t_p+h}) \stackrel{\mathcal{L}}{=} (X_{t_1}, \dots, X_{t_p}).$$

Réciproquement, il est vrai aussi que si $(X_t)_{t \geq 0}$ est un processus gaussien stationnaire, continu dans L^2 (ie. $\lim_{s \rightarrow t} \mathbb{E}[(X_t - X_s)^2] = 0$) la fonction de covariance de X est de la forme (2.2) (théorème de Bochner). La mesure ν s'appelle la **mesure spectrale** du processus. Elle véhicule beaucoup d'informations décrivant le processus. Par exemple, on a $K(0) = \text{Var}(X_t) = \nu(\mathbb{R})$.

De façon générale pour un processus stationnaire, on a

Proposition 2.5 (Processus stationnaire) *Soit X processus stationnaire L^2 centré et de fonction de covariance K . On a équivalence entre :*

1. la fonction K continue en 0 ;
2. le processus X est L^2 -continu : $\lim_{s \rightarrow t} \mathbb{E}[(X_t - X_s)^2] = 0$;
3. la fonction K est continue partout.

Démonstration : 1) \Leftrightarrow 2) Comme X est centré, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[|X_t - X_s|^2] &= \mathbb{E}[X_t^2] + \mathbb{E}[X_s^2] - 2\mathbb{E}[X_t X_s] \\ &= K(t, t) + K(s, s) - 2K(t, s) \\ &= 2K(0) - 2K(|t - s|), \end{aligned}$$

ce qui justifie l'équivalence 1) \Leftrightarrow 2). Comme **3) \Rightarrow 1)** est clair, on conclut avec **2) \Rightarrow 3)** qui vient de

$$K(t + h) = \mathbb{E}[X_{t+h} X_0] = \mathbb{E}[(X_{t+h} - X_t) X_0] + K(t)$$

avec par l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\left| \mathbb{E}[(X_{t+h} - X_t) X_0] \right| \leq \sqrt{\mathbb{E}[(X_{t+h} - X_t)^2] \mathbb{E}[X_0^2]} = K(0)^{1/2} \|X_{t+h} - X_t\|_2.$$

□

Au passage, on a utilisé que la stricte stationnarité d'un processus gaussien est équivalente à la stationnarité faible :

Proposition 2.6 *Un processus gaussien X est stationnaire si et seulement si $t \mapsto \mathbb{E}[X_t]$ est constante et $K(s, t) = K(s - t)$ (on parle de stationnarité faible).*

Démonstration : Il est clair que ces conditions sont nécessaires, que le processus soit gaussien ou pas : comme par stationnarité, on a $\mathcal{L}(X_t) = \mathcal{L}(X_s)$ pour tout t, s , on a $\mathbb{E}[X_t] = \mathbb{E}[X_s]$ et donc la fonction moyenne est constante ; de même $\mathcal{L}(X_t, X_s) = \mathcal{L}(X_{t+h}, X_{s+h})$ pour tout t, s, h , alors on a $\text{Cov}(X_t, X_s) = \text{Cov}(X_{t+h}, X_{s+h})$ et donc la covariance ne dépend que de la différence $t - s$.

Elles sont suffisantes seulement dans le cas gaussien puisque dans ce cas, la loi est caractérisée par $t \mapsto \mathbb{E}[X_t]$ et par $K(s, t)$. Il est facile alors de voir dans ce cas qu'une translation dans les paramètres de temps ne modifie pas ces fonctions sous les hypothèses de la proposition donc pas non plus la loi. \square

2.2 Régularité gaussienne

Des bonnes conditions pour avoir une version assez régulière d'un processus gaussien sont données dans le résultat suivant, conséquence facile du Théorème 1.12 (Kolmogorov-Čentsov) dans le cadre gaussien.

Théorème 2.7 (Kolmogorov-Čentsov gaussien) *Soit X un processus gaussien centré ($\mathbb{E}[X_t] = 0$), de fonction de covariance $K(s, t)$. On suppose qu'il existe $\alpha > 0$ et $0 < C < +\infty$ tels que pour tout $s, t \geq 0$:*

$$K(t, t) + K(s, s) - 2K(s, t) \leq C|t - s|^\alpha.$$

Alors il existe une version continue \tilde{X} de X . De plus, pour tout $0 < \gamma < \alpha/2$, les trajectoires de \tilde{X} sont ps höldériennes de coefficient γ .

Démonstration : À partir de $\mathbb{E}[|X_t - X_s|^2] = \mathbb{E}[X_t^2] + \mathbb{E}[X_s^2] - 2\mathbb{E}[X_t X_s] \leq C|t - s|^\alpha$, on ne peut pas appliquer directement le Théorème 1.12 (Kolmogorov-Čentsov) car $\alpha > 1$ n'est pas garanti alors que c'est requis pour le Th. 1.12. On s'intéresse plutôt à $\mathbb{E}[|X_t - X_s|^{2m}]$. On rappelle que d'après la Prop. 0.3, pour X variable aléatoire normale centrée, on a : $\mathbb{E}[X^{2m}] = \frac{(2m)!}{2^m m!} \text{Var}(X)^m$. Il vient alors pour tout $m \geq 1$:

$$\mathbb{E}[|X_t - X_s|^{2m}] \leq C^m \frac{(2m)!}{2^m m!} |t - s|^{m\alpha}.$$

Comme cela est valable pour tout $m \geq 1$, on choisit l'entier m tel que $m\alpha > 1$. D'après le Théorème 1.12 (Kolmogorov-Čentsov) avec

$$b = m\alpha - 1, \quad a = 2m, \quad \text{et} \quad \frac{b}{a} = \frac{m\alpha - 1}{2m},$$

il existe une version $\frac{m\alpha-1}{2m}$ -höldérienne de X , pour tout $m > 1/\alpha$. Comme $\lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{m\alpha-1}{2m} = \frac{\alpha}{2}$, il existe une version γ -höldérienne de X pour tout $\gamma < \alpha/2$.

Finalement, les versions höldériennes pour des exposants $\gamma \neq \gamma'$ coïncident nécessairement par indistinguabilité (Prop. 1.8). \square

2.3 Espace gaussien

On rappelle que $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire $\langle X, Y \rangle = \mathbb{E}[XY]$.

Définition 2.8 (Espace gaussien) *Un espace gaussien (centré) est un sous-espace fermé de $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ formé de variables gaussiennes centrées.*

Par exemple, si $X = (X_1, \dots, X_p)$ est un vecteur gaussien centré dans \mathbb{R}^p , alors $\text{Vect}(X_1, \dots, X_p)$ est un espace gaussien. ($\text{Vect}(X_1, \dots, X_p)$ est constitué des combinaisons linéaires d'un vecteur gaussien, elles sont donc gaussiennes).

Proposition 2.9 *Si $X = (X_t)_{t \in T}$ est un processus gaussien, le sous-espace vectoriel fermé de $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ engendré par les variables aléatoires X_t , $t \in T$, est un espace gaussien, appelé espace gaussien engendré par le processus X .*

Démonstration : Le sous-espace vectoriel fermé $\overline{\text{Vect}}^{L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})}(X_t : t \in T)$ est formé des limites dans $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ des combinaisons linéaires finies de marginales X_{t_i} de $(X_t)_{t \in T}$. Ces limites sont gaussiennes car

- comme $(X_t)_{t \in T}$ est gaussien, les combinaisons linéaires $\sum_{i=1}^n a_i X_{t_i}$ le sont aussi ;
- les limites L^2 de variables gaussiennes sont gaussiennes, cf. Prop. 0.6.

□

Si H est un sous-ensemble de $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, on note $\sigma(H)$ la tribu engendrée par les variables aléatoires $Y \in H$.

Théorème 2.10 *Soit H un espace gaussien et soit $\{H_i, i \in I\}$ une famille de sous-espaces vectoriels de H . Alors les sous-espaces H_i , $i \in I$, sont orthogonaux dans $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ si et seulement si les tribus $\sigma(H_i)$, $i \in I$, sont indépendantes.*

Ce résultat est une généralisation des Prop. 0.16 et 0.18 pour les variables et vecteurs gaussiens. Comme dans ces cas, il est crucial que les espaces H_i soient contenus tous dans un même espace gaussien.

Démonstration : Si on suppose les tribus $\sigma(H_i)$, $i \in I$, indépendantes, alors pour $i \neq j$ et $X \in H_i$, $Y \in H_j$, on a

$$\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] = 0,$$

ce qui signifie que les espaces H_i sont deux à deux orthogonaux (le produit scalaire étant donné dans ce contexte par la covariance : $\langle X, Y \rangle = \mathbb{E}[XY]$).

Réciproquement, supposons les espaces H_i , $i \in I$, deux à deux orthogonaux. Par définition de l'indépendance d'une famille infinie de tribus, il suffit de montrer que pour tous indices distincts $i_1, \dots, i_p \in I$, les tribus $\sigma(H_{i_1}), \dots, \sigma(H_{i_p})$ sont indépendantes. Pour cela, il suffit de montrer que, si $Y_1^1, \dots, Y_{n_1}^1 \in H_{i_1}, \dots, Y_1^p, \dots, Y_{n_p}^p \in H_{i_p}$ les vecteurs $(Y_1^1, \dots, Y_{n_1}^1), \dots, (Y_1^p, \dots, Y_{n_p}^p)$ sont indépendants. En effet, pour chaque j , les ensembles

de la forme $\{Y_1^j \in A_1, \dots, Y_{n_j}^j \in A_{n_j}\}$ forment une classe stable par intersection finie qui engendre la tribu $\sigma(H_j)$, et on peut ensuite utiliser un argument classique de classe monotone. Pour chaque $j \in \{1, \dots, p\}$, on considère $Z_1^j, \dots, Z_{m_j}^j$ une base orthonormée de $\text{Vect}(Y_1^j, \dots, Y_{n_j}^j)$. La matrice de covariance du vecteur

$$(Z_1^1, \dots, Z_{m_1}^1, Z_1^2, \dots, Z_{m_2}^2, \dots, Z_1^p, \dots, Z_{m_p}^p)$$

est alors la matrice identité (car pour $i \neq j$ $\mathbb{E}[Z_l^i Z_k^j] = 0$ à cause de l'orthogonalité de H_i et H_j , et pour $i = j$, c'est dû au choix de Z_l^i , $1 \leq l \leq m_i$, base orthonormée de H_i). Ce vecteur est gaussien car ses composantes sont dans H , espace gaussien. D'après la Proposition 0.18, les composantes sont indépendantes. On conclut alors que les vecteurs

$$(Z_1^1, \dots, Z_{m_1}^1), \dots, (Z_1^p, \dots, Z_{m_p}^p)$$

sont indépendants. Comme pour chaque $j \in \{1, \dots, p\}$ le vecteur $(Y_1^j, \dots, Y_{n_j}^j)$ est une combinaison linéaire des coordonnées de $(Z_1^j, \dots, Z_{m_j}^j)$, de manière équivalente les vecteurs

$$(Y_1^1, \dots, Y_{n_1}^1), \dots, (Y_1^p, \dots, Y_{n_p}^p)$$

sont indépendants, ce qui prouve le Théorème 2.10. □

Corollaire 2.11 *Soit H un espace gaussien et K un sous-espace vectoriel fermé de K . On note p_K la projection orthogonale sur K . Soit $X \in H$.*

1. On a

$$\mathbb{E}[X|\sigma(K)] = p_K(X).$$

2. Soit $\sigma^2 = \mathbb{E}[(X - p_K(X))^2]$. Alors, pour tout borélien B de \mathbb{R} ,

$$\mathbb{P}(X \in B|\sigma(K)) = Q(\omega, B),$$

où $Q(\omega, \cdot)$ est la loi $\mathcal{N}(p_K(X)(\omega), \sigma^2)$, ie.

$$Q(\omega, B) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_B \exp\left(-\frac{(y - p_K(X))^2}{2\sigma^2}\right) dy$$

(et avec $Q(\omega, B) = \mathbf{1}_B(p_K(X))$ si $\sigma = 0$).

Remarque 2.12 1. D'une manière générale, la loi conditionnelle d'une variable aléatoire réelle X sachant une sous-tribu \mathcal{G} est un noyau $Q(\omega, \cdot)$ \mathcal{G} -mesurable, ie. une application $Q : \Omega \times \mathcal{B}(\mathbb{R}) \rightarrow [0, 1]$ telle que

- pour tout ω , $B \mapsto Q(\omega, B)$ est une mesure de probabilité sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$,
- pour tout $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $\omega \mapsto Q(\omega, B)$ est \mathcal{G} -mesurable,

avec la propriété

$$\mathbb{P}(X \in B | \mathcal{G}) = Q(\omega, B), \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}),$$

et plus généralement $\mathbb{E}[f(X) | \mathcal{G}] = \int f(y) Q(\omega, dy)$. La partie 2) du corollaire explique alors que dans le cas gaussien, la loi conditionnelle de X sachant la tribu $\sigma(K)$ est explicite, il s'agit de la loi $\mathcal{N}(p_K(X), \sigma^2)$.

2. En général, pour une variable aléatoire X dans $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, l'espérance conditionnelle est donné par une projection orthogonale, ie. $\mathbb{E}[X | \sigma(K)] = p_{L^2(\Omega, \sigma(K), \mathbb{P})}(X)$. Dans le cadre gaussien, l'assertion 1) du corollaire montre que la projection orthogonale est à faire directement sur l'espace K , bien plus petit que $L^2(\Omega, \sigma(K), \mathbb{P})$ où il faut en général projeter.
3. L'assertion 1) porte aussi le principe de la régression linéaire. Par exemple, si (X_1, X_2, X_3) est un vecteur gaussien, la meilleure approximation de X_3 connaissant X_1 et X_2 s'écrit $\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2$ où λ_1 et λ_2 sont déterminés en disant que $X_3 - (\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2)$ est orthogonal à $\text{Vect}(X_1, X_2)$.

Démonstration : 1) Soit $Y = X - p_K(X)$. Alors Y est orthogonal à K et d'après le Théorème 2.10, Y est indépendante de $\sigma(K)$. On a donc

$$\mathbb{E}[X | \sigma(K)] = \mathbb{E}[p_K(X) | \sigma(K)] + \mathbb{E}[Y | \sigma(K)] = p_K(X) + \mathbb{E}[Y] = p_K(X).$$

2) On écrit, pour toute fonction f mesurable positive sur \mathbb{R}_+ ,

$$\mathbb{E}[f(X) | \sigma(K)] = \mathbb{E}[f(p_K(X) + Y) | \sigma(K)] = \int f(p_K(X) + y) \mathbb{P}_Y(dy)$$

où \mathbb{P}_Y est la loi de Y qui est une loi $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ puisque Y est une variable gaussienne (centrée) de variance σ^2 . (On a utilisé le fait général suivant : si Z est une variable aléatoire \mathcal{G} -mesurable et si Y est indépendante de \mathcal{G} alors $\mathbb{E}[g(Y, Z) | \mathcal{G}] = \int g(y, Z) \mathbb{P}_Y(dy)$.) Le résultat annoncé en 2) découle aussitôt de la formule précédente. \square

2.4 Exemples de processus gaussiens

Avant d'étudier en détails le mouvement brownien au Chapitre 3, on décrit brièvement ce processus ainsi que quelques autres processus qui lui sont associés.

Mouvement brownien

Soit $T = \mathbb{R}_+$, le mouvement brownien (standard) $(B_t)_{t \geq 0}$ est le processus gaussien défini par $\mathbb{E}[B_t] = 0$ et $K(s, t) = \min(s, t)$ (et à trajectoires presque sûrement continues). On l'appelle aussi processus de Wiener. Noter que $K(t, s) = \min(t, s)$ est bien de type positif au sens de (2.1) puisqu'en écrivant $K(t, s) = \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{[0, t]}(x) \mathbf{1}_{[0, s]}(x) dx$, on a

$$\sum_{s, t \in T} c(s) c(t) K(s, t) = \int_{\mathbb{R}} \sum_{s, t \in T} c(s) \mathbf{1}_{[0, s]}(x) c(t) \mathbf{1}_{[0, t]}(x) dx = \int_{\mathbb{R}} \left(\sum_{t \in T} c(t) \mathbf{1}_{[0, t]}(x) \right)^2 dx \geq 0.$$

Propriétés immédiates

- 1) $B_0 = 0$ car la loi de B_0 est $\mathcal{N}(0, 0) = \delta_0$, la loi dégénérée en 0.
 2) $(B_t)_{t \geq 0}$ est un processus à accroissements indépendants. En effet soit $0 \leq t_1 < t_2 < t_3 < t_4$, on a

$$\begin{aligned} \text{Cov}(B_{t_2} - B_{t_1}, B_{t_4} - B_{t_3}) &= \mathbb{E}[(B_{t_2} - B_{t_1})(B_{t_4} - B_{t_3})] \\ &= \mathbb{E}[B_{t_2}B_{t_4}] - \mathbb{E}[B_{t_2}B_{t_3}] - \mathbb{E}[B_{t_1}B_{t_4}] + \mathbb{E}[B_{t_1}B_{t_3}] \\ &= t_2 - t_2 - t_1 + t_1 = 0. \end{aligned}$$

Les variables aléatoires $B_{t_2} - B_{t_1}$ et $B_{t_4} - B_{t_3}$ sont donc non corrélées. Comme elles sont gaussiennes, elles sont indépendantes. On justifie de même l'indépendance de n accroissements.

- 3) $B_t \sim \mathcal{N}(0, t)$ car $\mathbb{E}[B_t] = 0$ et $\text{Var}(B_t) = K(t, t) = t$.
 4) Si $s \leq t$, on a $B_t - B_s \sim B_{t-s}$. En effet $\mathbb{E}[B_t - B_s] = \mathbb{E}[B_t] - \mathbb{E}[B_s] = 0$ et

$$\begin{aligned} \text{Var}(B_t - B_s) &= \text{Cov}(B_t - B_s, B_t - B_s) \\ &= \text{Cov}(B_t, B_t) - 2\text{Cov}(B_t, B_s) + \text{Cov}(B_s, B_s) \\ &= t - 2s + s = t - s. \end{aligned}$$

Comme $B_t - B_s$ est de loi normale (combinaison linéaire des marginales d'un processus gaussien), on a $B_t - B_s \sim \mathcal{N}(0, t - s) \sim B_{t-s}$.

- 5) Autosimilarité : $\tilde{B}_t = \frac{1}{\sqrt{c}} B_{ct}$, $t \geq 0$, définit encore un mouvement brownien (standard).
 6) Comportement analogue en 0 et en $+\infty$: $\tilde{B}_t = t B_{1/t}$, $t \geq 0$, définit encore un mouvement brownien standard.

Le processus $(B_t)_{t \geq 0}$ a donc des comportements liés au voisinage de 0 et en $+\infty$

- 7) Localisation : pour tout $t_0 > 0$, $\tilde{B}_t = B_{t+t_0} - B_{t_0}$, $t \geq 0$, définit encore un mouvement brownien standard.

Le processus $(B_t)_{t \geq 0}$ a donc le même comportement en 0 et en tout $t_0 > 0$.

- 8) $(B_t)_{t \geq 0}$ a des trajectoires ps holdériennes d'ordre γ pour tout $\gamma \in]0, 1/2[$ mais ps non dérivables.

En effet, $\mathbb{E}[|B_t - B_s|^2] = |t - s|$, donc la continuité höldérienne suit du Théorème 2.7. On admet la non-dérivabilité des trajectoires, cf. Chapitre 3 et théorème de Kolmogorov-Čentsov (Th. 2.7).

[Graphe typique des trajectoires.]

Pont Brownien

Soit $T = [0, 1]$, le pont brownien $(B_t^\circ)_{t \in [0, 1]}$ est le processus gaussien centré défini par la fonction de covariance $K(s, t) = \min(s, t) - st$.

[Graphe typique des trajectoires.]

Proposition 2.13 *On peut définir directement un pont brownien B° à partir d'un mouvement brownien B par*

$$B_t^\circ = B_t - tB_1, \quad t \geq 0.$$

Démonstration : En effet, d'abord $(B_t - tB_1)_{t \in [0,1]}$ est gaussien, centré puis pour $s, t \in [0, 1]$, on a

$$\begin{aligned} & \text{Cov}(B_t - tB_1, B_s - sB_1) \\ &= \text{Cov}(B_t, B_s) - t \text{Cov}(B_1, B_s) - t \text{Cov}(B_s, B_1) + ts \text{Cov}(B_1, B_1) \\ &= \min(t, s) - ts - st + ts \\ &= \min(t, s) - ts. \end{aligned}$$

Comme le processus $(B_t - tB_1)_{t \in [0,1]}$ est gaussien, centré avec la bonne covariance, il s'agit d'un pont brownien. \square

Réciproquement, on peut construire le mouvement brownien B sur $T = [0, 1]$ à partir du pont brownien B° et d'une loi normale $N \sim \mathcal{N}(0, 1)$ indépendante de B° par

$$B_t = B_t^\circ + tN.$$

Exercice 2.14 Vérifier par un calcul de covariance qu'on définit ainsi un mouvement brownien.

Propriétés immédiates

1. $\tilde{B}_t^\circ = B_{1-t}^\circ$, $t \geq 0$, définit encore un pont brownien. Le pont brownien est donc symétrique en 0 et en 1 par retournement du temps.
2. $(B_t^\circ)_{t \geq 0}$ a des trajectoires ps holdériennes d'ordre γ pour tout $\gamma \in]0, 1/2[$ mais ps non dérivables.
L'argument est le même que pour le mouvement brownien avec $\mathbb{E}[(B_t^\circ)^2] = t - t^2$.
3. Un pont brownien B° est un mouvement brownien B conditionné à valoir 0 à la date $t = 1$ (conditionnement singulier).

Processus d'Ornstein-Uhlenbeck

Soit $T = \mathbb{R}$, le processus d'Ornstein-Uhlenbeck est le processus gaussien centré défini par

$$U_t = e^{-t/2} B(e^t)$$

où B est un mouvement brownien. On montre facilement que $U_t \sim \mathcal{N}(0, 1)$ car $\text{Var}(U_t) = 1$, ce processus est donc stationnaire. Sa fonction de covariance est donnée par

$$K(s, t) = \exp(-|t - s|/2).$$

Elle ne dépend que de la différence $(t - s)$, il s'agit bien d'un processus stationnaire de fonction de covariance plus simplement donnée par $K(t) = e^{-|t|/2}$ (exercice). Elle est donnée sous forme intégrale (2.2) avec la mesure spectrale $\nu(du) = \frac{du}{\pi(1+u^2)}$.

Brownien géométrique

Ce n'est pas un processus gaussien mais l'exponentiel d'un processus gaussien. Il s'agit de

$$S_t = x \exp(\mu t + \sigma B_t - \sigma^2 t/2), \quad t \geq 0. \quad (2.3)$$

Un tel processus modélise le cours d'un actif S_t soumis à un taux d'intérêt $\mu \geq 0$ et à une volatilité $\sigma > 0$ et qui vaut x au temps 0.

On le trouve en supposant comme Samuelson qui l'a introduit que les rendements entre deux périodes sont mesurés par les logarithmes des cours S_t .

On suppose de plus que les rendements entre 0 et t suivent un mouvement brownien de tendance (drift) $\mu - \sigma^2/2$ et de coefficient de diffusion (volatilité) σ . Cela se traduit par les propriétés suivantes sur les prix $(S_t)_{t \geq 0}$:

- $S_0 = x$.
- Les rendements $\log S_t - \log S_s$ suivent une loi gaussienne de moyenne $(\mu - \sigma^2/2)(t - s)$ et de variance $\sigma^2(t - s)$.
- Pour tout $t_0 = 0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_p$, les accroissements relatifs $S_{t_{i+1}}/S_{t_i}$, $0 \leq i \leq p - 1$, sont indépendants.

On en déduit qu'il existe un mouvement brownien $(B_t)_{t \geq 0}$ tel que en t , $S_t = x \exp(\mu t + \sigma B_t - \sigma^2 t/2)$.

Bruit blanc gaussien

Soit (\mathcal{A}, μ) un espace mesuré et $\mathcal{U} = \{A \in \mathcal{A} : \mu(A) < +\infty\}$.

Le bruit blanc est un processus gaussien $(X_A)_{A \in \mathcal{A}}$ indexé par l'ensemble des mesurables \mathcal{A} défini par $\mathbb{E}[X_A] = 0$ et $\text{Cov}(X_A, X_B) = \mu(A \cap B)$.

Il faut appréhender le bruit blanc comme une mesure aléatoire $A \mapsto X_A(\omega)$. Elle est aléatoire car X_A dépend de ω . On connaît quand même la loi de $X(A) \sim \mathcal{N}(0, \mu(A))$.

Attention cependant, un bruit blanc n'est pas une vraie mesure car $A \mapsto X_A$ n'est pas σ -additif.

Mouvement brownien fractionnaire

Soit $T = \mathbb{R}_+$. Le mouvement brownien fractionnaire (mBf) $(B^H(t))_{t \geq 0}$ est le processus gaussien centré défini par la fonction de covariance

$$K(s, t) = \frac{1}{2}(|s|^{2H} + |t|^{2H} - |s - t|^{2H}).$$

Le paramètre H s'appelle indice de Hurst.

Propriétés immédiates

1. Pour $H = 1/2$, le mBf devient le mouvement brownien standard.
2. On a $\mathbb{E}[|B^H(t) - B^H(s)|^2] = |t - s|^{2H}$.
3. Autosimilarité : $B^H(t) = c^{-H} B^H(ct)$, $t \geq 0$, définit encore un mBf d'indice H .
4. Les accroissements du mBf ne sont indépendants que lorsque $H = 1/2$ (c'est à dire dans le cas du mouvement brownien).

Cas $H = 1$. On a $\mathbb{E}[B^H(t)B^H(s)] = st$. On montre alors qu'il s'agit d'un processus dégénéré de la forme $B^H(t) = tB^H(1)$. Il s'agit en fait d'une droite aléatoire. (Dans ce cas, la dépendance est très forte dans la trajectoire!)

Cas $H = 0$. On a

$$\mathbb{E}[B^H(t)B^H(s)] = \frac{1}{2}(|s|^0 + |t|^0 - |s - t|^0) = \begin{cases} 1/2 & \text{si } s \neq t \\ 1 & \text{si } s = t. \end{cases}$$

Dans le cas $H = 0$, on peut construire le mBf de la façon suivante : soit $(Y_t)_{t \geq 0}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et Z une variable aléatoire indépendante de $(Y_t)_{t \geq 0}$. On les prend de loi $Y_t \sim Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Considérons alors $X_t = (Y_t + Z)/\sqrt{2}$. On montre facilement que X_t a bien la covariance cherchée. On constate alors que les trajectoires de $(X_t)_{t \geq 0}$ sont complètement discontinues.

[Graphe typique des trajectoires.]

De façon générale, pour $0 < H < 1$, les trajectoires du mBf $(B^H(t))_{t \geq 0}$ sont β -höldériennes pour tout ordre $\beta \in]0, H[$. Cela est dû au Théorème 2.7 de régularité des processus gaussiens (Kolmogorov-Čentsov).

Chapitre 3

Mouvement brownien

Dans ce chapitre, on présente le mouvement brownien (mB). Nous renvoyons à [LG0] pour une introduction générale de ce processus, à [KS], [RY] pour une description détaillée des principales propriétés du mouvement brownien.

On commence par quelques dates marquantes de l'histoire du mouvement brownien en Section 3.1 avant de définir le mouvement brownien en Section 3.2. On en étudie les propriétés en loi en Section 3.4, propriétés des trajectoires en Section 3.5, la variation quadratique en Section 3.6. On étudie enfin la propriété de Markov forte en Section 3.7 avec notamment le principe de réflexion. On revient à l'équation de la chaleur en Section 3.8.

Historiquement, le mouvement brownien a été exhibé pour représenter des mouvements qui évoluent au cours du temps de façon particulièrement désordonnée, par exemple en physique pour représenter des particules microscopiques soumises aux multiples chocs de leur environnement ou en finance pour représenter des cours de bourses très volatiles. Le mouvement brownien joue un rôle central dans la théorie des processus stochastiques (comme la loi normale standard $\mathcal{N}(0, 1)$ pour les lois de probabilités sur \mathbb{R}). Il apparaît dans de nombreuses situations aussi bien théoriques qu'appliquées et il offre un cadre assez simple où de nombreux calculs peuvent être menés.

3.1 Historique

En 1827, la première description (heuristique) du mouvement brownien est due au botaniste écossais Robert Brown (qui lui a donc donné son nom). Il observe de fines particules organiques en suspension dans un gaz ou un fluide et en décrit les mouvements particulièrement erratiques, au point que plusieurs physiciens estiment ensuite pendant le 19ème siècle que ce mouvement ne semble pas admettre de tangente. On ne pourrait donc pas parler de vitesse, ni lui appliquer les lois classiques de la mécanique !

En 1900, la première approche mathématique du mouvement brownien est due au français Louis Bachelier (dans sa *Théorie de la spéculation*). Il l'introduit pour modéliser la dynamique des prix des actions à la bourse. Sa démarche sera cependant oubliée jusque vers les années 1960.

En **1905**, l'allemand Albert Einstein (dans sa *Théorie de la relativité restreinte*) construit un modèle probabiliste pour décrire le mouvement d'une particule qui diffuse : il montre notamment que la loi de la position à l'instant t de la particule, sachant que l'état initial est x , admet une densité qui vérifie l'équation de la chaleur et de ce fait est gaussienne. Davantage d'explications sur les relations entre mouvement brownien et équation de la chaleur sont données en Section 3.8.

La même année qu'Einstein, le physicien polonais Marian von Smoluchowski utilise des promenades aléatoires pour décrire le mouvement brownien dont il en est les limites.

En **1923**, l'américain Norbert Wiener donne une première construction mathématique rigoureuse du mouvement brownien en tant que processus stochastique. Il établit en particulier la continuité de ses trajectoires.

Dans la période **1930–1960**, de nombreuses propriétés du mouvement brownien sont ensuite établies notamment par le français Paul Lévy. La notion d'équation différentielle stochastique est introduite. Le japonais Kiyoshi Itô les généralisera et les analysera avec son traité de **1948**. Cette démarche très féconde établit des liens importants entre analyse et probabilité et fonde l'analyse et le calcul stochastiques.

Les relations entre probabilités et physique sont, elles, explorées via le mouvement brownien et ses généralisations dès **1930** par les néerlandais Leonard Ornstein et George Eugene Uhlenbeck en suivant une idée du français Paul Langevin. Ils montrent que le processus d'Ornstein-Uhlenbeck décrit la situation d'équilibre d'un modèle dirigé par le mouvement brownien.

Depuis, de nombreux travaux sont consacrés au mouvement brownien, à ses généralisations et au calcul stochastique. Citons pour terminer Wolfgang Döblin, mathématicien franco-allemand dont les travaux précurseurs en analyse stochastique (**fin des années 30**) sont restés méconnus jusqu'à l'ouverture de son célèbre pli cacheté en 2000 à l'académie des sciences de Paris (Döblin, mobilisé pendant la deuxième guerre mondiale avait envoyé ses travaux depuis le front, par crainte de ne pas revenir de la guerre. Il n'en est pas revenu. Son courrier est resté oublié jusqu'en 2000).

Dans le cadre déterministe, de nombreux phénomènes sont régis par des équations différentielles (ou équations aux dérivées partielles). Pour les phénomènes modélisés par un mouvement brownien, on s'attend à avoir des équations différentielles faisant intervenir le mouvement brownien. Malheureusement, ce processus a des trajectoires nulle part dérivables (cf. Prop. 3.24 et Th. 3.25) et il n'est pas possible de considérer des équations différentielles le faisant vraiment intervenir. Plutôt que de le dériver, on cherchera dans la suite, à intégrer contre ce processus, ce qui permettra de contourner le problème en considérant des équations intégrales (il est d'usage de se ramener à l'écriture symbolique de dérivées et on parlera alors d'*équation différentielle stochastique*). Dans les prochains chapitres (cf. Chapitre 6), on définit l'intégrale stochastique pour une large classe de processus (les semimartingales, cf. Chapitre 5). Si on se contente du cadre brownien (intégrale et équation différentielle stochastique pour le mouvement brownien), on parle de calcul d'Itô. Dans ce cadre simplifié, la construction est plus directe. On pourra consulter les notes cours [Tud] ou le livre [Gal] pour cette approche réservée au mouvement brownien.

Dans ce chapitre, nous en donnons les principales propriétés (en loi en Section 3.4, trajectoires en Section 3.5, variation quadratique en Section 3.6) notamment les propriétés de Markov faible et forte (Section 3.7). À la fin du chapitre en Section 3.8, nous explorons les liens entre le mouvement brownien et l'équation de la chaleur, ce qui correspond à la démarche d'Einstein pour appréhender le mouvement brownien.

3.2 Définition, premières propriétés

Le caractère très erratique des trajectoires qui caractérise le mouvement brownien est en général associé à l'observation que le phénomène, bien que très désordonné, présente une certaine homogénéité dans le temps, au sens où la date d'origine des observations n'a pas d'importance. Ces propriétés sont reprises dans la définition qui suit.

Définition 3.1 (Mouvement brownien) *Un mouvement brownien (standard) réel est un processus gaussien centré $(B_t)_{t \geq 0}$ à trajectoires continues de fonction de covariance*

$$K(s, t) = \min(s, t) := s \wedge t.$$

On l'appelle aussi processus de Wiener.

L'opérateur $K(s, t) = \min(s, t)$ est symétrique et de type positif. En effet si $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est à support borné alors

$$\begin{aligned} \sum_{s, t \in \mathbb{R}} c(s)c(t)K(s, t) &= \sum_{s, t \in \mathbb{R}} c(s)c(t)(s \wedge t) \\ &= \sum_{s, t \in \mathbb{R}} c(s)c(t) \int \mathbf{1}_{[0, s]}(x) \mathbf{1}_{[0, t]}(x) dx \\ &= \int \sum_{s, t \in \mathbb{R}} c(s)c(t) \mathbf{1}_{[0, s]}(x) \mathbf{1}_{[0, t]}(x) dx \\ &= \int \left(\sum_{t \in \mathbb{R}} c(t) \mathbf{1}_{[0, t]}(x) \right)^2 dx \geq 0. \end{aligned}$$

Par le Théorème 2.3, il existe alors un processus gaussien centré de covariance K . Par contre, il n'est pas immédiat que ce processus admette une version à trajectoires continues ps. Mais cela sera justifié en début de Section 3.3 avec le théorème de régularité de Kolmogorov-Čentsov pour les processus gaussiens (Th. 2.7).

3.2.1 Propriétés immédiates

- 1) $B_0 = 0$ car la loi de B_0 est $\mathcal{N}(0, 0) = \delta_0$, la loi dégénérée en 0.
- 2) $B_t \sim \mathcal{N}(0, t)$ car $\mathbb{E}[B_t] = 0$ et $\text{Var}(B_t) = K(t, t) = t$.

3) $(B_t)_{t \geq 0}$ est un processus à accroissements indépendants. En effet soit $0 \leq t_1 < t_2 < t_3 < t_4$, on a

$$\begin{aligned} \text{Cov}(B_{t_2} - B_{t_1}, B_{t_4} - B_{t_3}) &= \mathbb{E}[(B_{t_2} - B_{t_1})(B_{t_4} - B_{t_3})] \\ &= \mathbb{E}[B_{t_2}B_{t_4}] - \mathbb{E}[B_{t_2}B_{t_3}] - \mathbb{E}[B_{t_1}B_{t_4}] + \mathbb{E}[B_{t_1}B_{t_3}] \\ &= t_2 - t_2 - t_1 + t_1 = 0. \end{aligned}$$

Les variables $B_{t_2} - B_{t_1}$ et $B_{t_4} - B_{t_3}$ sont donc non corrélées. Comme le vecteur $(B_{t_2} - B_{t_1}, B_{t_4} - B_{t_3})$ est gaussien, $B_{t_2} - B_{t_1}$ et $B_{t_4} - B_{t_3}$ sont indépendantes. On justifie de même l'indépendance mutuelle de n accroissements, $n \geq 1$.

4) Si $s \leq t$, on a $B_t - B_s \sim B_{t-s}$. En effet $\mathbb{E}[B_t - B_s] = \mathbb{E}[B_t] - \mathbb{E}[B_s] = 0$ et

$$\begin{aligned} \text{Var}(B_t - B_s) &= \text{Cov}(B_t - B_s, B_t - B_s) \\ &= \text{Cov}(B_t, B_t) - 2\text{Cov}(B_t, B_s) + \text{Cov}(B_s, B_s) \\ &= t - 2s + s = t - s. \end{aligned}$$

Donc $B_t - B_s \sim \mathcal{N}(0, t - s) \sim B_{t-s}$.

Remarque 3.2 Les propriétés **3)** et **4)** s'énoncent comme suit : le mouvement brownien a des accroissements indépendants et stationnaires.

Définition 3.3 (Définition équivalente du mouvement brownien) Soit $B = (B_t)_{t \geq 0}$ une famille de variables aléatoires indexées par le temps. On dit que B est un mouvement brownien si c'est un processus à trajectoires continues tel que

- i) pour tout $t \geq 0$: $B_t \sim \mathcal{N}(0, t)$.
- ii) pour tout $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n$, les variables aléatoires $B_{t_1}, B_{t_2} - B_{t_1}, \dots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}}$ sont indépendantes.

Preuve de l'équivalence. On sait déjà qu'un mB défini par la Déf. 3.1 vérifie i) et ii) donc la déf. 3.3. Il reste à prouver la réciproque. En écrivant $B_t = B_s + B_t - B_s$ pour $s \leq t$, par indépendance des accroissements, en utilisant la fonction caractéristique, on a : $\varphi_{B_t} = \varphi_{B_s} \varphi_{B_t - B_s}$. D'où

$$\varphi_{B_t - B_s}(x) = \varphi_{B_t}(x) \varphi_{B_s}(x)^{-1} = \exp(-tx^2/2) \exp(sx^2/2) = \exp(-(t-s)x^2/2) = \varphi_{B_{t-s}}(x).$$

Les accroissements sont donc stationnaires, en particulier ils sont gaussiens. Comme les accroissements sont indépendants, un vecteur d'accroissements $(B_{t_1}, B_{t_2} - B_{t_1}, \dots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}})$ a pour loi la loi produit de ses lois marginales qui sont gaussiennes. Un vecteur d'accroissements est donc gaussien. Mais comme $(B_{t_1}, B_{t_2}, \dots, B_{t_n})$ est une transformation linéaire de $(B_{t_1}, B_{t_2} - B_{t_1}, \dots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}})$ cela reste gaussien. Les lois fini-dimensionnelles étant gaussiennes, le processus est gaussien. Puis pour $s \leq t$, on a

$$\text{Cov}(B_t, B_s) = \mathbb{E}[B_t B_s] = \mathbb{E}[(B_t - B_s + B_s) B_s] = \mathbb{E}[B_t - B_s] \mathbb{E}[B_s] + \mathbb{E}[B_s^2] = 0 + s = s,$$

ce qui confirme que le processus défini par la définition alternative Déf. 3.3 est bien le mouvement brownien (Déf. 3.1) \square

[Graphe des trajectoires typiques du MB]

La probabilité que B_t appartienne à un petit intervalle $[x, x + dx]$ est donc donnée par la densité gaussienne centrée de variance t

$$\mathbb{P}(B_t \in [x, x + dx]) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp(-x^2/2t) dx.$$

En particulier, la variable aléatoire B_t qui est une variable aléatoire gaussienne de variance t est comprise entre les nombres $f_1(t) = 2\sqrt{t}$ et $f_2(t) = -2\sqrt{t}$ avec une probabilité (d'à peu près) 95% (cf. table de la loi $\mathcal{N}(0, 1)$).

On peut montrer que cette propriété est vraie pour toute la trajectoire brownienne qui est donc comprise entre les deux courbes de f_1 et de f_2 avec une probabilité comparable (c'est vrai globalement et pas seulement " t par t'' ").

Mais en général, les phénomènes observés ne sont pas aussi bien normalisés.

Définition 3.4 (Mouvement brownien avec dérive) *On appelle encore mouvement brownien issu de x , de dérive (ou drift) b et de coefficient de diffusion σ , le processus $X_t = x + \sigma B_t + \mu t$ (où B est un mouvement brownien standard).*

Proposition 3.5 *Le mouvement brownien (général) X est encore un processus à accroissements indépendants stationnaires et gaussiens. Il est non centré et tel que $X_0 = x$. De plus $X_t \sim \mathcal{N}(x + \mu t, \sigma^2 t)$.*

Sauf mention contraire, par défaut, quand on parlera du mouvement brownien, il s'agira du mouvement brownien standard B .

3.3 Constructions du mouvement brownien

On commence par observer qu'un processus gaussien B centré de covariance $K(s, t) = \min(s, t)$ admet effectivement une version à trajectoires continues γ -höldériennes pour tout $\gamma \in]0, 1/2[$. Il suffit d'appliquer le Théorème 2.7 (régularité de Kolmogorov-Čentsov pour les processus gaussiens) avec $\alpha = 1$, puisque

$$K(t, t) + K(s, s) - 2K(s, t) = \mathbb{E}[(B_t - B_s)^2] = (t - s)^2.$$

La version donnée par ce théorème est un mouvement brownien au sens des Déf. 3.1 ou Déf. 3.3 et admet des trajectoires höldériennes d'indice γ pour tout $\gamma \in]0, 1/2[$. Toutefois, cette approche n'est pas explicite (elle utilise le Théorème 1.3 d'extension de Kolmogorov).

3.3.1 Principe d'invariance de Donsker

On considère une suite de variables aléatoires *iid* $(X_n)_{n \geq 1}$ centrées $\mathbb{E}[X_n] = 0$ et réduites $\text{Var}(X_n) = 1$. Notons $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ la suite de ses sommes partielles. On peut construire un processus polygonal sur $[0, 1]$ à partir de la suite de ses sommes partielles : considérons le processus $Z_n(t)$ qui vaut S_k/\sqrt{n} en $t = k/n$ et qui est affine entre k/n et $(k+1)/n$. Plus précisément, on pose

$$Z_n(t) = \frac{S_k}{\sqrt{n}} + \frac{X_{k+1}}{\sqrt{n}}(nt - k), \quad \text{pour } t \in \left[\frac{k}{n}, \frac{(k+1)}{n} \right]. \quad (3.1)$$

[Graphe des trajectoires typiques.]

Théorème 3.6 (Principe d'invariance de Donsker) *Le processus polygonal $Z_n = (Z_n(t))_{t \in [0,1]}$ en (3.1) converge faiblement dans $C([0, 1], \mathbb{R})$ vers le mouvement brownien ie. pour toute fonction continue bornée $f : C([0, 1], \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}[f(Z_n)] = \mathbb{E}[f(B)]$.*

Remarque 3.7 — Ce résultat peut être vu comme une justification de l'existence du mouvement brownien sur $[0, 1]$ puisqu'on montre l'existence d'un processus qui vit dans l'ensemble des fonctions continues avec les propriétés requises sur les lois.

- En pratique, on utilise ce résultat pour simuler le mouvement brownien : on l'approche pour n grand par des processus polygonaux (3.1).
- C'est un principe d'invariance car la loi limite est indépendante de la loi commune des variables aléatoires initiales $(X_n)_{n \geq 1}$ (tant qu'elle a une variance finie). C'est une version fonctionnelle du TCL (Th. 0.7).
- Avec le continuous mapping theorem, pour toute fonction $h : C([0, 1], \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ continue, on déduit de la convergence faible (dans $C([0, 1], \mathbb{R})$) $Z_n \Rightarrow B$, la convergence faible (dans \mathbb{R}) $f(Z_n) \Rightarrow f(B)$. Ainsi avec les fonctions

$$h(x) = x(1), \quad h(x) = \sup_{t \in [0,1]} x(t), \quad h(x) = \sup_{t \in [0,1]} |x(t)|,$$

on déduit les résultats suivants quand $n \rightarrow +\infty$:

- $Z_n(1) \Rightarrow B(1)$, c'est à dire $\frac{S_n}{\sqrt{n}} \Rightarrow \mathcal{N}(0, 1)$ (le TCL, Th. 0.7).
- $\sup_{t \in [0,1]} Z_n(t) \Rightarrow \sup_{t \in [0,1]} B(t)$, c'est à dire $\frac{1}{\sqrt{n}} \max_{k \leq n} S_k \Rightarrow \sup_{t \in [0,1]} B(t)$.
- $\sup_{t \in [0,1]} |Z_n(t)| \Rightarrow \sup_{t \in [0,1]} |B(t)|$, c'est à dire $\frac{1}{\sqrt{n}} \max_{k \leq n} |S_k| \Rightarrow \sup_{t \in [0,1]} |B(t)|$.

Démonstration : Grâce au Théorème 1.24 (convergence faible de processus), la preuve de ce résultat comprend deux étapes :

- (1) Établir la convergence des lois fini-dimensionnelles de Z_n vers celles de B .
- (2) Montrer que la suite des lois de Z_n est équitendue (Déf. 1.20).

(1) Soit $0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_m \leq 1$. Notons $V_n = (Z_n(t_1), \dots, Z_n(t_m))$ et $V = (B(t_1), \dots, B(t_m))$. Il s'agit de montrer $V_n \Rightarrow V$ (convergence en loi de vecteur aléatoire). Pour cela, on introduit $U_n = (Z_n(\frac{k_1}{n}), \dots, Z_n(\frac{k_m}{n}))$ où $k_i = [nt_i]$ et on va utiliser le résultat suivant (cf. [JCB-proba] ou tout de probabilité de niveau L3).

Lemme 3.8 (Slutsky) Soit $X_n \Rightarrow X$ et $Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$. Alors $X_n + Y_n \Rightarrow X$.

Pour montrer $V_n \Rightarrow V$, on se ramène par ce lemme à montrer que $V_n - U_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$ et $U_n \Rightarrow V$.

On a d'abord

$$\begin{aligned} \|V_n - U_n\|_1 &\leq \sum_{i=1}^m \left| Z_n(t_i) - Z_n\left(\frac{k_i}{n}\right) \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^m \left| Z_n\left(\frac{k_{i+1}}{n}\right) - Z_n\left(\frac{k_i}{n}\right) \right| \quad (\text{car } Z_n \text{ est affine par morceaux}) \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^m |X_{i+1}|, \\ \mathbb{E}[\|V_n - U_n\|_1] &\leq \frac{m}{\sqrt{n}} \mathbb{E}[|X_1|]. \end{aligned}$$

On a donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}[\|V_n - U_n\|_1] = 0$ et par l'inégalité de Markov $V_n - U_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$, $n \rightarrow +\infty$.

Soit maintenant

$$\tilde{U}_n = \left(\dots, Z_n\left(\frac{k_i}{n}\right) - Z_n\left(\frac{k_{i-1}}{n}\right), \dots \right), \quad \tilde{V} = \left(\dots, B(t_i) - B(t_{i-1}), \dots \right)$$

avec $k_0 = 0$ et $t_0 = 0$. On introduit $J : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ donné par $J(x) = y$ avec $y_k = \sum_{j=1}^k x_j$. On a alors $J(\tilde{U}_n) = U_n$ et $J(\tilde{V}) = V$. Comme J est continue $\tilde{U}_n \Rightarrow \tilde{V}$ assurera $U_n \Rightarrow V$.

Mais par indépendance des accroissements de Z_n (resp. de B), les coordonnées de \tilde{U}_n (resp. de \tilde{V}) sont indépendantes car

$$Z_n\left(\frac{k_i}{n}\right) - Z_n\left(\frac{k_{i-1}}{n}\right) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{s=k_{i-1}+1}^{k_i} X_s.$$

On peut alors utiliser le lemme simple suivant (laisser en exercice).

Lemme 3.9 Soit $P_n \Rightarrow P$ et $Q_n \Rightarrow Q$ des suites de mesures qui convergent faiblement. Alors $P_n \otimes Q_n \Rightarrow P \otimes Q$.

Il suffit donc de vérifier la convergence faible, coordonnée par coordonnée. Mais d'une part

$$Z_n\left(\frac{k_i}{n}\right) - Z_n\left(\frac{k_{i-1}}{n}\right) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{s=k_{i-1}+1}^{k_i} X_s = \sqrt{\frac{k_i - k_{i-1}}{n}} \frac{1}{\sqrt{k_i - k_{i-1}}} \sum_{s=k_{i-1}+1}^{k_i} X_s.$$

D'autre part $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{k_i - k_{i-1}}{n}} = \sqrt{t_i - t_{i-1}}$ (rappel : $k_i = [nt_i]/n$) et par le TCL (Th. 0.7)

$$\frac{1}{\sqrt{k_i - k_{i-1}}} \sum_{s=k_{i-1}+1}^{k_i} X_s \Longrightarrow \mathcal{N}(0, 1), \quad n \rightarrow +\infty.$$

On a donc

$$Z_n\left(\frac{k_i}{n}\right) - Z_n\left(\frac{k_{i-1}}{n}\right) \implies \mathcal{N}(0, t_i - t_{i-1}) = \mathcal{L}(B(t_i) - B(t_{i-1})),$$

ce qui justifie $\tilde{U}_n \Rightarrow \tilde{V}$ puis $U_n \Rightarrow V$ et donc la convergence faible des lois fini-dimensionnelles de Z_n vers celles de B : cela achève la première étape **(1)** de la preuve.

(2) Il s'agit maintenant de vérifier l'équitension de la suite $(P_n)_{n \geq 1}$ des lois de $(Z_n)_{n \geq 1}$ en (3.1). Pour cela, on se sert du Théorème 1.23 qu'on va appliquer avec la **condition supplémentaire** $\mathbb{E}[X_1^4] < +\infty$. On renvoie à [Bil2] pour un argument complet qui n'utilise que $\mathbb{E}[X_1^2] < +\infty$. Montrons que pour tout $n \geq 1$:

$$\mathbb{E}[|Z_n(t) - Z_n(s)|^4] \leq c|t - s|^2.$$

Pour $t = \frac{k}{n} < s = \frac{m}{n}$, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[|Z_n(t) - Z_n(s)|^4] &\leq \mathbb{E}\left[\left|\frac{\sum_{j=k+1}^m X_j}{\sqrt{n}}\right|^4\right] \leq \frac{1}{n^2} \mathbb{E}\left[\left(\sum_{j=1}^{m-k} X_j\right)^4\right] \\ &\leq \frac{C\mathbb{E}[X_1^4]}{n^2} (m-k)^2 \leq c|t - s|^2 \end{aligned}$$

où on a utilisé le résultat suivant (dû à l'indépendance et au centrage des variables aléatoires X_i) :

Lemme 3.10 Soit $(Y_n)_{n \geq 1}$ des variables aléatoires iid telles que $\mathbb{E}[Y_n] = 0$ et $\mathbb{E}[Y_n^4] < +\infty$. Pour une constante $C \in]0, +\infty[$, on a :

$$\mathbb{E}\left[\left(\sum_{k=1}^n Y_k\right)^4\right] \leq Cn^2 \mathbb{E}[Y_1^4].$$

Pour t, s quelconques, on a deux possibilités : soit $\frac{k}{n} \leq t \leq s \leq \frac{k+1}{n}$ (ie. t, s dans le même intervalle), soit $\frac{k}{n} \leq t \leq \frac{k+1}{n} < \frac{m}{n} \leq s \leq \frac{m+1}{n}$, (ie. t, s dans deux intervalles différents).

Dans le premier cas, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[|Z_n(t) - Z_n(s)|^4] &= \mathbb{E}\left[\left|\frac{X_{k+1}}{\sqrt{n}}(t-s)n\right|^4\right] \quad (\text{car } Z_n \text{ est affine entre } t \text{ et } s) \\ &= c_1 n^2 (t-s)^2 (t-s)^2 \\ &\leq c_1 (t-s)^2 \quad (\text{car dans ce cas } n(t-s) \leq 1). \end{aligned}$$

Dans le deuxième cas, comme par convexité $(a+b+c)^4 \leq 3^3(a^4+b^4+c^4)$, on a

$$\mathbb{E}[|Z_n(t) - Z_n(s)|^4]$$

$$\begin{aligned}
&\leq \mathbb{E} \left[\left(\left| Z_n(t) - Z_n\left(\frac{k+1}{n}\right) \right| + \left| Z_n\left(\frac{k+1}{n}\right) - Z_n\left(\frac{m}{n}\right) \right| + \left| Z_n\left(\frac{m}{n}\right) - Z_n(s) \right| \right)^4 \right] \\
&\leq 27 \left(\mathbb{E} \left[\left| Z_n(t) - Z_n\left(\frac{k+1}{n}\right) \right|^4 \right] + \mathbb{E} \left[\left| Z_n\left(\frac{k+1}{n}\right) - Z_n\left(\frac{m}{n}\right) \right|^4 \right] + \mathbb{E} \left[\left| Z_n\left(\frac{m}{n}\right) - Z_n(s) \right|^4 \right] \right) \\
&\leq c' \left(\left| t - \frac{k+1}{n} \right|^2 + \left| \frac{k+1}{n} - \frac{m}{n} \right|^2 + \left| \frac{m}{n} - s \right|^2 \right) \quad (\text{par les cas déjà vus précédemment}) \\
&\leq c'' |t - s|^2
\end{aligned}$$

car

$$\left| t - \frac{k+1}{n} \right|, \left| \frac{k+1}{n} - \frac{m}{n} \right|, \left| \frac{m}{n} - s \right| \leq |t - s|.$$

D'après le Théorème 1.23 (critère de tension de Kolmogorov), la suite des lois $(\mathcal{L}(Z_n))_{n \geq 1}$ est équitendue.

Conclusion. La suite des lois $(\mathcal{L}(Z_n))_{n \geq 1}$ est équitendue (par **2**) et ses lois fini-dimensionnelles convergent vers celles de B (par **1**). D'après le Théorème 1.24, on a $Z_n \Rightarrow B$ dans $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$. \square

Remarque 3.11 On a justifié le résultat avec la restriction $\mathbb{E}[X_1^4] < +\infty$. Avec un peu plus de travail, on peut se passer de cette hypothèse et ne supposer que l'existence du moment d'ordre 2 : $\mathbb{E}[X_1^2] < +\infty$, cf. [Bil2].

Preuve du Lemme 3.10. Soit $(Y_n)_{n \geq 1}$ des variables aléatoires *iid* telles que $\mathbb{E}[Y_n] = 0$ et $\mathbb{E}[Y_n^4] < +\infty$. On montre que

$$\mathbb{E} \left[\left(\sum_{i=1}^n Y_i \right)^4 \right] \leq C n^2 \mathbb{E}[Y_1^4].$$

Pour cela, on a

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{i=1}^n Y_i \right)^4 &= \sum_i Y_i^4 + \binom{4}{2} \binom{2}{2} \sum_{i \neq j} Y_i^2 Y_j^2 + \binom{4}{3} \binom{1}{1} \sum_{i \neq j} Y_i^3 Y_j \\
&\quad + \binom{4}{2} \binom{2}{1} \binom{1}{1} \sum_{i \neq j \neq k} Y_i^2 Y_j Y_k + \binom{4}{1} \binom{3}{1} \binom{2}{1} \binom{1}{1} \sum_{i \neq j \neq k \neq l} Y_i Y_j Y_k Y_l.
\end{aligned}$$

Par indépendance et centrage des variables aléatoires Y_j , il vient

$$\mathbb{E} \left[\left(\sum_{i=1}^n Y_i \right)^4 \right] = \sum_i \mathbb{E}[Y_i^4] + \binom{4}{2} \sum_{i \neq j} \mathbb{E}[Y_i^2 Y_j^2]$$

$$= n\mathbb{E}[Y_1^4] + 6n(n-1)\mathbb{E}[Y_1^2]^2.$$

On conclut la preuve du lemme avec l'inégalité de Cauchy-Schwarz qui assure $(\mathbb{E}[Y_i^2])^2 \leq \mathbb{E}[Y_i^4]$. \square

3.3.2 Mesure de Wiener

On rappelle qu'on note $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ ou $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues sur $[0, 1]$ ou \mathbb{R}_+ et on définit de bonnes topologies avec $\|\cdot\|_\infty$ donnée en (1.6) (topologie de la convergence uniforme) et d donnée en (1.7) (topologie de la convergence uniforme sur les compacts) et que la tribu cylindrique trace sur $\mathcal{C}(T, \mathbb{R})$ coïncide avec la tribu borélienne associée : $\sigma(\text{Cyl}) \cap \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}) = \mathcal{B}(\mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}))$, cf. Prop. 1.15 et la discussion en Section 1.3.

En tant que processus à trajectoires continues, grâce à la Prop. 1.15, un mouvement brownien B peut être vu comme une application aléatoire sur $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$:

$$\begin{cases} \Omega & \rightarrow \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}) \\ \omega & \mapsto B(\omega) = (t \mapsto B_t(\omega)). \end{cases}$$

La **mesure de Wiener** \mathbb{W} est la mesure image de \mathbb{P} par cette application : $\mathbb{W} = \mathbb{P}_B$. C'est donc une mesure de probabilité sur $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$. Il s'agit de la loi commune à tout mouvement brownien dont les lois fini-dimensionnelles sont données par :

$$\begin{aligned} \mathbb{W}(x : x(t_0) \in A_0, x(t_1) \in A_1 \dots, x(t_n) \in A_n) \\ = \mathbf{1}_{A_0}(0) \int_{A_1 \times \dots \times A_n} \frac{dy_1 \dots dy_n}{(2\pi)^{n/2} \sqrt{t_1(t_2 - t_1) \dots (t_n - t_{n-1})}} \exp \left(- \sum_{i=1}^n \frac{(y_i - y_{i-1})^2}{2(t_i - t_{i-1})} \right) \end{aligned}$$

avec $t_0 = 0$. De plus ces propriétés caractérisent la loi :

Proposition 3.12 *La mesure de Wiener \mathbb{W} est bien définie : si $\mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2$ sont deux probabilités sur $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ chacune issue d'un mouvement brownien alors $\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}_2$.*

Démonstration : Notons \mathcal{P} l'ensemble des ouverts élémentaires qui engendrent la tribu borélienne sur $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$. C'est un π -système (stable par intersection finie). Notons $\mathcal{M} = \{A \in \mathcal{B} : \mathbb{P}_1(A) = \mathbb{P}_2(A)\}$. Il s'agit d'une classe monotone ($\mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}) \in \mathcal{M}$, stable par différence ensembliste, stable par réunion dénombrable croissante) qui contient \mathcal{P} (les deux mouvements browniens ont les mêmes lois fini-dimensionnelles) :

$$\mathbb{P}_1(O) = \mathbb{P}(B_{t_1}^{(1)} \in A_1, \dots, B_{t_n}^{(1)} \in A_n) = \mathbb{P}(B_{t_1}^{(2)} \in A_1, \dots, B_{t_n}^{(2)} \in A_n) = \mathbb{P}_2(O).$$

Le théorème de classe monotone assure que $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}) = \sigma(\mathcal{P}) \subset \mathcal{M}$, ce qui donne le résultat. \square

De façon générale : la loi d'un processus stochastique est entièrement déterminée par ses lois fini-dimensionnelles, cf. Prop. 1.4. On définit alors :

Définition 3.13 (Mesure de Wiener) On appelle mesure de Wiener la loi du mouvement brownien B vu comme variable aléatoire sur $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$. L'espace $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ (ou $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$) muni de cette loi est appelé espace de Wiener.

Si on considère l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) = (\mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}), \mathcal{B}(\mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})), \mathbb{W})$ le **processus** dit **canonique** $X_t(\omega) = \omega(t)$ est un mouvement brownien. Il s'agit de la construction canonique du mouvement brownien.

3.4 Propriétés en loi du mouvement brownien

On se fixe dans cette section un mouvement brownien standard B . Systématiquement, pour vérifier qu'on a un mouvement brownien, il s'agit de vérifier qu'on a un processus gaussien, centré, à trajectoires continues et avec la bonne fonction de covariance. Dans les propriétés qui suivent, il est facile (et omis) de constater que le processus est gaussien, centré et à trajectoires continues ; on se contente de calculer l'opérateur de covariance.

1) Symétrie. $-B$ est un mouvement brownien.

2) Autosimilarité (propriété d'échelle). Pour tout $c > 0$, $B_t^{(c)} = \frac{1}{\sqrt{c}} B_{ct}$ définit un mouvement brownien (standard).

En effet : $B_t^{(c)}$ est un processus gaussien car ses lois fini-dimensionnelles en sont de B ; le processus est centré, à trajectoires continues (car B l'est) et de fonction de covariance

$$\mathbb{E}[B_t^{(c)} B_s^{(c)}] = \mathbb{E}\left[\frac{1}{\sqrt{c}} B_{ct} \frac{1}{\sqrt{c}} B_{cs}\right] = \frac{1}{c} \min(ct, cs) = \min(t, s).$$

Conséquence : Cette propriété montre que c fois B_t se comporte comme un mouvement brownien lu en $c^2 t$: le changement de temps se lit en espace (et réciproquement).

3) Inversion du temps. Le processus \tilde{B} défini par $\tilde{B}_t = t B_{1/t}$ si $t \neq 0$ et $\tilde{B}_0 = 0$ est un mouvement brownien standard.

En effet, \tilde{B} est gaussien car à nouveau ses lois fini-dimensionnelles sont des transformations linéaires de celles de B ; le processus est centré et de covariance,

$$\text{Cov}(\tilde{B}_t, \tilde{B}_s) = ts \text{Cov}(B_{1/t}, B_{1/s}) = ts \min(1/t, 1/s) = \min(t, s).$$

De plus, ses trajectoires sont continues sur $]0, +\infty[$ car celles de B le sont sur \mathbb{R}_+ . Il reste s'assurer de la continuité des trajectoires de \tilde{B} en 0 et cela vient de

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\lim_{t \rightarrow 0} \tilde{B}_t = 0\right) &= \mathbb{P}\left(\bigcap_{n \geq 1} \bigcup_{p \geq 1} \bigcap_{t \in]0, 1/p] \cap \mathbb{Q}} \{|\tilde{B}_t| \leq 1/n\}\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\bigcap_{n \geq 1} \bigcup_{p \geq 1} \bigcap_{t \in]0, 1/p] \cap \mathbb{Q}} \{|B_t| \leq 1/n\}\right) \quad \text{car } (\tilde{B}_t)_{t>0} \stackrel{fdd}{=} (B_t)_{t>0} \end{aligned}$$

$$= \mathbb{P}\left(\lim_{t \rightarrow 0} B_t = 0\right) = 1.$$

Conséquence : le processus B a donc le même type de comportement en 0 et en $+\infty$

4) Retournement du temps. Le processus retourné à l'instant T , $\widehat{B}_t^{(T)} = B_T - B_{T-t}$ est encore un mouvement brownien sur $[0, T]$.

Il est clair que $\widehat{B}^{(T)}$ est un processus gaussien, centré à trajectoires continues et sa covariance est donnée par

$$\begin{aligned} \text{Cov}(\widehat{B}_t^{(T)}, \widehat{B}_s^{(T)}) &= \text{Cov}(B_T - B_{T-t}, B_T - B_{T-s}) \\ &= \text{Cov}(B_T, B_T) - \text{Cov}(B_T, B_{T-s}) - \text{Cov}(B_{T-t}, B_T) + \text{Cov}(B_{T-t}, B_{T-s}) \\ &= T - (T - s) - (T - t) + T - \max(t, s) = \min(t, s). \end{aligned}$$

5) Propriété de Markov faible (ou invariance par translation). Le mouvement brownien translaté de $t_0 > 0$ $\overline{B}_t^{(t_0)} = B_{t+t_0} - B_{t_0}$ est encore un mouvement brownien standard ; de plus, il est indépendant du mouvement brownien arrêté en t_0 $(B_t)_{0 \leq t \leq t_0}$, ie. $\overline{B}^{(t_0)} \perp \mathcal{F}_{t_0}^B := \sigma(B_s : s \leq t_0)$.

En effet, pour $t_0 \leq s \leq t$:

$$\begin{aligned} \text{Cov}(\overline{B}_t^{(t_0)}, \overline{B}_s^{(t_0)}) &= \text{Cov}(B_{t+t_0} - B_{t_0}, B_{s+t_0} - B_{t_0}) \\ &= K(t+t_0, s+t_0) - K(t+t_0, t_0) - K(t_0, s+t_0) + K(t_0, t_0) \\ &= s + t_0 - t_0 - t_0 + t_0 = s = \min(s, t). \end{aligned}$$

La deuxième partie est due à l'indépendance des accroissements de B : Soit $0 \leq s_1 < \dots < s_n \leq t_0$, par indépendance des accroissements de B , $\overline{B}_t^{(t_0)} = B_{t+t_0} - B_{t_0}$ est indépendant de $(B_{s_1}, B_{s_2} - B_{s_1}, \dots, B_{s_n} - B_{s_{n-1}})$, donc par transformation linéaire de $(B_{s_1}, \dots, B_{s_n})$. Cela est encore vrai pour tout vecteur de marginales de $\overline{B}^{(t_0)}$. On a donc $\overline{B}^{(t_0)}$ indépendant de $\{B_{s_1} \in A_1, \dots, B_{s_n} \in A_n\}$, $0 \leq s_1 < \dots < s_n \leq t_0$ et $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Comme la famille de tels ensembles est un π -système qui engendre $\mathcal{F}_{t_0}^B$, un argument de classes monotones assure $\overline{B}_t^{(t_0)} \perp \mathcal{F}_{t_0}^B = \sigma(B_t : t \leq t_0)$.

De la même façon, on montre que pour $t_1 < t_2$, $(B_{t_1+t_0} - B_{t_0}, B_{t_2+t_0} - B_{t_1+t_0})$ est indépendant de $\mathcal{F}_{t_0}^B$. Mais comme

$$(\overline{B}_{t_1}^{(t_0)}, \overline{B}_{t_2}^{(t_0)}) = (B_{t_1+t_0} - B_{t_0}, B_{t_2+t_0} - B_{t_0})$$

en est une image linéaire, cela reste donc vrai pour $(\overline{B}_{t_1}^{(t_0)}, \overline{B}_{t_2}^{(t_0)})$ et plus généralement pour toutes les lois fini-dimensionnelles de $\overline{B}^{(t_0)} : (\overline{B}_t^{(t_0)})_{t \geq 0} \perp \mathcal{F}_{t_0}^B$.

Conséquence : le processus $(B_t)_{t \geq 0}$ a donc le même comportement localement en 0 et en t_0 , donc en tout point.

Cette propriété se réécrit dans le cadre classique de la théorie de Markov : indépendance du futur et du passé conditionnellement au présent : en notant \mathbb{W}_x la loi du mouvement brownien issu de $x \in \mathbb{R}$, ie. de $x + B$ où B est un mouvement brownien habituel, on réécrit :

Proposition 3.14 (Propriété de Markov faible) *Soit $t \geq 0$ fixé. Posons $B'_s = B_{t+s}$, $x \in \mathbb{R}$. Alors conditionnellement à $B_t = x$, le processus B' est indépendant de $\sigma(B_u : u \leq t) = \mathcal{F}_t^B$ et a pour loi \mathbb{W}_x .*

Démonstration : Pour cela, il suffit de remarquer que $B'_s = \overline{B}_s^{(t)} + B_t$ où $\overline{B}_s^{(t)} = B_{t+s} - B_t$ est un mouvement brownien indépendant de \mathcal{F}_t^B et B_t est une variable \mathcal{F}_t^B -mesurable. \square

3.5 Propriétés trajectorielles du mouvement brownien

3.5.1 Loi du 0/1 de Blumenthal

On définit d'abord la notion de filtration en temps continu qui sera essentielle pour considérer les martingales au Chapitre 4.

Définition 3.15 (Filtration) *Une filtration sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est une famille $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ de sous-tribus telle que pour $s \leq t$, on a $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$.*

Si on considère un processus $(X_t)_{t \geq 0}$, on considère souvent la filtration qu'il engendre : $\mathcal{F}_t^X = \sigma(X_s : s \leq t)$. Dans ce cas, il est utile d'interpréter une filtration comme une quantité d'information disponible jusqu'à une date donnée : \mathcal{F}_t^X représente ainsi l'information véhiculée par le processus X jusqu'à la date t .

Une filtration est **\mathbb{P} -complète** pour une mesure de probabilité \mathbb{P} si \mathcal{F}_0 contient tous les événements de mesure nulle, ie. $\mathcal{N} = \{N \in \mathcal{F} \text{ tel que } \mathbb{P}(N) = 0\} \subset \mathcal{F}_0$.

À une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ on associe

$$\mathcal{F}_{t+} = \bigcap_{\varepsilon > 0} \mathcal{F}_{t+\varepsilon} \quad \text{et} \quad \mathcal{F}_{t-} = \bigvee_{\varepsilon > 0} \mathcal{F}_{t-\varepsilon}.$$

(On rappelle que $\mathcal{A} \vee \mathcal{B} = \sigma(\mathcal{A} \cup \mathcal{B})$.) La filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ est dite **continue à droite** (resp. **continue à gauche**) si pour tout t , on a $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t+}$ (resp. $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t-}$).

Dans la suite, on dira qu'une filtration satisfait les **conditions habituelles** si elle est complète et continue à droite.

Proposition 3.16 *La filtration brownienne $(\mathcal{F}_t^B)_{t \geq 0}$ est continue à droite.*

Corollaire 3.17 (Loi du 0/1 de Blumenthal) *La tribu \mathcal{F}_{0+}^B est triviale, ie. pour tout $A \in \mathcal{F}_{0+}^B$, on a $\mathbb{P}(A) = 0$ ou 1.*

Remarque 3.18 — En fait, la filtration brownienne est aussi continue à gauche : $\mathcal{F}_t^B = \bigvee_{s < t} \mathcal{F}_s^B$.

C'est le cas de toute filtration $(\mathcal{F}_t^X)_{t \geq 0}$ engendrée par un processus à trajectoires continues à gauche. En effet, \mathcal{F}_t^X est engendrée par les ensembles $A = \{(X_{t_1}, \dots, X_{t_p}) \in \Gamma\}$ avec $0 = t_1 < \dots < t_p \leq t$ et $\Gamma \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^p)$. Lorsque $t_p < t$ alors $A \in \mathcal{F}_{t_p}^X \subset \mathcal{F}_{t-}^X$. Lorsque $t_p = t$, comme $X_t = \lim_{m \rightarrow +\infty} X_{s_m}$ pour toute suite $s_m \in [0, t)$ avec $s_m \nearrow t$, on a $A \in \mathcal{F}_{t-}^X$. Finalement, $\mathcal{F}_{t-}^X = \mathcal{F}_t^X$.

- Une filtration $(\mathcal{F}_{t+})_{t \geq 0}$ est toujours continue à droite.
- Attention : si X est à trajectoires continues, $(\mathcal{F}_t^X)_{t \geq 0}$ peut ne pas être continue à droite, ni $(\mathcal{F}_{t+}^X)_{t \geq 0}$ à gauche, cf. contre-exemples p. 89 et 122 dans [KS].

Preuve de la continuité à droite de la filtration brownienne.

i) La tribu \mathcal{F}_{0+}^B est triviale (ie. Blumenthal).

On considère le processus X_n défini sur $[0, 2^{-n}]$ par $X_n = (B_{2^{-n}+t} - B_{2^{-n}}, 0 \leq t \leq 2^{-n})$. La suite $(X_n)_{n \geq 1}$ est une suite de processus indépendants (par l'indépendance des accroissements du mouvement brownien). On remarque que l'on peut retrouver la trajectoire brownienne à partir des X_k , $k \geq n$, par

$$B_{2^{-n}+t} = X_n(t) + \sum_{k=1}^{+\infty} X_{n+k}(2^{-n-k}), \quad 0 \leq t \leq 2^{-n}$$

car $B_{2^{-n}} \rightarrow 0$, $n \rightarrow +\infty$. Soit pour $t > 0$ et $2^{-p} \leq t < 2^{-p+1}$, en écrivant $t = 2^{-p} + s$, $s \in [0, 2^{-p}]$ (ie. $p = \lceil -t/\ln 2 \rceil + 1$) :

$$B_t = B_{2^{-p}+s} = X_p(t - 2^{-p}) + \sum_{k > p} X_k(2^{-k})$$

En particulier pour $0 < t \leq 2^{-n}$, on a $p \geq n$ et $B_t \in \sigma(X_{n+1}, \dots, X_{n+k}, \dots)$. On en déduit

$$\mathcal{F}_{2^{-n}}^B = \sigma(X_{n+1}, \dots, X_{n+k}, \dots)$$

et comme $\mathcal{F}_{0+}^B = \bigcap_{n \geq 0} \mathcal{F}_{2^{-n}}^B$, \mathcal{F}_{0+}^B est la tribu asymptotique engendrée par les processus indépendants X_n . D'après la loi du 0/1 (classique) de Kolmogorov, \mathcal{F}_{0+}^B est alors triviale.

i') **Autre preuve de la loi de Blumenthal.** Soit $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_k$, $g : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue bornée et aussi $A \in \mathcal{F}_{0+}^B$. Par continuité et convergence dominée, on a

$$\mathbb{E}[\mathbf{1}_A g(B_{t_1}, \dots, B_{t_k})] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbb{E}[\mathbf{1}_A g(B_{t_1} - B_\varepsilon, \dots, B_{t_k} - B_\varepsilon)].$$

Mais dès que $\varepsilon < t_1$, les variables aléatoires $B_{t_1} - B_\varepsilon, \dots, B_{t_k} - B_\varepsilon$ sont indépendantes de $\mathcal{F}_\varepsilon^B$ (par la propriété de Markov simple) et donc aussi de la tribu $\mathcal{F}_{0+}^B (= \bigcap_{\varepsilon > 0} \mathcal{F}_\varepsilon^B)$. Il vient

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\mathbf{1}_A g(B_{t_1}, \dots, B_{t_k})] &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbb{P}(A) \mathbb{E}[g(B_{t_1} - B_\varepsilon, \dots, B_{t_k} - B_\varepsilon)] \\ &= \mathbb{P}(A) \mathbb{E}[g(B_{t_1}, \dots, B_{t_k})]. \end{aligned}$$

On a donc $\mathcal{F}_{0+}^B \perp \sigma(B_{t_1}, \dots, B_{t_k})$. Comme c'est vrai pour tout $0 < t_1 < \dots < t_k$, on a aussi $\mathcal{F}_{0+}^B \perp \sigma(B_t, t > 0)$. Puis B_0 étant la limite simple de B_t (continuité de $t \mapsto B_t$ en 0), on a $\sigma(B_t, t \geq 0) = \sigma(B_t, t > 0)$ et $\mathcal{F}_{0+}^B \subset \sigma(B_t, t \geq 0)$, si bien que $\mathcal{F}_{0+}^B \perp \mathcal{F}_{0+}^B$, ce qui assure que \mathcal{F}_{0+}^B est triviale.

ii) Continuité à droite de la filtration brownienne (Prop. 3.16).

Pour $t \geq 0$ fixé, on montre $\mathcal{F}_{t+}^{(B)} = \mathcal{F}_t^{(B)}$ en prouvant que toute variable aléatoire $\mathcal{F}_{t+}^{(B)}$ -mesurable est $\mathcal{F}_t^{(B)}$ -mesurable. Pour cela, nous utilisons le théorème de classe monotone (version fonctionnelle)

Lemme 3.19 (Théorème de classe monotone fonctionnel) *Soit E un espace vectoriel fonctionnel monotone (ie. $f \in E$ est bornée, les constantes sont dans E , si $f_n \in E$ et $f_n \nearrow f$ bornée alors $f \in E$). On suppose que $C \subset E$ où C est un ensemble de fonctions stable par multiplication. Alors E contient toutes les fonctions $\sigma(C)$ -mesurables.*

On rappelle que $t \geq 0$ est fixé. On considère la tribu

$$\mathcal{G}_t = \sigma(B_{t+s} - B_t : s \geq 0).$$

On commence par prouver que \mathcal{G}_t est indépendante de \mathcal{F}_{t+}^B . Pour tout $n \geq 1$, par la propriété de Markov (faible), $\mathcal{G}_{t+1/n}$ est indépendante de $\mathcal{F}_{t+1/n}^B$ et donc indépendante de $\mathcal{F}_{t+}^B = \bigcap_{n \geq 1} \mathcal{F}_{t+1/n}^B$:

$$\mathcal{G}_{t+\varepsilon} \perp \mathcal{F}_{t+}^B. \quad (3.2)$$

Si $t_1 \leq t_2$, on observe que $\mathcal{G}_{t_2} \subset \mathcal{G}_{t_1}$ car

$$B_{t_2+s} - B_{t_2} = (B_{t_1+(t_2+s-t_1)} - B_{t_1}) - (B_{t_1+(t_2-t_1)} - B_{t_1})$$

s'exprime en fonction de deux variables \mathcal{G}_{t_1} -mesurables. La famille $(\mathcal{G}_{t+1/n})_{n \geq 1}$ est donc croissante avec n , de limite $\bigvee_{n \geq 1} \mathcal{G}_{t+1/n}$.

Par ailleurs, par continuité des trajectoires de B , pour tout $s \geq 0$,

$$B_{t+s} - B_t = \lim_{n \rightarrow +\infty} B_{t+s+1/n} - B_{t+1/n}.$$

Comme $B_{t+s+1/n} - B_{t+1/n}$ est $\mathcal{G}_{t+1/n}$ -mesurable donc $\bigvee_{n \geq 1} \mathcal{G}_{t+1/n}$ -mesurable, la limite $B_{t+s} - B_t$ l'est encore, ce qui justifie $\mathcal{G}_t \subset \bigvee_{n \geq 1} \mathcal{G}_{t+1/n}$ et donc $\mathcal{G}_t = \bigvee_{n \geq 1} \mathcal{G}_{t+1/n}$. Il suit alors de (3.2)

$$\mathcal{G}_t \perp \mathcal{F}_{t+}^B. \quad (3.3)$$

Ensuite, nous prouvons la Prop. 3.16 en montrant qu'une variable aléatoire \mathcal{F}_{t+}^B -mesurable est \mathcal{F}_t^B -mesurable. Quitte à écrire une telle variable Y sous la forme $Y^+ - Y^-$, il suffit de le faire pour une variable aléatoire Y positive. Quitte à écrire $Y = \lim_{n \rightarrow +\infty} (Y \wedge n)$, il suffit de le faire pour Y positive et bornée. On considère donc $Y \in L^\infty(\mathcal{F}_{t+}^B)$ positive.

L'argument qui suit utilise le théorème de classes monotones fonctionnel (Lemme 3.19) avec E l'espace des variables aléatoires bornées $W \in L^\infty(\mathcal{F})$ qui vérifie

$$\mathbb{E}[WY] = \mathbb{E}[W\mathbb{E}[Y | \mathcal{F}_t^{(B)}]].$$

Par le théorème de convergence monotone (avec $Y \geq 0$), on s'assure aisément que E est un espace vectoriel fonctionnel monotone.

Notons

$$\mathcal{M} = \{XZ : X \in L^\infty(\mathcal{F}_t^B) \text{ et } Z \in L^\infty(\mathcal{G}_t)\}.$$

On vérifie facilement que \mathcal{M} est une classe multiplicative. De plus $\mathcal{M} \subset E$ car avec (3.3), on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[XYZ] &= \mathbb{E}[XY] \mathbb{E}[Z] \quad (\text{car } \mathcal{F}_t^B \subset \mathcal{F}_{t+}^B \perp \mathcal{G}_t) \\ &= \mathbb{E}[X \mathbb{E}[Y | \mathcal{F}_t^B]] \mathbb{E}[Z] \quad (\text{par définition de l'espérance conditionnelle}) \\ &= \mathbb{E}[XZ \mathbb{E}[Y | \mathcal{F}_t^B]] \quad (\text{car } \mathcal{F}_t^B \perp \mathcal{G}_t). \end{aligned}$$

D'après le Lemme 3.19 (théorème fonctionnel de classe monotone), l'espace vectoriel E contient toutes les variables aléatoires bornées et mesurables par rapport à $\sigma(\mathcal{M})$.

Comme $\mathcal{F}_t^B \subset \mathcal{M}$ et $\mathcal{G}_t \subset \mathcal{M}$ (écrire $X \in \mathcal{F}_t^B$ et $Z \in \mathcal{G}_t$ sous les formes $X = X \times 1$ et $Z = 1 \times Z$), on a $\mathcal{F}_t^B \cup \mathcal{G}_t \subset \sigma(\mathcal{M})$ et donc $\mathcal{F}_t^B \vee \mathcal{G}_t \subset \sigma(\mathcal{M})$.

Mais $\mathcal{F}_t^B \vee \mathcal{G}_t = \mathcal{F}^B$ (tribu engendrée par tout le mouvement brownien) puisque si $s \leq t$, on a B_s variable aléatoire \mathcal{F}_t^B donc $(\mathcal{F}_t^B \vee \mathcal{G}_t)$ -mesurable et si $t < s$, on a $B_s = B_{t+(s-t)} - B_t + B_t$ avec $B_{t+(s-t)} - B_t$ variable aléatoire \mathcal{G}_t -mesurable et B_t variable aléatoire \mathcal{F}_t^B -mesurable donc B_s encore $(\mathcal{F}_t^B \vee \mathcal{G}_t)$ -mesurable.

Finalement, $\mathcal{F}^B \subset \sigma(\mathcal{M})$ et E contient $L^\infty(\mathcal{F}^B)$. Par conséquent, pour tout $W \in L^\infty(\mathcal{F}^B)$ on a

$$\mathbb{E}[WY] = \mathbb{E}[W \mathbb{E}[Y | \mathcal{F}_t^B]].$$

En particulier, cela exige $Y = \mathbb{E}[Y | \mathcal{F}_t^B]$ ps. Comme la tribu est complète, Y coïncide avec une variable \mathcal{F}_t^B -mesurable et $\mathcal{F}_t^B = \mathcal{F}_{t+}^B$. \square

3.5.2 Conséquences trajectorielles de la loi du 0/1 de Blumenthal

Proposition 3.20 (sup et inf browniens)

(1) On a ps pour tout $\varepsilon > 0$

$$\sup_{0 \leq s \leq \varepsilon} B_s > 0, \quad \inf_{0 \leq s \leq \varepsilon} B_s < 0.$$

(2) Pour tout $\eta > 0$, on a ps

$$\sup_{t \geq 0} B_t \geq \eta, \quad \inf_{t \geq 0} B_t \leq -\eta.$$

(3) Pour tout $a \in \mathbb{R}$, soit $T_a = \inf(t \geq 0 : B_t = a)$ (avec $\inf \emptyset = +\infty$). Alors ps $T_a < +\infty$.

(4) Par conséquent, presque sûrement

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} B_t = +\infty, \quad \liminf_{t \rightarrow +\infty} B_t = -\infty, \quad (3.4)$$

Remarque 3.21 — La mesurabilité de sup/inf est assurée par la continuité du mouvement brownien (si bien que le sup est un max, l'inf un min, donc sont mesurables).

- Comme les trajectoires du mouvement brownien sont continues et $\inf_{0 < t \leq \varepsilon} B_t < 0 < \sup_{0 < t \leq \varepsilon} B_t$, par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un zéro $t_\varepsilon \in]0, \varepsilon[$ de B . On en déduit que ps $\{t \geq 0 : B_t = 0\}$ admet 0 comme point d'accumulation.
- Par translation (Markov simple), toute valeur du mouvement brownien est un point d'accumulation de sa trajectoire ps.
- En utilisant la propriété de Markov simple, on constate aussi facilement que ps la fonction $t \mapsto B_t$ n'est monotone sur aucun intervalle non-trivial.

Démonstration : 1) Soit $(\varepsilon_p)_{p \geq 1}$ une suite de réels strictement positifs décroissants vers 0 et soit

$$A = \bigcap_{p \geq 1} \left\{ \sup_{0 \leq s \leq \varepsilon_p} B_s > 0 \right\}.$$

Comme $\sup_{0 \leq s \leq \varepsilon_p} B_s$ est $\mathcal{F}_{\varepsilon_p}^B$ -mesurable, on a $A \in \bigcap_{p \geq 1} \mathcal{F}_{\varepsilon_p}^B = \mathcal{F}_{0+}^B$. Puis, comme l'intersection définissant A est décroissante, on a

$$\mathbb{P}(A) = \lim_{p \rightarrow +\infty} \mathbb{P}\left(\sup_{0 \leq s \leq \varepsilon_p} B_s > 0\right)$$

mais comme

$$\mathbb{P}\left(\sup_{0 \leq s \leq \varepsilon_p} B_s > 0\right) \geq \mathbb{P}(B_{\varepsilon_p} > 0) = \frac{1}{2},$$

on a $\mathbb{P}(A) \geq 1/2$ et la loi de Blumenthal exige alors $\mathbb{P}(A) = 1$. Comme $A \subset \{\sup_{0 \leq t \leq \varepsilon} B_t > 0\}$, on a le résultat pour le sup. L'assertion concernant $\inf_{0 \leq s \leq \varepsilon} B_s$ est obtenue par symétrie en loi en remplaçant B par $-B$.

2) Par convergence monotone des probabilités, on a

$$1 = \mathbb{P}\left(\sup_{0 \leq s \leq 1} B_s > 0\right) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathbb{P}\left(\sup_{0 \leq s \leq 1} B_s > \delta\right).$$

Avec le changement $s = t\delta^2$, puis comme par autosimilarité $B_{\delta^2 t}/\delta$ définit encore un mouvement brownien,

$$\mathbb{P}\left(\sup_{0 \leq s \leq 1} B_s > \delta\right) = \mathbb{P}\left(\sup_{0 \leq t \leq 1/\delta^2} (B_{\delta^2 t}/\delta) > 1\right) = \mathbb{P}\left(\sup_{0 \leq s \leq 1/\delta^2} B_s > 1\right).$$

En faisant tendre $\delta \rightarrow 0$, par convergence monotone des probabilités, on obtient ainsi $\mathbb{P}(\sup_{s \geq 0} B_s > 1) = 1$. Puis, à nouveau, comme par autosimilarité, $B_{\eta^2 u}/\eta$ définit un mouvement brownien standard, pour tout $\eta > 0$, on a

$$\mathbb{P}\left(\sup_{s \geq 0} B_s > \eta\right) = \mathbb{P}\left(\sup_{u \geq 0} (B_{\eta^2 u}/\eta) > 1\right) = \mathbb{P}\left(\sup_{u \geq 0} B_u > 1\right) = 1.$$

Avec le changement $B \rightarrow -B$, on a aussi $\mathbb{P}(\inf_{s \geq 0} B_s < -\eta) = 1$.

3) Comme $\{T_a > t\} = \{\sup_{s \leq t} B_s < a\}$, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(T_a = +\infty) &= \mathbb{P}\left(\bigcap_{p \geq 1} \{T_a > p\}\right) = \lim_{p \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(T_a > p) = \lim_{p \rightarrow +\infty} \mathbb{P}\left(\sup_{s \leq p} B_s < a\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\bigcap_{p \geq 1} \left\{\sup_{s \leq p} B_s < a\right\}\right) = \mathbb{P}\left(\sup_{s \geq 0} B_s < a\right) = 0 \end{aligned}$$

d'après 2), si bien que $T_a < +\infty$ ps.

4) Puis la dernière assertion est une conséquence du fait qu'une fonction continue $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ ne peut visiter tous les réels que si $\limsup_{t \rightarrow +\infty} f(t) = +\infty$ et $\liminf_{t \rightarrow +\infty} f(t) = -\infty$. \square

Remarque 3.22 Le mouvement brownien oscille ps entre $+\infty$ et $-\infty$ lorsque $t \rightarrow +\infty$ mais avec une vitesse d'oscillation sous-linéaire puisque $|B_t/t| \rightarrow 0$, quand $t \rightarrow +\infty$.

En effet, il suffit de se rappeler par inversion du temps que $\tilde{B}_t = tB_{1/t}$ est encore un mouvement brownien. Si bien que $B_t/t = \tilde{B}_{1/t} \rightarrow \tilde{B}_0 = 0$ quand $t \rightarrow +\infty$ (on peut aussi justifier ce fait par la LGN).

3.5.3 Régularité trajectorielle brownienne

Proposition 3.23 *Le mouvement brownien $(B_t)_{t \geq 0}$ a des trajectoires ps localement höldériennes de tout ordre $\gamma \in]0, 1/2[$.*

En particulier, on montre qu'un processus gaussien centré de covariance $t \wedge s$ admet donc une modification à trajectoires continues, c'est à dire une version est un mouvement brownien.

Démonstration : En effet, on a

$$K(t, t) + K(s, s) - 2K(s, t) = t + s - 2\min(t, s) = |t - s|.$$

Donc le Théorème 2.7 (Kolmogorov-Čentsov dans le cas gaussien) s'applique avec $\alpha = C = 1$ pour B sur $[0, 1]$. Il donne l'existence de version avec la continuité höldérienne pour tout $\gamma < \alpha/2 = 1/2$. Comme le mouvement brownien et ces versions sont continues, elles sont toutes indistinguables. C'est bien le mouvement brownien qui a ces propriétés de régularité. Le résultat reste vrai pour B sur tout intervalle $[0, T]$ borné et on a donc la locale Hölder-régularité sur \mathbb{R}_+ . \square

Proposition 3.24 *En chaque $t \geq 0$, les trajectoires du mouvement brownien sont ps non dérivables.*

Démonstration : Par la propriété de translation (Markov simple), il suffit de montrer la non dérivabilité en 0, c'est à dire montrer que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{B_t - B_0}{t - 0} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{B_t}{t}$$

n'existe pas. Or par inversion du temps $B_t/t = \tilde{B}_{1/t}$ où \tilde{B} est encore un mouvement brownien. Mais d'après la Prop. 3.20 pour le mouvement brownien \tilde{B} (cf. (3.4)), on a

$$\limsup_{s \rightarrow +\infty} \tilde{B}_s = +\infty, \quad \liminf_{s \rightarrow +\infty} \tilde{B}_s = -\infty$$

avec $s = 1/t$, ce qui montre que la limite cherchée n'existe pas. \square

En fait, on a bien mieux : le résultat suivant montre que : *ps, les trajectoires browniennes sont nulle part dérivables.*

Théorème 3.25 (Dvoretzky, 1963) *Il existe une constante $C > 0$ telle que*

$$\mathbb{P} \left(\exists t > 0 : \limsup_{s \rightarrow t^+} \frac{|B_s - B_t|}{\sqrt{s - t}} < C \right) = 0. \quad (3.5)$$

Avant la preuve, on mentionne la conséquence concrète pour les trajectoires browniennes :

Corollaire 3.26 (Dvoretzky) *Presque sûrement, $t \mapsto B_t$ est dérivable nulle part.*

Démonstration : D'après le Th. 3.25, ps $\forall t \in [0, 1]$, $\limsup_{s \rightarrow t^+} \frac{|B_s - B_t|}{\sqrt{s - t}} \geq C > 0$. Soit t arbitrairement fixé. Si B était dérivable en t de dérivée ℓ , on aurait quand $s \searrow t$

$$\frac{|B_s - B_t|}{\sqrt{s - t}} = \frac{|B_s - B_t|}{s - t} \times \sqrt{s - t} \sim \ell \sqrt{s - t} \rightarrow 0,$$

ce qui contredit (3.5) donc B n'est pas dérivable en tout $t \in \mathbb{R}$. \square

3.6 Variation quadratique

Définition 3.27 (Variation) *Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$. On définit la α -variation de f par*

$$Var(f, \alpha) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{\{t_k\} : \rho(\{t_k\}) \leq \varepsilon} \sum_k |f(t_{k+1}) - f(t_k)|^\alpha$$

où $\rho(\{t_k\}) = \max_{1 \leq k \leq p} |t_k - t_{k-1}|$ est le pas de la subdivision de $[0, 1]$ et le sup est pris sur l'ensemble de ces subdivisions.

Pour $\alpha = 1$, on parle de la variation. On dit que f est à variations bornées si $Var(f, 1) < +\infty$. Pour $\alpha = 2$, on parle de la variation quadratique.

Remarque 3.28 Pour une fonction f de classe C^1 , la variation quadratique tend vers 0 sur tout intervalle $[0, t]$, en effet, avec une partition $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_p = t$, on a avec le théorème des accroissements finis :

$$\begin{aligned} V_f(t_0, t_1, \dots, t_p) &:= \sum_{j=1}^p (f(t_j) - f(t_{j-1}))^2 = \sum_{j=1}^p (f'(t_j^*)(t_j - t_{j-1}))^2 \\ &\leq \delta \|f'\|_\infty^2 \sum_{j=1}^p |t_j - t_{j-1}| = \delta \|f'\|_\infty^2 t \end{aligned}$$

où $t_j^* \in]t_{j-1}, t_j[$ est donné par le théorème des accroissements finis appliqué à la fonction dérivable f .

Proposition 3.29 (Variation quadratique brownienne) Soit $t > 0$ et $\{0 = t_0 < t_1 < \dots < t_p = t\}$ une subdivision de $[0, t]$, notons $V_B(t_0, t_1, \dots, t_p) = \sum_{j=1}^p (B_{t_j} - B_{t_{j-1}})^2$. Alors

- (1) $V_B(t_0, t_1, \dots, t_p)$ converge dans L^2 vers t lorsque le pas de la subdivision $\delta := \max_{1 \leq j \leq p} (t_j - t_{j-1})$ tend vers 0.
- (2) De plus, si la subdivision est uniforme, la convergence est presque sûre.

Heuristiquement : la variation quadratique du mouvement brownien sur $[0, t]$ est donc t .

Démonstration : Notons d'abord que le carré d'une variable gaussienne X centrée de variance σ^2 est une variable aléatoire d'espérance σ^2 et de variance $\text{Var}(X^2) = 3\sigma^4 - \sigma^4 = 2\sigma^4$ (calculs par ipp).

1) On a pour la convergence dans L^2 :

$$\mathbb{E}[(V_B(t_0, t_1, \dots, t_n) - t)^2] = \mathbb{E}\left[\left(\sum_{j=1}^n (B_{t_j} - B_{t_{j-1}})^2 - (t_j - t_{j-1})\right)^2\right] = \sum_{j=1}^n \text{Var}((B_{t_j} - B_{t_{j-1}})^2)$$

car les variables $(B_{t_j} - B_{t_{j-1}})^2 - (t_j - t_{j-1})$ sont centrées et indépendantes. On a donc

$$\mathbb{E}[(V_B(t_0, t_1, \dots, t_n) - t)^2] = 2 \sum_{j=1}^n (t_j - t_{j-1})^2 \leq 2t\delta \rightarrow 0, \quad \delta \rightarrow 0.$$

2) Notons $V_n := V_B(0, \frac{t}{n}, \dots, \frac{nt}{n})$. On a $V_n - t = \sum_{k=0}^{n-1} Y_{n,k}$ avec

$$Y_{n,k} = \left(B\left(\frac{(k+1)t}{n}\right) - B\left(\frac{kt}{n}\right) \right)^2 - \frac{t}{n}$$

L'indépendance des accroissements de B assure que les $Y_{n,k}$, $k = 0, \dots, n$, sont indépendantes puis la stationnarité des accroissements de B assure que ces variables aléatoires sont identiquement distribuées :

$$Y_{n,k} \stackrel{\mathcal{L}}{=} B\left(\frac{t}{n}\right)^2 - \frac{t}{n} \stackrel{\mathcal{L}}{=} \frac{t}{n} Z$$

avec $Z = B_1^2 - 1$ variable aléatoire centrée dont tous les moments sont finis. On a

- $\mathbb{E}[Y_{n,k}] = \mathbb{E}[Y_{n,0}] = \mathbb{E}[tZ/n] = 0;$
- $\mathbb{E}[Y_{n,k}^2] = \mathbb{E}[Y_{n,0}^2] = \mathbb{E}[t^2 Z^2/n^2] = (t^2/n^2) \mathbb{E}[Z^2];$
- $\mathbb{E}[Y_{n,k}^4] = \mathbb{E}[Y_{n,0}^4] = \mathbb{E}[Z^4/n^4] = (t^4/n^4) \mathbb{E}[Z^4].$

On utilise maintenant le Lemme 3.10 :

$$\mathbb{E} \left[\left(\sum_{k=0}^{n-1} Y_{n,k} \right)^4 \right] \leq C n^2 \mathbb{E}[Y_{n,0}^4].$$

Par l'inégalité de Markov, on a alors

$$\mathbb{P}(|V_n - t| \geq \delta_n) \leq \frac{\mathbb{E}[(\sum_{k=0}^{n-1} Y_{n,k})^4]}{\delta_n^4} \leq \frac{C n^2 \mathbb{E}[Z^4]}{n^4 \delta_n^4} = \frac{C'}{n^2 \delta_n^4}.$$

Avec le choix $\delta_n = 1/\ln n$, on a

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \mathbb{P}(|V_n - t| \geq \delta_n) < +\infty.$$

Le lemme de Borel-Cantelli s'applique et donne : ps, pour n assez grand on a $|V_n - t| \leq \delta_n \rightarrow 0$. D'où ps $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = t$. \square

Proposition 3.30 *Presque sûrement, les trajectoires du mouvement brownien sont à trajectoires à variations non bornées.*

Ce résultat justifie que, si les trajectoires browniennes sont continues, elles oscillent quand même beaucoup... tellement que les trajectoires sont ps à variations non bornées. Ce phénomène explique les difficultés qu'il y aura à construire une intégrale (de type Stieltjes) par rapport au mouvement brownien.

Démonstration : Il suffit de justifier la remarque générale suivante : si f est continue sur $[0, 1]$ et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \left| f\left(\frac{k+1}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right|^2 = a \in]0, +\infty[$$

alors $Var(f, 1) = +\infty$. Pour cela, supposons que $Var(f, 1) < +\infty$ et notons $\rho_f(u) = \sup_{|x-y|<u} |f(x) - f(y)|$ le module de continuité de f . Alors

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \left| f\left(\frac{k+1}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right|^2 &\leq \rho_f\left(\frac{1}{n}\right) \sum_{k=0}^n \left| f\left(\frac{k+1}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| \\ &\leq \rho_f\left(\frac{1}{n}\right) Var(f, 1) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

quand $n \rightarrow +\infty$ puisque par continuité de f : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \rho_f(1/n) = 0$. Il est donc nécessaire d'avoir $Var(f, 1) = +\infty$. \square

3.7 Propriété de Markov forte

Le but dans cette section est d'étendre la propriété de Markov simple (invariance par translation, cf. Prop. 3.14) au cas où l'instant déterministe s est remplacé par un temps aléatoire T . On commence par préciser la classe des temps aléatoires pour lesquels cela est possible.

3.7.1 Temps d'arrêt

Définition 3.31 (Temps d'arrêt) *Étant donné une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$, une variable aléatoire T à valeurs dans $[0, +\infty]$ est un temps d'arrêt si pour tout $t \geq 0$ on a $\{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t$.*

Les propriétés suivantes sont simples :

Proposition 3.32 *Soit T et S deux (\mathcal{F}_t) -temps d'arrêt alors $T \wedge S$ et $T \vee S$ sont des (\mathcal{F}_t) -temps d'arrêt.*

Démonstration : Cela vient facilement de pour $t \geq 0$:

$$\{T \wedge S \leq t\} = \{T \leq t\} \cup \{S \leq t\} \in \mathcal{F}_t$$

et

$$\{T \vee S \leq t\} = \{T \leq t\} \cap \{S \leq t\} \in \mathcal{F}_t$$

puisque S, T sont de (\mathcal{F}_t) -temps d'arrêt et la tribu \mathcal{F}_t est stable par intersection et réunion. \square

Proposition 3.33 *Si $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ est une filtration continue à droite alors T est un (\mathcal{F}_t) -temps d'arrêt si et seulement si pour tout $t \geq 0$, $\{T < t\} \in \mathcal{F}_t$.*

Démonstration : C'est suffisant car

$$\{T \leq t\} = \bigcap_{\varepsilon > 0} \{T < t + \varepsilon\} \in \bigcap_{\varepsilon > 0} \mathcal{F}_{t+\varepsilon} = \mathcal{F}_{t+} = \mathcal{F}_t.$$

Et c'est nécessaire car

$$\{T < t\} = \bigcup_{\varepsilon > 0} \{T \leq t - \varepsilon\} \in \mathcal{F}_t$$

puisque $\{T \leq t - \varepsilon\} \in \mathcal{F}_{t-\varepsilon} \subset \mathcal{F}_t$. \square

Cette proposition s'applique par exemple pour la filtration brownienne $\mathcal{F}^B = (\mathcal{F}_t^B)_{t \geq 0}$ (Prop. 3.16, généralisation de la loi de Blumenthal).

Proposition 3.34 *1. Si $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante de (\mathcal{F}_t) -temps d'arrêt alors $T = \lim_{n \rightarrow +\infty} T_n$ est un (\mathcal{F}_t) -temps d'arrêt.*

2. Si $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite décroissante de (\mathcal{F}_t) -temps d'arrêt alors $T = \lim_{n \rightarrow +\infty} T_n$ est un (\mathcal{F}_{t+}) -temps d'arrêt.

Démonstration : 1) Soit $T_n \nearrow T$ alors pour tout $t \geq 0$:

$$\{T \leq t\} = \bigcap_{n \geq 1} \{T_n \leq t\} \in \mathcal{F}_t$$

2) Soit $T_n \searrow T$ alors pour tout $t \geq 0$:

$$\{T < t\} = \bigcup_{n \geq 1} \{T_n < t\}.$$

Mais

$$\{T_n < t\} = \bigcup_{p \geq 1} \{T_n \leq t - 1/p\} \in \mathcal{F}_t$$

puisque $\{T_n \leq t - 1/p\} \in \mathcal{F}_{t-1/p} \subset \mathcal{F}_t$. On a donc $\{T < t\} \in \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}_{t+}$ ce qui suffit d'après la Prop. 3.33 puisque \mathcal{F}_{t+} est continue à droite. \square

Exemple 3.35 1. Un temps $T = t$ (constant) est un temps d'arrêt.

2. Un temps d'atteinte $T_a := \inf (t \geq 0 : B_t = a)$ est un temps d'arrêt pour la filtration brownienne \mathcal{F}^B .

En effet, $\{T_a \leq t\} = \{\sup_{0 \leq s \leq t} B_s \geq a\} = \bigcup_{s \in [0, t] \cap \mathbb{Q}} \{B_s \geq a\} \in \mathcal{F}_t$ pour $a \geq 0$.

3. En revanche, $T = \sup (s \geq 1 : B_s = 0)$ n'est pas un temps d'arrêt.

4. Soit O un ouvert alors $T_O = \inf (t \geq 0 : B_t \in O)$ est un (\mathcal{F}_t) -temps d'arrêt si la filtration est continue à droite.

En effet :

$$\begin{aligned} \{T_O < t\} &= \{\exists s < t : B_s \in O\} = \{\exists s \in [0, t] \cap \mathbb{Q} : B_s \in O\} \quad (\text{trajectoires continues}) \\ &= \bigcup_{s \in [0, t] \cap \mathbb{Q}} \{B_s \in O\} \in \bigvee_{s \in [0, t] \cap \mathbb{Q}} \mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t. \end{aligned}$$

Comme la filtration est continue à droite, $\{T_O < t\} \in \mathcal{F}_t$ suffit, cf. Prop. 3.33.

5. Soit F un fermé alors $T_F = \inf (t \geq 0 : B_t \in F)$ est un (\mathcal{F}_t) -temps d'arrêt.

En effet :

$$\begin{aligned} \{T_F \leq t\} &= \{\omega \in \Omega : \inf_{0 \leq s \leq t} d(B_s(\omega), F) = 0\} \\ &= \{\omega \in \Omega : \inf_{s \in [0, t] \cap \mathbb{Q}} d(B_s(\omega), F) = 0\} \end{aligned}$$

car B est à trajectoires continues et donc la distance aussi. Par ailleurs, un inf dénombrable de fonctions mesurables reste mesurable. Par conséquent, $\{T_F \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ et T_F est bien un (\mathcal{F}_t) -temps d'arrêt.

Définition 3.36 (Temps d'arrêt simple) Soit T un (\mathcal{F}_t) -temps d'arrêt. On dit que T est un (\mathcal{F}_t) -temps d'arrêt simple si l'ensemble des valeurs prises par T est au plus dénombrable, ie. il existe une suite $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de temps positifs dans $\overline{\mathbb{R}}$ telle que $\sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(T = t_n) = 1$.

Proposition 3.37 (Approximation de temps d'arrêt) Soit T un (\mathcal{F}_t) -temps d'arrêt. Alors il existe une suite décroissante $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de (\mathcal{F}_t) -temps d'arrêt simples tels que $T_n \searrow T$ ps.

Cf. aussi Prop. 4.11 du Chapitre 4.

Démonstration : On pose $T_n = ([T2^n] + 1)2^{-n}$ sur $\{T < +\infty\}$, ie. $T_n = (j + 1)2^{-n}$ sur l'évènement $\{T \in [j2^{-n}, (j + 1)2^{-n}[$ et $T_n = +\infty$ sur $\{T = +\infty\}$. On vérifie que T_n est un (\mathcal{F}_t) -temps d'arrêt :

$$\begin{aligned} \{T_n \leq t\} &= \bigcup_{j=0}^{p-1} \{T_n = (j + 1)2^{-n}\} \quad \text{avec } p2^{-n} \leq t < (p + 1)2^{-n} \\ &= \bigcup_{j=0}^{p-1} \{T \in [j2^{-n}, (j + 1)2^{-n}[\} \\ &= \{T \in [0, p2^{-n}[\} \in \mathcal{F}_{p2^{-n}} \subset \mathcal{F}_t \end{aligned}$$

où on a utilisé $\{T < p2^{-n}\} = \bigcup_{\varepsilon > 0} \{T \leq p2^{-n} - \varepsilon\} \in \mathcal{F}_{p2^{-n}}$. Puis, par construction, on a facilement $T_n \rightarrow T$ ps et $T_n \geq T$. La suite $(T_n)_{n \geq 1}$ décroît car si $T_n = (p + 1)2^{-n}$, c'est que

$$T \in [p2^{-n}, (p + 1)2^{-n}[= [(2p)2^{-n-1}, (2p + 1)2^{-n-1}[\cup [(2p + 1)2^{-n-1}, (2p + 2)2^{-n-1}[,$$

et $T_{n+1} = (2p + 1)2^{-n-1}$ (si $(2p)2^{-n-1} \leq T < (2p + 1)2^{-n-1}$) ou $T_{n+1} = (2p + 2)2^{-n-1}$ (si $(2p + 1)2^{-n-1} \leq T < (2p + 2)2^{-n-1}$), c'est à dire $T_{n+1} \leq T_n$. On a donc $T_n \searrow T$. \square

Définition 3.38 Soit T un temps d'arrêt. La tribu des évènements antérieurs à T est

$$\mathcal{F}_T = \left\{ A \in \mathcal{F}_\infty : \forall t \geq 0, A \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t \right\}.$$

Si $T = t$ est déterministe, alors $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}_t$.

Proposition 3.39 Soit T un temps d'arrêt fini ps. Les variables aléatoires T et B_T sont \mathcal{F}_T -mesurables.

Démonstration : Il s'agit de voir que pour tout $s \geq 0$, $T^{-1}(] - \infty, s]) = \{T \leq s\} \in \mathcal{F}_T$. Pour cela, soit $t \geq 0$, on a

$$\{T \leq s\} \cap \{T \leq t\} = \{T \leq t \wedge s\} \in \mathcal{F}_{t \wedge s} \subset \mathcal{F}_t$$

en utilisant le fait que T est un temps d'arrêt. Pour B_T , il suffit de remarquer que par continuité presque sûre des trajectoires

$$B_T = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=0}^{+\infty} \mathbf{1}_{\{i2^{-n} < T \leq (i+1)2^{-n}\}} B_{i2^{-n}}$$

puis que $B_s \mathbf{1}_{\{s < T\}}$ est \mathcal{F}_T -mesurable. En effet pour tout $u \in \mathbb{R}$, on montre que $\{B_s \mathbf{1}_{\{s < T\}} \leq u\} \in \mathcal{F}_T$. Pour cela, on établit que, pour tout $t \geq 0$, $\{B_s \mathbf{1}_{\{s < T\}} \leq u\} \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t$.

- si $t < s$ alors $\{B_s \mathbf{1}_{\{s < T\}} \leq u\} \cap \{T \leq t\} = \{0 \leq u\} \cap \{T \leq t\} = (\emptyset \text{ ou } \Omega) \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t$;
- si $t \geq s$ alors $\{B_s \mathbf{1}_{\{s < T\}} \leq u\} \cap \{T \leq t\} = (\{B_s \leq u\} \cap \{s < T \leq t\}) \cup (\{0 \leq u\} \cap \{T \leq s\})$ mais $\{B_s \leq u\} \in \mathcal{F}_s$ et $\{s < T \leq t\} = \{T \leq s\}^c \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ et $\{T \leq s\} \in \mathcal{F}_s$.

□

Cette notion est développée en Section 4.2, en particulier les relations entre les diverses filtrations \mathcal{F}_T (Prop. 4.9).

3.7.2 Propriété de Markov

Le résultat suivant généralise la Prop. 3.14 à un changement de temps donné par un temps d'arrêt.

Théorème 3.40 (Propriété de Markov forte) *Soit T un temps d'arrêt. Alors conditionnellement à $\{T < +\infty\}$, le processus $B^{(T)}$ défini par*

$$B_t^{(T)} = B_{T+t} - B_T$$

est un mouvement brownien indépendant de \mathcal{F}_T .

Démonstration : On suppose d'abord que $T < +\infty$ ps. On prouve alors la propriété de Markov en montrant que pour $A \in \mathcal{F}_T$, $0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_p$ et F une fonction continue bornée sur \mathbb{R}^p , on a

$$\mathbb{E}[\mathbf{1}_A F(B_{t_1}^{(T)}, \dots, B_{t_p}^{(T)})] = \mathbb{P}(A) \mathbb{E}[F(B_{t_1}, \dots, B_{t_p})]. \quad (3.6)$$

En effet, avec $A = \Omega$, on obtient que $B^{(T)}$ a les mêmes lois fini-dimensionnelles que B et il est facile de voir que $B^{(T)}$ a des trajectoires presque sûrement continues. Autrement dit $B^{(T)}$ est un mouvement brownien. Puis pour A quelconque, (3.6) assure que pour tout choix $0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_p$, le vecteur $(B_{t_1}^{(T)}, \dots, B_{t_p}^{(T)})$ est indépendant de \mathcal{F}_T , d'où par un argument de classe monotone $B^{(T)} \perp \mathcal{F}_T$.

Pour montrer (3.6), on écrit, par continuité presque sûre des trajectoires de B :

$$F(B_{t_1}^{(T)}, \dots, B_{t_p}^{(T)})$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{1}_{\{(k-1)2^{-n} < T \leq k2^{-n}\}} F(B_{k2^{-n}+t_1} - B_{k2^{-n}}, \dots, B_{k2^{-n}+t_p} - B_{k2^{-n}}).$$

Comme F est bornée, par convergence dominée, il vient :

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}[\mathbf{1}_A F(B_{t_1}^{(T)}, \dots, B_{t_p}^{(T)})] \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{E}[\mathbf{1}_A \mathbf{1}_{\{(k-1)2^{-n} < T \leq k2^{-n}\}} F(B_{k2^{-n}+t_1} - B_{k2^{-n}}, \dots, B_{k2^{-n}+t_p} - B_{k2^{-n}})]. \end{aligned}$$

Pour $A \in \mathcal{F}_T$, l'évènement $A \cap \{(k-1)2^{-n} < T \leq k2^{-n}\} = A \cap \{T \leq k2^{-n}\} \cap \{T \leq (k-1)2^{-n}\}^c$ est $\mathcal{F}_{(k2^{-n})}$ -mesurable donc par la propriété de Markov simple (Prop. 3.14), on a

$$(B_{k2^{-n}+t_1} - B_{k2^{-n}}, \dots, B_{k2^{-n}+t_p} - B_{k2^{-n}}) \perp\!\!\!\perp \sigma(B_r : r \leq k2^{-n})$$

et donc

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}[\mathbf{1}_A \mathbf{1}_{\{(k-1)2^{-n} < T \leq k2^{-n}\}} F(B_{k2^{-n}+t_1} - B_{k2^{-n}}, \dots, B_{k2^{-n}+t_p} - B_{k2^{-n}})] \\ &= \mathbb{P}(A \cap \{(k-1)2^{-n} < T \leq k2^{-n}\}) \mathbb{E}[F(B_{k2^{-n}+t_1} - B_{k2^{-n}}, \dots, B_{k2^{-n}+t_p} - B_{k2^{-n}})] \\ &= \mathbb{P}(A \cap \{(k-1)2^{-n} < T \leq k2^{-n}\}) \mathbb{E}[F(B_{t_1}, \dots, B_{t_p})] \end{aligned}$$

puisque par stationnarité des accroissements de B :

$$(B_{k2^{-n}+t_1} - B_{k2^{-n}}, \dots, B_{k2^{-n}+t_p} - B_{k2^{-n}}) \sim (B_{t_1}, \dots, B_{t_p}).$$

Finalement, on obtient (3.6) en sommant sur $k \in \mathbb{N}$.

Lorsque $\mathbb{P}(T = +\infty) > 0$, on obtient de la même façon

$$\mathbb{E}[\mathbf{1}_{A \cap \{T < +\infty\}} F(B_{t_1}^{(T)}, \dots, B_{t_p}^{(T)})] = \mathbb{P}(A \cap \{T < +\infty\}) \mathbb{E}[F(B_{t_1}, \dots, B_{t_p})]$$

et le résultat cherché suit. \square

3.7.3 Principe de réflexion

Une application importante de la propriété de Markov forte est le principe de réflexion.

Théorème 3.41 (Principe de réflexion) *Pour tout $t > 0$, notons $S_t = \sup_{s \leq t} B_s$. Alors si $a \geq 0$ et $b \leq a$ on a*

$$\mathbb{P}(S_t \geq a, B_t \leq b) = \mathbb{P}(B_t \geq 2a - b). \quad (3.7)$$

En particulier, pour chaque $t \geq 0$,

$$S_t \sim |B_t|. \quad (3.8)$$

Remarque 3.42 — À chaque trajectoire brownienne dépassant le seuil a et terminant en deçà de $b \leq a$, on peut associer la trajectoire brownienne (fictive) obtenue par symétrie autour de la droite $y = a$ à partir de la date $\inf(t \geq 0 : B_t = a)$. Cette trajectoire termine alors au delà de $2a - b$. Il y a ainsi une "bijection" entre les trajectoires browniennes vérifiant $\{S_t \geq a, B_t < b\}$ et celles vérifiant $\{B_t \geq 2a - b\}$. Le principe de réflexion (3.7) est une formalisation de cette "bijection".

[Dessin typique illustrant le principe de réflexion].

- Le principe (3.7) implique que pour $\forall t \geq 0$, $S_t \stackrel{L}{=} |B_t|$. Toutefois, **attention** : l'égalité tient pour les marginales mais ne s'étend pas aux processus : l'un est croissant, l'autre pas.

Démonstration : Il s'agit d'appliquer la propriété de Markov forte au temps d'arrêt $T_a = \inf(t \geq 0 : B_t = a)$. On a déjà vu que $T_a < +\infty$ ps. On a aussi

$$\mathbb{P}(S_t \geq a, B_t \leq b) = \mathbb{P}(T_a \leq t, B_t \leq b) = \mathbb{P}\left(T_a \leq t, B_{t-T_a}^{(T_a)} \leq b - a\right)$$

puisque $B_{t-T_a}^{(T_a)} = B_{t-T_a+T_a} - B_{T_a} = B_t - a$. Pour simplifier, notons $B' = B^{(T_a)}$. Le Théorème 3.40 (propriété de Markov forte) assure que B' est un mouvement brownien indépendant de \mathcal{F}_{T_a} , donc de T_a . Comme B' a même loi que $-B'$, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(T_a \leq t, B_{t-T_a}^{(T_a)} \leq b - a\right) &= \int_0^t \mathbb{P}(B'_{t-u} \leq b - a) \mathbb{P}_{T_a}(du) = \int_0^t \mathbb{P}(-B'_{t-u} \leq b - a) \mathbb{P}_{T_a}(du) \\ &= \int_0^t \mathbb{P}(B'_{t-u} \geq a - b) \mathbb{P}_{T_a}(du) = \mathbb{P}\left(T_a \leq t, B_{t-T_a}^{(T_a)} \geq a - b\right) \\ &= \mathbb{P}(T_a \leq t, B_t - a \geq a - b) \\ &= \mathbb{P}(B_t \geq 2a - b) \end{aligned}$$

car l'évènement $\{B_t \geq 2a - b\}$ est contenu dans $\{T_a \leq t\}$ ($b \leq a$ implique $2a - b \geq a$).

Pour (3.8), on utilise le principe de réflexion et la symétrie (en loi) du mouvement brownien :

$$\mathbb{P}(S_t \geq a) = \mathbb{P}(S_t \geq a, B_t \geq a) + \mathbb{P}(S_t \geq a, B_t < a).$$

Comme $\{B_t \geq a\} \subset \{S_t \geq a\}$, on a $\mathbb{P}(S_t \geq a, B_t \geq a) = \mathbb{P}(B_t \geq a)$. Puis le principe de réflexion (3.7) avec $a = b$ donne

$$\mathbb{P}(S_t \geq a, B_t < a) = \mathbb{P}(B_t \geq a) = \mathbb{P}(-B_t \geq a) = \mathbb{P}(B_t \leq -a)$$

en utilisant la symétrie de B . Finalement,

$$\mathbb{P}(S_t \geq a) = \mathbb{P}(|B_t| \geq a),$$

ce qui prouve (3.8). □

Remarque 3.43 On déduit facilement du principe de réflexion que le temps d'atteinte $T_a = \inf(t \geq 0 : B_t = a)$ d'un mouvement brownien du niveau a n'est pas déterministiquement borné : pour tout $C > 0$, on a

$$\mathbb{P}(T_a \leq C) = \mathbb{P}\left(\sup_{t \in [0, C]} B_t \geq a\right) = \mathbb{P}(|B_C| \geq a) = 2\mathbb{P}(N \geq a/C^2) < 1 \quad (3.9)$$

où $N \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Cependant $T_a < +\infty$ ps puisque $\lim_{C \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(T_a > C) = \lim_{C \rightarrow +\infty} 2\mathbb{P}(N < a/C^2) = 0$.

Soit Z une variable aléatoire réelle. Un processus $(X_t, t \geq 0)$ est appelé mouvement brownien réel issu de Z si on peut écrire $X_t = Z + B_t$ où B est un mouvement brownien issu de 0 indépendant de Z .

3.8 Équation de la chaleur

Cette section reprend la présentation de cette équation par [\[EGK\]](#).

3.8.1 Origine physique

L'équation de la chaleur est l'EDP qui décrit la propagation de la chaleur en donnant la température $T(t, x)$ dans un milieu en fonction du temps t et du lieu x .

Le flux d'énergie thermique J qui traverse une surface unitaire par unité de temps est donné par la loi de Fourier :

$$J = -k \frac{\partial T}{\partial x}$$

où k est le coefficient de conductivité thermique du milieu (en $\text{mkgs}^{-3}\text{K}^{-1}$). Cette loi stipule qu'une différence de température engendre un flux d'énergie dans la direction des températures décroissantes.

Si on calcule le gain d'énergie par unité de temps d'un volume d'épaisseur dx et de section S , on remarque que cette puissance est égale à la différence entre le flux entrant et le flux sortant :

$$P = J(x)S - J(x + dx)S \quad \text{c'est à dire} \quad P = -\frac{\partial J}{\partial x} S dx.$$

Cette puissance assimilée à cet élément de volume $S dx$ est supposée élever sa température T . On pose une relation linéaire simple

$$P = cm \frac{\partial T}{\partial t}$$

où c est la chaleur spécifique de la matière considérée. Comme $m = \rho S dx$ (où ρ est la masse volumique du milieu), on a alors

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{\partial J}{\partial x}$$

qui est l'équation de continuité d'un flux thermique d'énergie. En la combinant avec la loi de Fourier, on obtient l'équation de la chaleur

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{k}{\rho c} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}.$$

Cette EDP se généralise facilement en dimension supérieure.

3.8.2 Origine mathématique

Les premières propriétés du mouvement brownien mises en évidence par Bachelier et Einstein concernent le lien entre la loi du mouvement brownien issu de x et l'équation de la chaleur. On note $p_t(x, \cdot)$ la densité de la variable aléatoire qui modélise le phénomène $x + B_t$ à la date t et qui part de x à la date 0. Par stationnarité du phénomène, $p_t(x, y)$ ne dépend de x, y que par la différence $y - x$. Puis, ces auteurs déduisent de la propriété d'accroissements indépendants que la densité $p_t(x, \cdot)$ de la loi de $x + B_t$ (qui n'est pas supposée gaussienne a priori) vérifie l'équation de convolution

$$\int_{\mathbb{R}} p_t(x, y) p_h(y, z) dy = p_{t+h}(x, z). \quad (3.10)$$

En effet, on écrit $x + B_{t+h} = x + B_t + B_{t+h} - B_t$ et on note que

- $B_t = B_t - B_0$ est indépendant de $B'_h = B_{t+h} - B_t$,
- si $x + B_t = y$, la loi de $x + B_t + B_{t+h} - B_t$ est la même que celle de $y + \tilde{B}_h$ de densité $p_h(y, \cdot)$,
- on récupère la densité du tout, en intégrant par rapport à la loi de $x + B_t$ de densité $p_t(x, \cdot)$.

Bachelier conclut en montrant que l'équation (3.10) est vérifiée par les fonctions de la forme $A_t e^{-\pi A_t^2 x^2}$ pour lesquelles A_t^2 est proportionnelle au temps t . Il n'envisage pas a priori d'autre type de fonctions. Ce résultat montre la grande généralité des situations qui peuvent être modélisées par un mouvement brownien.

Revenons à la densité gaussienne

$$g(t, x, y) := g(t, y - x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{(y - x)^2}{2t}\right)$$

qui traduit que $x + B_{t+h}$ est la somme des variables gaussiennes indépendantes $x + B_t$ et $B_{t+h} - B_t$. Un calcul direct montre que le noyau gaussien est solution de l'équation de la chaleur, c'est à dire de l'EDP

$$\begin{cases} g'_t(t, x, y) &= \frac{1}{2} g''_{yy}(t, x, y) \\ g'_t(t, x, y) &= \frac{1}{2} g''_{xx}(t, x, y). \end{cases} \quad (3.11)$$

La densité gaussienne standard satisfait donc l'équation de la chaleur par rapport aux variables x et y . Cette propriété est étendue à une vaste classe de fonctions construites à partir du mouvement brownien.

Théorème 3.44 1. *Considérons la fonction*

$$u(t, x, f) = \mathbb{E}[f(x + B_t)] = \int_{\mathbb{R}} g(t, x, y) f(y) dy$$

où f est une fonction borélienne bornée. La fonction u est C^∞ en espace et en temps pour $t > 0$ et vérifie l'équation de la chaleur

$$u'_t(t, x, f) = \frac{1}{2} u''_{xx}(t, x, f), \quad u(0, x) = f(x). \quad (3.12)$$

2. *Lorsque le point de départ du mouvement X_0 est aléatoire avec une loi de densité $\pi(x)$, indépendante du mouvement brownien, la densité de la loi de $X_0 + B_t$ est égale à $q(t, y) = \int_{\mathbb{R}} g(t, y - x) \pi(x) dx$ et vérifie l'équation de la chaleur*

$$q'_t(t, y) = \frac{1}{2} q''_{yy}(t, y), \quad q(0, y) = \pi(y).$$

Démonstration : 1) La fonction $u(t, x, f) = \mathbb{E}[f(x + B_t)] = \int_{\mathbb{R}} g(t, x, y) f(y) dy$ est très régulière pour $t > 0$, car la densité gaussienne (le noyau de la chaleur) est C^∞ , à dérivées bornées pour $t > 0$. Par dérivation sous le signe intégral, on a aisément :

$$u'_t(t, x, f) = \int_{\mathbb{R}} g'_t(t, x, y) f(y) dy, \quad u''_{xx}(t, x) = \int_{\mathbb{R}} g''_{xx}(t, x, y) f(y) dy.$$

L'équation de la chaleur (3.12) pour $u(t, \cdot, f)$ suit alors facilement de celle pour $g(t, x, y)$.

2) Supposons que la condition initiale soit aléatoire et indépendante du mouvement brownien et donc de B_t . La loi de $X_0 + B_t$ admet une densité qui est la convolée de $\pi(x)$ et de $g(t, x)$. \square

La formule précédente peut être étendue sous certaines conditions à d'autres fonctions que les fonctions bornées, par exemple pour les fonctions $f(x) = e^{\lambda x}$, $\lambda > 0$. La fonction $u(t, x, e^\lambda)$ est la transformée de Laplace de $x + B_t$. Des calculs gaussiens (classiques) montrent que

$$u(t, x, e^\lambda) = \mathbb{E}[e^{\lambda(x+B_t)}] = e^{\lambda x + \frac{1}{2} \lambda^2 t}.$$

Lorsque la fonction considérée est régulière, une autre formulation peut être donnée à cette relation qui jouera un rôle important dans la suite :

Proposition 3.45 *Si f est une fonction C_b^1 en temps et C_b^2 en espace (c'est à dire à dérivées bornées en temps et en espace), on a*

$$u'_t(t, x, f) = u(t, x, f'_t + \frac{1}{2} f''_{xx})$$

soit, en intégrant, sous une forme probabiliste :

$$\mathbb{E}[f(t, x + B_t)] = f(0, x) + \int_0^t \mathbb{E}\left[\frac{1}{2} f''_{xx}(s, x + B_s) + f'_t(s, x + B_t)\right] ds. \quad (3.13)$$

Démonstration : On représente la fonction $u(t, x, f)$ de la façon suivante

$$u(t, x, f) = \mathbb{E}[f(t, x + B_t)] = \int_{\mathbb{R}} g(t, y) f(t, x + y) dy = \int_{\mathbb{R}} g(t, x, z) f(t, z) dz$$

où $g(t, y)$ est la densité de $B_t \sim \mathcal{N}(0, t)$ et $g(t, x, z) = g(t, z - x)$ est la densité de $x + B_t \sim \mathcal{N}(x, t)$. Par convergence dominée, on dérive sous le signe intégral, pour une fonction f deux fois dérivable, à dérivées bornées.

$$\begin{aligned} u''_{xx}(t, x, f) &= \int_{\mathbb{R}} g(t, y) f''_{xx}(t, x + y) dy = u(t, x, f''_{xx}) \\ &= \int_{\mathbb{R}} g''_{xx}(t, x, z) f(t, z) dz \quad (\text{avec deux ipp}) \\ u'_t(t, x, f) &= \int_{\mathbb{R}} g(t, x, z) f'_t(t, z) dz + \int_{\mathbb{R}} g'_t(t, x, z) f(t, z) dz \\ &= u(t, x, f'_t) + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} g''_{xx}(t, x, z) f(t, z) dz = u(t, x, f'_t) + \frac{1}{2} u(t, x, f''_{xx}) \end{aligned}$$

en utilisant que g satisfait l'équation de la chaleur. Pour avoir l'équation intégrale (3.13), il suffit d'intégrer par rapport à t et d'explicitier les fonctions $u(t, x, f'_t)$ et $u(t, x, f''_{xx})$ comme des espérances. \square

Le mouvement brownien décentré $X_t^x = x + bt + \sigma B_t$ joue un rôle important dans les applications. Les équations aux dérivées partielles (EDP) précédentes s'étendent sans difficulté à partir de l'EDP satisfaite par la densité de X_t^x

$$g_{b, \sigma^2}(t, x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} \exp\left(-\frac{(y - x - bt)^2}{2\sigma^2 t}\right) = g(\sigma^2 t, x + bt, y) = g(\sigma^2 t, x, y - bt).$$

Nous introduisons le **générateur** associé à ce processus, c'est à dire l'opérateur du 2nd ordre défini par

$$L_{b, \sigma^2} \phi(x) = \frac{1}{2} \sigma^2 \phi''_{xx}(x) + b \phi'_x(x).$$

Puisque $g(t, x, y)$ satisfait l'équation de la chaleur, la fonction $x \mapsto g_{b, \sigma^2}(t, x, y)$ vérifie

$$\begin{aligned} \partial_t g_{b, \sigma^2}(t, x, y) &= \frac{1}{2} \sigma^2 g''_{xx}(\sigma^2 t, x + bt, y) + b g'_x(\sigma^2 t, x + bt, y) \\ &= L_{b, \sigma^2} g_{b, \sigma^2}(t, x, y). \end{aligned} \tag{3.14}$$

Dans ce contexte, l'équation (3.14) remplace l'équation de la chaleur (3.11).

Proposition 3.46 1. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Les fonctions $u(t, x, f) = \mathbb{E}[f(x + bt + \sigma B_t)] = \int_{\mathbb{R}} g_{b, \sigma^2}(t, x, y) f(y) dy$ satisfont l'EDP

$$\begin{cases} u'_t(t, x, f) &= L_{b, \sigma^2} u(t, x, f) = \frac{1}{2} \sigma^2 u''_{xx}(t, x, f) + b u'_x(t, x, f) \\ u(0, x, f) &= f(x). \end{cases} \tag{3.15}$$

2. De plus, si $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de classe C_b^1 en temps sur $\mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$ et C_b^2 en espace, alors

$$\mathbb{E}[f(t, X_t^x)] = f(0, x) + \int_0^t \mathbb{E}[L_{b, \sigma^2} f(s, X_s^x) + f'_t(s, X_s^x)] ds. \quad (3.16)$$

Démonstration : L'équation (3.15) s'obtient en intégrant par rapport à $f(y)dy$ l'EDP satisfaite par la densité $g_{b, \sigma^2}(t, x, y)$ considérée comme fonction de x . Puis (3.16) suit avec des intégrations par parties comme précédemment. \square

Remarque 3.47 La représentation de la solution de l'équation de la chaleur comme $\mathbb{E}[f(x + B_t)]$ montre que la trajectoire brownienne joue pour cette équation le même rôle que les caractéristiques, solutions d'équations différentielles du premier ordre, pour la résolution des EDP du premier ordre. L'équation (3.15) montre que ce résultat peut être étendu aux EDP elliptiques à coefficients constants à condition de se référer à un MB décentré.

Un objectif important est de passer de cette formule, vraie en moyenne (en espérance), à une formule trajectorielle. Cette étape a été amorcée par Paul Lévy dans les années 30 et complétée par Kiyoshi Itô dans les années 50. Plus précisément, Itô interprète la quantité

$$T_t(f) = f(t, x + B_t) - f(0, x) - \int_0^t \frac{1}{2} f''_{xx}(s, x + B_s) + f'_t(s, x + B_s) ds$$

qui mesure la différence trajectorielle entre les deux termes de l'équation (3.13) sans prendre l'espérance \mathbb{E} comme une intégrale stochastique. Ce faisant, il introduit un calcul différentiel stochastique, le calcul d'Itô, vrai sur les trajectoires et non plus seulement en moyenne. C'est l'objet des chapitres suivants (Chapitre 6).

Deuxième partie

Martingales

Chapitre 4

Martingales en temps continu

Dans ce chapitre, on présente les rudiments sur la théorie des martingales en temps continu. Il s'agit de la généralisation au temps continu des martingales en temps discret étudiées par exemple dans [JCB-martingale]. Ce sont des processus définis sur des espaces $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ filtrés, c'est à dire muni d'une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$. On rappelle qu'on associe à chaque \mathcal{F}_t les tribus \mathcal{F}_{t+} et \mathcal{F}_{t-} et la filtration est dite continue à droite (resp. à gauche) si pour tout $t \geq 0$, on a $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t+}$ (resp., pour tout $t > 0$, $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t-}$). Elle est dite satisfaire les conditions habituelles si elle est continue à droite et complète (ie. contient tous les négligeables de \mathcal{F}).

Dans tout ce chapitre, on considère $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ un espace filtré. On commence par des généralités sur les filtrations en Section 4.1 et sur les temps d'arrêts en Section 4.2 puis on présente la notion de martingale en temps continu en Section 4.3. On généralise les principaux résultats rencontrés dans le cadre discret (inégalités de Doob, théorèmes de convergence, théorème d'arrêt, martingales arrêtées) et on régularise les trajectoires des martingales. On termine avec un mot sur le processus de Poisson en Section 4.8.

4.1 Filtration et processus

Définition 4.1 (Filtration) Une filtration sur un espace de probabilité (Ω, \mathcal{F}) est une famille $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ de sous-tribus telle que pour $s \leq t$ on a $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$.

Si on considère un processus $(X_t)_{t \geq 0}$, on considère souvent la filtration canonique qu'il engendre : $\mathcal{F}_t^X = \sigma(X_s : s \leq t)$, $t \geq 0$. Dans ce cas, il est utile d'interpréter une filtration comme une quantité d'information disponible à une date donnée : \mathcal{F}_t^X représente l'information véhiculée par le processus X jusqu'à la date t .

Une filtration est **\mathbb{P} -complète** pour une mesure de probabilité \mathbb{P} si \mathcal{F}_0 contient tous les événements de mesure nulle, ie. $\mathcal{N} = \{N \subset \Omega : \exists A \in \mathcal{F} \text{ tel que } N \subset A \text{ et } \mathbb{P}(A) = 0\} \subset \mathcal{F}_0$.

L'intérêt d'une tribu complète vient du résultat suivant :

Proposition 4.2 Soit $X = Y$ ps où Y est une variable aléatoire \mathcal{G} -mesurable, avec \mathcal{G} complète. Alors X est \mathcal{G} -mesurable.

Démonstration : En effet, notons $N = \{X \neq Y\}$, négligeable, donc dans \mathcal{G} complète. Soit $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, on a :

$$X^{-1}(A) = (\{Y \in A\} \cap N^c) \cup (\{X \in A\} \cap N).$$

On a $(\{X \in A\} \cap N) \in \mathcal{G}$ car $(\{X \in A\} \cap N) \subset N$ et \mathcal{G} est une tribu complète. Puis $(\{Y \in A\} \cap N^c) \in \mathcal{G}$ car $\{Y \in A\} \in \mathcal{G}$ et $N^c \in \mathcal{G}$. \square

À une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$, on associe $\mathcal{F}_{t+} = \bigcap_{\varepsilon > 0} \mathcal{F}_{t+\varepsilon}$ et $\mathcal{F}_{t-} = \bigvee_{\varepsilon > 0} \mathcal{F}_{t-\varepsilon}$.

La filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ est dite **continue à droite** si pour tout $t \geq 0$, on a $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t+}$, **continue à gauche** si pour tout $t > 0$, on a $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t-}$.

Dans la suite, on dira qu'une filtration satisfait les **conditions habituelles** si elle est complète et continue à droite. C'est le cas de la filtration brownienne $(\mathcal{F}_t^B)_{t \geq 0}$ donnée par $\mathcal{F}_t^B = \sigma(B_s : s \leq t)$, cf. Prop. 3.16.

Étant donnée une filtration quelconque $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$, on peut toujours en considérer une satisfaisant les conditions habituelles en ajoutant à \mathcal{F}_{t+} la classe des \mathbb{P} -négligeables de \mathcal{F} . Il s'agit de l'**augmentation habituelle** de $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$.

On note $\mathcal{F}_\infty = \bigvee_{t \geq 0} \mathcal{F}_t = \sigma(\bigcup_{t \geq 0} \mathcal{F}_t)$ la tribu limite de la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$.

Définition 4.3 (Processus et mesurabilité)

(Adapté) Un processus $(X_t)_{t \geq 0}$ est dit adapté si pour tout $t \geq 0$, X_t est \mathcal{F}_t -mesurable.

(Mesurable) Un processus $(X_t)_{t \geq 0}$ est dit mesurable si l'application suivante est mesurable :

$$X : \begin{cases} (\mathbb{R}_+ \times \Omega, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{F}) & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (t, \omega) & \longmapsto X_t(\omega). \end{cases}$$

(Progressif) Un processus $(X_t)_{t \geq 0}$ est dit progressif (ou progressivement mesurable) si pour tout $t \geq 0$ l'application suivante est mesurable :

$$X : \begin{cases} ([0, t] \times \Omega, \mathcal{B}([0, t]) \otimes \mathcal{F}_t) & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (s, \omega) & \longmapsto X_s(\omega). \end{cases}$$

Définition 4.4 (Tribu progressive) La famille des ensembles $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{F}$ tels que le processus $X_t(\omega) = \mathbf{1}_A(t, \omega)$ est progressif est appelée la tribu progressive. On la note Prog.

Un processus est donc progressif s'il est mesurable par rapport à la tribu progressive Prog. L'intérêt d'un processus progressif vient de ce que, estimé en un temps d'arrêt, il est mesurable pour la tribu associée au temps d'arrêt, cf. Prop. 4.12 et aussi Remarque 4.13.

Exemple 4.5 — Un processus X est adapté par rapport à sa filtration naturelle \mathcal{F}^X .

- Soit $0 < t_1 < \dots < t_n$ et h_1, \dots, h_n des variables aléatoires telles que h_i est \mathcal{F}_{t_i} -mesurable pour chaque $1 \leq i \leq n$. On pose $t_0 = 0$ et $t_{n+1} = +\infty$. Les processus suivants sont progressifs :

$$X = \sum_{i=0}^n h_i \mathbf{1}_{[t_i, t_{i+1}[} \quad \text{et} \quad Y = \sum_{i=0}^n h_i \mathbf{1}_{]t_i, t_{i+1}]}.$$

En effet, étant donné $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, on a :

$$\begin{aligned} \{(s, \omega) \in [0, t] \times \Omega : X_s(\omega) \in B\} &= \bigcup_{i=0}^n ([t_i, t_{i+1}[\cap [0, t]) \times \underbrace{\{\omega \in \Omega : h_i(\omega) \in B\}}_{\in \mathcal{F}_{t_i}} \\ &\in \mathcal{B}([0, t]) \otimes \mathcal{F}_t, \\ \{(s, \omega) \in [0, t] \times \Omega : Y_s(\omega) \in B\} &= \bigcup_{i=0}^n (]t_i, t_{i+1}] \cap [0, t]) \times \underbrace{\{\omega \in \Omega : h_i(\omega) \in B\}}_{\in \mathcal{F}_{t_i}} \\ &\in \mathcal{B}([0, t]) \otimes \mathcal{F}_t, \end{aligned}$$

puisque $\{\omega \in \Omega : h_i(\omega) \in B\} \in \mathcal{F}_{t_i} \subset \mathcal{F}_t$ lorsque $t_i \leq t$ ou $t_i < t$.

Proposition 4.6 (Adapté, mesurable, progressif)

- (1) *Un processus progressif est adapté et mesurable.*
- (2) *Un processus adapté et à trajectoires continues à droite ou continues à gauche est progressif.*
- (3) *Un processus mesurable et adapté admet une version progressive*

Remarque 4.7 Pour un processus à trajectoires continues (à droite ou à gauche), il y a donc équivalence entre être adapté et progressivement mesurable.

Démonstration : 1) Soit X un processus progressif. Il est adapté car $X_t = X \circ i_t$ où $i_t : \omega \in (\Omega, \mathcal{F}_t) \mapsto (t, \omega) \in ([0, t] \times \Omega, \mathcal{B}([0, t]) \otimes \mathcal{F}_t)$ est mesurable puisque pour $B \in \mathcal{B}([0, t])$ et $A \in \mathcal{F}_t$:

$$i_t^{-1}(B \times A) = \begin{cases} A & \text{si } t \in B \\ \emptyset & \text{si } t \notin B \end{cases} \in \mathcal{F}_t.$$

Puis X est mesurable car un processus est mesurable si et seulement si pour tout $t \geq 0$, $(s, \omega) \mapsto X_s(\omega)$ est mesurable sur $[0, t] \times \Omega$ muni de $\mathcal{B}([0, t]) \otimes \mathcal{F}$: en effet, pour tout borélien $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$

- si X est mesurable alors pour la restriction $X_{|[0, t]}$, on a :

$$(X_{|[0, t]})^{-1}(B) = \underbrace{X^{-1}(B)}_{\in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{F}} \cap ([0, t] \times \Omega) \in \mathcal{B}([0, t]) \otimes \mathcal{F};$$

— si les restrictions $X_{|[0,t]}$ sont mesurables alors :

$$X^{-1}(B) = \bigcup_{t \geq 0} \left(X^{-1}(B) \cap ([0, t] \times \Omega) \right) = \bigcup_{t \geq 0} (X_{|[0,t]})^{-1}(B) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{F},$$

$$\text{car } (X_{|[0,t]})^{-1}(B) \in \mathcal{B}([0, t]) \otimes \mathcal{F} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{F}.$$

2) On traite le cas d'un processus X à trajectoires continues à droite (le cas de la continuité à gauche est analogue). Soit $t > 0$ fixé. Pour chaque $n \geq 1$, on définit $(X_s^{(n)})_{s \in [0,t]}$ par

$$X_s^{(n)} = X_{kt/n} \quad \text{pour } s \in [(k-1)t/n, kt/n[, \quad \text{et} \quad X_t^{(n)} = X_t.$$

Par la continuité à droite, on a pour $\lim_{n \rightarrow +\infty} X_s^{(n)}(\omega) = X_s(\omega)$ pour chaque $\omega \in \Omega$ et $s \in [0, t]$ et il suffit de montrer que l'application $(s, \omega) \in [0, t] \times \Omega \mapsto X_s^{(n)}(\omega)$ est $(\mathcal{B}([0, t]) \otimes \mathcal{F}_t)$ -mesurable pour chaque $n \geq 1$.

Pour cela, pour un borélien $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, on a

$$\{(s, \omega) \in [0, t] \times \Omega : X_s^{(n)}(\omega) \in B\} = (\{t\} \times \{X_t \in B\}) \cup \bigcup_{k=1}^n \left(\left[\frac{(k-1)t}{n}, \frac{kt}{n} \right[\times \{X_{\frac{kt}{n}} \in B\} \right)$$

avec $\left[\frac{(k-1)t}{n}, \frac{kt}{n} \right[\in \mathcal{B}([0, t])$ et $\{X_{kt/n} \in B\} \in \mathcal{F}_{kt/n} \subset \mathcal{F}_t$, $\{X_t \in B\} \in \mathcal{F}_t$ si bien que $\{(s, \omega) \in [0, t] \times \Omega : X_s^{(n)}(\omega) \in B\} \in \mathcal{B}([0, t]) \otimes \mathcal{F}_t$ justifiant la $(\mathcal{B}([0, t]) \otimes \mathcal{F}_t)$ -mesurabilité de $X^{(n)}$ puis, à la limite, celle de X .

3) Résultat admis, dû à Chung et Doob, cf. [DM]. □

4.2 Filtrations et temps d'arrêt

Dans cette section, on rappelle et développe la notion de temps d'arrêt du cadre temps discret ($T = \mathbb{N}$, pour lequel on renvoie à [JCB-martingale]) au cadre temps continu ($T = \mathbb{R}_+$).

Définition 4.8 (Temps d'arrêt) Une variable aléatoire T à valeurs dans $[0, +\infty]$ est un temps d'arrêt si pour tout $t \geq 0$ on a $\{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t$.

À un temps d'arrêt T , on associe les tribus suivantes :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_T &= \{A \in \mathcal{F}_\infty : \forall t \geq 0, A \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t\} \\ \mathcal{F}_{T+} &= \{A \in \mathcal{F}_\infty : \forall t \geq 0, A \cap \{T < t\} \in \mathcal{F}_t\} \\ \mathcal{F}_{T-} &= \sigma(\{A \cap \{T > t\} : t \geq 0, A \in \mathcal{F}_t\}). \end{aligned}$$

Les propriétés suivantes sont satisfaites :

Proposition 4.9 (Propriétés des temps d'arrêt et de leurs tribus associées)

1. On a toujours $\mathcal{F}_{T-} \subset \mathcal{F}_T \subset \mathcal{F}_{T+}$. Si la filtration est continue à droite $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}_{T+}$.
2. Une variable aléatoire $T : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ est un $(\mathcal{F}_{t+})_{t \geq 0}$ temps d'arrêt si et seulement si pour tout $t \geq 0$, $\{T < t\} \in \mathcal{F}_t$. Cela équivaut encore à dire que $T \wedge t$ est \mathcal{F}_t -mesurable pour tout $t \geq 0$.
3. Si $T = t$ alors $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}_t$, $\mathcal{F}_{T+} = \mathcal{F}_{t+}$ et $\mathcal{F}_{T-} = \mathcal{F}_{t-}$.
4. Pour $A \in \mathcal{F}_\infty$, posons $T^A(\omega) = T(\omega)$ si $\omega \in A$, $+\infty$ sinon. Alors $A \in \mathcal{F}_T$ si et seulement si T^A est un temps d'arrêt.
5. Le temps d'arrêt T est \mathcal{F}_T -mesurable.
6. Si $S \leq T$ sont deux temps d'arrêt alors

$$\mathcal{F}_S \subset \mathcal{F}_T, \quad \mathcal{F}_{S-} \subset \mathcal{F}_{T-}, \quad \mathcal{F}_{S+} \subset \mathcal{F}_{T+}.$$

7. Soit T temps d'arrêt et S une variable aléatoire \mathcal{F}_T -mesurable telle que $S \geq T$. Alors S est aussi un temps d'arrêt.
8. Pour S, T des temps d'arrêt, $S \wedge T$ et $S \vee T$ sont des temps d'arrêt et $\mathcal{F}_{S \wedge T} = \mathcal{F}_S \cap \mathcal{F}_T$. De plus $\{S \leq T\} \in \mathcal{F}_{S \wedge T}$, $\{S = T\} \in \mathcal{F}_{S \wedge T}$.
9. Si $(S_n)_{n \geq 1}$ est une suite croissante de temps d'arrêt alors $S = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$ est aussi un temps d'arrêt et $\mathcal{F}_{S-} = \bigvee_{n \geq 1} \mathcal{F}_{S_n-}$.
10. Si $(S_n)_{n \geq 1}$ est une suite décroissante de temps d'arrêt alors $S = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$ est aussi un temps d'arrêt de $(\mathcal{F}_{t+})_{t \geq 0}$ et $\mathcal{F}_{S+} = \bigcap_{n \geq 1} \mathcal{F}_{S_n+}$.
11. Si $(S_n)_{n \geq 1}$ est une suite décroissante stationnaire de temps d'arrêt (ie. $\forall \omega, \exists N(\omega), \forall n \geq N(\omega), S_n(\omega) = S(\omega)$) alors $S = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$ est aussi un temps d'arrêt pour $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ et $\mathcal{F}_S = \bigcap_{n \geq 1} \mathcal{F}_{S_n}$ (comparer avec 10)).

Démonstration :

1) Pour $A \in \mathcal{F}_t$, soit $A \cap \{T > t\} \in \mathcal{F}_{T-}$. Alors $A \cap \{T > t\} \in \mathcal{F}_\infty$ et pour $s \geq 0$

$$(A \cap \{T > t\}) \cap \{T \leq s\} = A \cap (\{t < T \leq s\}) \in \mathcal{F}_s$$

car si $s \leq t$ on a $\{t < T \leq s\} = \emptyset$, tandis que si $s > t$ alors $\{t < T \leq s\} = \{T \leq t\}^c \cap \{T \leq s\} \in \mathcal{F}_s$ et $A \in \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}_s$. Ainsi $A \cap \{T > t\} \in \mathcal{F}_T$. Soit maintenant $A \in \mathcal{F}_T$ alors

$$A \cap \{T < t\} = \bigcup_{n \geq 1} (A \cap \{T \leq t - 1/n\}) \in \bigvee_{n \geq 1} \mathcal{F}_{t-1/n} \subset \mathcal{F}_t,$$

on a donc $A \in \mathcal{F}_{T+}$ et $\mathcal{F}_T \subset \mathcal{F}_{T+}$. Puis si la filtration est continue à droite et $A \in \mathcal{F}_{T+}$ alors

$$A \cap \{T \leq t\} = \bigcap_{n \geq 1} A \cap \{T < t + 1/n\} \in \bigcap_{n \geq 1} \mathcal{F}_{t+1/n} = \mathcal{F}_{t+} = \mathcal{F}_t,$$

c'est à dire $A \in \mathcal{F}_T$ et donc $\mathcal{F}_{T+} \subset \mathcal{F}_T$.

2) Soit T est un $(\mathcal{F}_{t+})_{t \geq 0}$ -temps d'arrêt alors

$$\{T < t\} = \bigcup_{n \geq 1} \{T \leq t - 1/n\} \in \bigvee_{n \geq 1} \mathcal{F}_{(t-1/n)+} \subset \mathcal{F}_t$$

car pour chaque on a $n : \mathcal{F}_{(t-1/n)+} \subset \mathcal{F}_t$. Réciproquement, si $\{T < t\} \in \mathcal{F}_t$ alors

$$\{T \leq t\} = \bigcap_{n \geq 1} \{T < t + 1/n\} \in \bigcap_{n \geq 1} \mathcal{F}_{t+1/n} = \mathcal{F}_{t+}.$$

Puis si $T \wedge t$ est \mathcal{F}_t -mesurable alors pour tout $s \geq 0$, $\{T \wedge t \leq s\} = \{T \leq s\} \cup \{t \leq s\} \in \mathcal{F}_t$. Mais pour $s < t$, cela garantit donc $\{T \leq s\} \in \mathcal{F}_t$, ie. $\{T \leq s\} \in \bigcap_{t > s} \mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{s+}$, c'est à dire T est un temps d'arrêt pour $(\mathcal{F}_{t+})_{t \geq 0}$. Réciproquement, si T est un temps d'arrêt pour $(\mathcal{F}_{t+})_{t \geq 0}$, alors pour tout $s \geq 0$, on a $\{T \wedge t \leq s\} = \{T \leq s\} \cup \{t \leq s\} = \{T \leq s\} \in \mathcal{F}_{s+} \subset \mathcal{F}_t$ si $s < t$ et $= \Omega \in \mathcal{F}_{t+}$ si $t \leq s$ et donc $T \wedge t$ est bien \mathcal{F}_t -mesurable.

3) Soit $T = t$ alors $A \in \mathcal{F}_T$ si et seulement si pour tout $s \geq 0$ on a $A \cap \{t \leq s\} \in \mathcal{F}_s$. Pour $s < t$ on a bien $\emptyset \in \mathcal{F}_s$ et pour $t \leq s$, il faut $A \in \mathcal{F}_s$. En particulier, il faut $A \in \mathcal{F}_t$. La réciproque est claire.

Lorsque $T = t$, on a $A \in \mathcal{F}_{T+}$ si et seulement si pour tout $s \geq 0$ on a $A \cap \{t < s\} \in \mathcal{F}_s$. Pour $s \leq t$ on a bien $\emptyset \in \mathcal{F}_s$ et pour $s > t$, il faut $A \in \mathcal{F}_s$. En particulier, il faut $A \in \bigcap_{s > t} \mathcal{F}_s = \mathcal{F}_{t+}$. Pour la réciproque, observer que quand $t < s$, on a $A \cap \{t < s\} = A \in \mathcal{F}_{t+} \subset \mathcal{F}_s$.

La tribu \mathcal{F}_{T-} est constituée des $A \cap \{T > s\}$ pour $A \in \mathcal{F}_s$. Comme $T = t$: si $s \geq t$, cet ensemble est vide ; si $s < t$, cet ensemble est $A \in \mathcal{F}_s$. On a donc $\mathcal{F}_{T-} = \sigma\left(\bigcup_{s < t} \mathcal{F}_s\right) = \mathcal{F}_{t-}$.

4) On a $A \in \mathcal{F}_T$ si et seulement si pour tout $t \geq 0$: $A \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t$. Mais $A \cap \{T \leq t\} = \{T^A \leq t\}$ ce qui permet de conclure.

5) On a $\{T \leq s\} \in \mathcal{F}_T$ pour tout $s \geq 0$ car pour tout $t \geq 0$:

$$\{T \leq s\} \cap \{T \leq t\} = \{T \leq t \wedge s\} \in \mathcal{F}_{t \wedge s} \subset \mathcal{F}_t.$$

6) On considère $S \leq T$. Soit $A \in \mathcal{F}_S$, alors

$$A \cap \{T \leq t\} = (A \cap \{S \leq t\}) \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t.$$

car $A \cap \{S \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ ($A \in \mathcal{F}_S$) et $\{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t$. Ainsi, $A \in \mathcal{F}_T$ et donc $\mathcal{F}_S \subset \mathcal{F}_T$.

De même pour $A \in \mathcal{F}_{S+}$, alors

$$A \cap \{T < t\} = (A \cap \{S < t\}) \cap \{T < t\} \in \mathcal{F}_t.$$

car $A \cap \{S < t\} \in \mathcal{F}_t$ ($A \in \mathcal{F}_{S+}$) et $\{T < t\} = \bigcup_{n \geq 1} \{T \leq t - 1/n\} \in \mathcal{F}_t$ puisque $\{T \leq t - 1/n\} \in \mathcal{F}_{t-1/n} \subset \mathcal{F}_t$. Ainsi, $A \in \mathcal{F}_{T+}$ et donc $\mathcal{F}_{S+} \subset \mathcal{F}_{T+}$.

Enfin un ensemble de \mathcal{F}_{S-} est de la forme $A \cap \{S > t\}$ pour $A \in \mathcal{F}_t$ et $t \geq 0$. Comme $S \leq T$, on peut réécrire cet ensemble de \mathcal{F}_{S-} :

$$A \cap \{S > t\} = \underbrace{(A \cap \{S > t\})}_{\in \mathcal{F}_t} \cap \{T > t\}$$

avec $A \cap \{S > t\} \in \mathcal{F}_t$ puisque $A \in \mathcal{F}_t$ et $\{S > t\} = \{S \leq t\}^c \in \mathcal{F}_t$. L'ensemble $A \cap \{S > t\}$ est donc dans \mathcal{F}_{T-} et on a $\mathcal{F}_{S-} \subset \mathcal{F}_{T-}$.

7) Comme S est \mathcal{F}_T -mesurable, on a $\{S \leq t\} \in \mathcal{F}_T$ et donc puisque $T \leq S$:

$$\{S \leq t\} = \{S \leq t\} \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t.$$

8) Pour des temps d'arrêt S, T quelconques, on a

$$\begin{aligned} \{S \wedge T \leq t\} &= \{S \leq t\} \cup \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t \\ \{S \vee T \leq t\} &= \{S \leq t\} \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t. \end{aligned}$$

Comme $S \wedge T \leq T, S$, on a facilement $\mathcal{F}_{S \wedge T} \subset \mathcal{F}_S \cap \mathcal{F}_T$. De plus, si $A \in \mathcal{F}_S \cap \mathcal{F}_T$, alors

$$A \cap \{S \wedge T \leq t\} = (A \cap \{S \leq t\}) \cup (A \cap \{T \leq t\}) \in \mathcal{F}_t,$$

d'où $A \in \mathcal{F}_{S \wedge T}$. Puis pour $t \geq 0$, on a

$$\begin{aligned} \{S \leq T\} \cap \{T \leq t\} &= (\{S \leq t\} \cap \{T \leq t\}) \cap \{S \wedge t \leq T \wedge t\} \in \mathcal{F}_t \\ \{S \leq T\} \cap \{S \leq t\} &= \{S \wedge t \leq T \wedge t\} \cap \{S \leq t\} \in \mathcal{F}_t \end{aligned}$$

car $S \wedge t$ et $T \wedge t$ sont \mathcal{F}_t -mesurables d'après **5)** et **6)** ($S \wedge t \leq t$ donc $S \wedge t$ est \mathcal{F}_t -mesurable) donc $\{S \wedge t \leq T \wedge t\} \in \mathcal{F}_t$. Finalement, cela garantit $\{S \leq T\} \in \mathcal{F}_S \cap \mathcal{F}_T = \mathcal{F}_{S \wedge T}$.

Par symétrie, on a aussi $\{S \geq T\} \in \mathcal{F}_{S \wedge T}$ et donc $\{S = T\} = \{S \leq T\} \cap \{S \geq T\} \in \mathcal{F}_{S \wedge T}$.

9) Comme $S_n \nearrow S$, on a $\{S \leq t\} = \bigcap_{n \geq 1} \{S_n \leq t\} \in \mathcal{F}_t$, ce qui assure que S est un temps d'arrêt. Comme $S_n \leq S$, par **6)**, on a $\mathcal{F}_{S_n-} \subset \mathcal{F}_{S-}$ et donc $\bigcup_{n \geq 1} \mathcal{F}_{S_n-} \subset \mathcal{F}_{S-}$. Réciproquement un ensemble de \mathcal{F}_{S-} s'écrit $A \cap \{S > t\}$ pour $A \in \mathcal{F}_t$ et $\{S > t\} = \bigcup_{n \geq 1} \{S_n > t\}$. On a donc

$$A \cap \{S > t\} = \bigcup_{n \geq 1} (A \cap \{S_n > t\}),$$

avec $A \cap \{S_n > t\} \in \mathcal{F}_{S_n-}$, on a $A \cap \{S > t\} \in \bigcup_{n \geq 1} \mathcal{F}_{S_n-} \subset \bigcup_{n \geq 1} \mathcal{F}_{S_n-}$, ce qui prouve $\mathcal{F}_{S-} \subset \bigcup_{n \geq 1} \mathcal{F}_{S_n-}$ et l'égalité souhaitée.

10) Comme $S_n \searrow S$, on a $\{S < t\} = \bigcup_{n \geq 1} \{S_n < t\} \in \mathcal{F}_{t+}$ car $\{S_n < t\} = \bigcap_{p \geq 1} \{S_n \leq t + 1/p\} \in \bigcap_{p \geq 1} \mathcal{F}_{t+1/p} = \mathcal{F}_{t+}$ et donc S est un (\mathcal{F}_{t+}) -temps d'arrêt par **1)**. Puis comme $S \leq S_n$, on a $\mathcal{F}_{S+} \subset \mathcal{F}_{S_n+}$ par **6)** et donc $\mathcal{F}_{S+} \subset \bigcap_{n \geq 1} \mathcal{F}_{S_n+}$. Réciproquement si $A \in \bigcap_{n \geq 1} \mathcal{F}_{S_n+}$ alors $A \cap \{S_n < t\} \in \mathcal{F}_t$ pour chaque $n \geq 1$ et

$$A \cap \{S < t\} = \bigcup_{n \geq 1} (A \cap \{S_n < t\}) \in \mathcal{F}_t,$$

d'où $A \in \mathcal{F}_{S+}$ et $\mathcal{F}_{S+} = \bigcap_{n \geq 1} \mathcal{F}_{S_n+}$.

11) On considère maintenant $S_n \searrow S$ mais la suite $(S_n)_{n \geq 1}$ devenant stationnaire. D'abord, S est un (\mathcal{F}_t) -temps d'arrêt car la suite étant décroissante stationnaire :

$$\{S \leq t\} = \bigcup_{n \geq 1} \{S_n \leq t\} \in \mathcal{F}_t.$$

Puis comme $S \leq S_n$, par 6), on a immédiatement $\mathcal{F}_S \subset \bigcap_{n \geq 1} \mathcal{F}_{S_n}$ et pour $A \in \bigcap_{n \geq 1} \mathcal{F}_{S_n}$,

$$A \cap \{S \leq t\} = \bigcup_{n \geq 1} (A \cap \{S_n \leq t\}) \in \mathcal{F}_t.$$

D'où $A \in \mathcal{F}_S$ et $\bigcap_{n \geq 1} \mathcal{F}_{S_n} \subset \mathcal{F}_S$ puis l'égalité souhaitée. \square

Proposition 4.10 *Une variable aléatoire $Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est \mathcal{F}_T -mesurable si et seulement si, pour tout $t \geq 0$, $Y \mathbf{1}_{\{T \leq t\}}$ est \mathcal{F}_t -mesurable.*

Démonstration : En effet si la condition est vérifiée alors pour $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, on a $\{Y \in B\} \cap \{T \leq t\} = \{Y \mathbf{1}_{\{T \leq t\}} \in B\} \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ donc $\{Y \in B\} \in \mathcal{F}_T$ puisque $Y \mathbf{1}_{\{T \leq t\}}$ est \mathcal{F}_T -mesurable et $\{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t$. On a donc $\{Y \in B\} \in \mathcal{F}_T$ et Y est \mathcal{F}_T -mesurable.

Ensuite, si Y est \mathcal{F}_T -mesurable, alors

$$\{Y \mathbf{1}_{\{T \leq t\}} \in B\} = (\{Y \in B\} \cap \{T \leq t\}) \cup (\{0 \in B\} \cap \{T > t\}) \in \mathcal{F}_t,$$

car $\{Y \in B\} \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t$. \square

Proposition 4.11 (Approximation de temps d'arrêt) *Soit T un temps d'arrêt. On pose $T_n = ([2^n T] + 1)2^{-n}$, ie.*

$$T_n = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k+1}{2^n} \mathbf{1}_{\{k2^{-n} < T \leq (k+1)2^{-n}\}} + (+\infty) \mathbf{1}_{\{T = +\infty\}}. \quad (4.1)$$

Alors la suite $(T_n)_{n \geq 1}$ forme une suite de temps d'arrêt qui décroît vers T .

Cf. aussi Prop. 3.37 au Chapitre 3.

Démonstration : D'abord on montre que T_n est un temps d'arrêt en appliquant la Prop. 4.9-7). On a $T_n = ([2^n T] + 1)2^{-n} \geq (2^n T)2^{-n} = T$. Puis, on montre que T_n est \mathcal{F}_T -mesurable en établissant que pour tout $u \geq 0$, on a $\{T_n \leq u\} \in \mathcal{F}_T$. Pour cela il faut voir que pour tout $t \geq 0$, on a $\{T_n \leq u\} \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t$. Mais

$$\begin{aligned} \{T_n \leq u\} &= \left\{ T_n \leq \frac{[2^n u]}{2^n} \right\} = \bigcup_{k=0}^{[2^n u]-1} \left\{ T_n = \frac{k+1}{2^n} \right\} \\ &= \bigcup_{k=0}^{[2^n u]-1} \left\{ T \in \left] \frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n} \right] \right\} = \left\{ T \leq \frac{[2^n u]}{2^n} \right\}. \end{aligned}$$

On a donc

$$\{T_n \leq u\} \cap \{T \leq t\} = \left\{ T \leq t \wedge \frac{[2^n u]}{2^n} \right\} \in \mathcal{F}_{t \wedge [2^n u]/2^n} \subset \mathcal{F}_t.$$

Par la Prop. 4.9-7), les variables aléatoires $(T_n)_{n \geq 1}$ sont donc bien des temps d'arrêt.

Puis la suite $(T_n)_{n \geq 1}$ décroît car si $T_n = (p+1)2^{-n}$, c'est que

$$T \in [p2^{-n}, (p+1)2^{-n}[= [(2p)2^{-n-1}, (2p+1)2^{-n-1}[\cup [(2p+1)2^{-n-1}, (2p+2)2^{-n-1}[,$$

et $T_{n+1} = (2p+1)2^{-n-1}$ (si $(2p)2^{-n-1} \leq T < (2p+1)2^{-n-1}$) ou $T_{n+1} = (2p+2)2^{-n-1}$ (si $(2p+1)2^{-n-1} \leq T < (2p+2)2^{-n-1}$), soit dans tous les cas $T_{n+1} \leq T_n$. On a donc $T_n \searrow T$. \square

Le résultat suivant justifie l'intérêt de la notion de progressivité : l'estimation en un temps d'arrêt T d'un processus progressif est \mathcal{F}_T -mesurable :

Proposition 4.12 *Soit X un processus progressif et T un temps d'arrêt. Alors $X_T \mathbf{1}_{\{T < +\infty\}}$ est \mathcal{F}_T -mesurable.*

Démonstration : On obtient la mesurabilité de $Y := X_T \mathbf{1}_{\{T < +\infty\}}$ en appliquant la Prop. 4.10. Pour cela, on montre que pour tout $t \geq 0$

$$Y \mathbf{1}_{\{T \leq t\}} = X_T \mathbf{1}_{\{T \leq t\}} = X_{T \wedge t} \mathbf{1}_{\{T \leq t\}}$$

est \mathcal{F}_t -mesurable. Mais $X_{T \wedge t}$ est la composition des deux applications

$$\left\{ \begin{array}{ll} (\Omega, \mathcal{F}_t) & \rightarrow ([0, t] \times \Omega, \mathcal{B}([0, t]) \otimes \mathcal{F}_t) \\ \omega & \mapsto (T(\omega) \wedge t, \omega) \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{ll} ([0, t] \times \Omega, \mathcal{B}([0, t]) \otimes \mathcal{F}_t) & \rightarrow \mathbb{R} \\ (s, \omega) & \mapsto X_s(\omega). \end{array} \right.$$

La première est mesurable car pour $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ et $A \in \mathcal{F}_t$:

$$(T \wedge t, \omega)^{-1}(B \times A) = A \cap (T \wedge t)^{-1}(B) \in \mathcal{F}_t$$

en utilisant que $T \wedge t$ est \mathcal{F}_t -mesurable (Prop. 4.9-2). La seconde est mesurable par définition de X progressif. Il en résulte que $X_{T \wedge t}$, et donc aussi $X_{T \wedge t} \mathbf{1}_{\{T \leq t\}}$, est \mathcal{F}_t -mesurable. La Prop. 4.10 conclut. \square

Remarque 4.13 Dans la Prop. 4.12, il est nécessaire (a priori) de considérer $X_T \mathbf{1}_{\{T < +\infty\}}$ plutôt que X_T tant que X_∞ n'est pas définie. Par contre si la variable aléatoire X_∞ est définie et est \mathcal{F}_∞ -mesurable alors X_T est \mathcal{F}_T -mesurable. En effet, comme $X_T = X_T \mathbf{1}_{\{T < +\infty\}} + X_T \mathbf{1}_{\{T = +\infty\}}$ avec $X_T \mathbf{1}_{\{T < +\infty\}}$ \mathcal{F}_T -mesurable par la Prop. 4.12, il reste à voir que $X_T \mathbf{1}_{\{T = +\infty\}}$ est aussi \mathcal{F}_T -mesurable, mais comme $X_T \mathbf{1}_{\{T = +\infty\}} \mathbf{1}_{\{T \leq t\}} = 0$ cela découle encore de la Prop. 4.10.

4.3 Définition et exemples de martingales en temps continu

Définition 4.14 (Martingale) *Un processus $(X_t)_{t \geq 0}$ adapté par rapport une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ et tel que pour tout $t \geq 0$, $X_t \in L^1$ est appelé*

- une martingale si pour $s \leq t : \mathbb{E}[X_t | \mathcal{F}_s] = X_s$;
- une sur-martingale si pour $s \leq t : \mathbb{E}[X_t | \mathcal{F}_s] \leq X_s$;
- une sous-martingale si pour $s \leq t : \mathbb{E}[X_t | \mathcal{F}_s] \geq X_s$.

Une martingale est, en moyenne, constante, tandis qu'une sur-martingale est, en moyenne, décroissante et une sous-martingale, en moyenne, croissante. Ainsi, on peut considérer qu'une sur-martingale est une généralisation aléatoire d'une fonction décroissante tandis qu'une sous-martingale est une généralisation d'une fonction croissante. Dans la suite, on considère souvent des martingales à trajectoires continues à droite, d'après la Prop. 4.6 elles seront progressivement mesurables.

Proposition 4.15 *Soit $(X_t)_{t \geq 0}$ une martingale (resp. une sous-martingale) et soit $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe (resp. convexe croissante). On suppose que $\varphi(X_t) \in L^1$ pour tout $t \geq 0$. Alors $(\varphi(X_t))_{t \geq 0}$ est une sous-martingale.*

Démonstration : En effet, d'après l'inégalité de Jensen (pour l'espérance conditionnelle), on a, pour $s < t$,

$$\mathbb{E}[\varphi(X_t) | \mathcal{F}_s] \geq \varphi(\mathbb{E}[X_t | \mathcal{F}_s]) \geq \varphi(X_s).$$

□

En appliquant cette remarque à la fonction convexe croissante $x \mapsto x^+$, on montre que si $(X_t)_{t \geq 0}$ est une sous-martingale alors $(X_t^+)_{t \geq 0}$ aussi. En particulier, on a pour $s \in [0, t] : \mathbb{E}[X_s^+] \leq \mathbb{E}[X_t^+]$. D'autre part, puisque X est une sous-martingale, on a pour $s \in [0, t]$, $\mathbb{E}[X_s] \geq \mathbb{E}[X_0]$. En combinant ces deux inégalités et en utilisant $|x| = 2x^+ - x$, on trouve la borne

$$\sup_{s \in [0, t]} \mathbb{E}[|X_s|] \leq 2\mathbb{E}[X_t^+] - \mathbb{E}[X_0]. \quad (4.2)$$

En changeant X en $-X$, la borne reste valable pour une sur-martingale et on a alors prouvé :

Proposition 4.16 *Soit $(X_t)_{t \geq 0}$ une sous-martingale, ou une sur-martingale, ou une martingale. Alors pour tout $t \geq 0$, on a $\sup_{s \in [0, t]} \mathbb{E}[|X_s|] < +\infty$.*

4.4 Inégalités pour martingales en temps continu

Dans cette section, on généralise au cadre du temps continu ($T = \mathbb{R}_+$) plusieurs inégalités déjà connues dans le cadre du temps discret ($T = \mathbb{N}$) quand les (sur/sous)-martingales sont à trajectoires continues à droite. Pour cela, l'idée générale est de considérer un ensemble dénombrable dense D qu'on voit comme limite de parties finies croissantes $D_n = \{t_1, \dots, t_n\}$. On applique les résultats discrets aux restrictions à $D_n = \{t_1, \dots, t_n\}$. En passant à la limite (convergence monotone avec $D_n \nearrow \bigcup_{n \geq 1} D_n = D$), le résultat s'obtient pour les restrictions à D . Comme D est dense dans \mathbb{R}_+ , la continuité (à droite) permet de lever la restriction $t \in D$ et d'obtenir le résultat pour tout $t \in \mathbb{R}_+$.

Systématiquement, on commence par rappeler les résultats principaux pour des martingales discrètes pour lesquels on renvoie à [JCB-martingale].

Inégalité maximale de Doob

On rappelle l'inégalité discrète :

Soit $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une sous, sur-martingale ou martingale discrète. Alors pour tout $x > 0$ et $n \geq 0$, on a

$$\mathbb{P}\left(\max_{k \leq n} |Y_k| \geq x\right) \leq \frac{\mathbb{E}[|Y_0|] + 2\mathbb{E}[|Y_n|]}{x}. \quad (4.3)$$

On considère maintenant une sous-martingale $(X_t)_{t \geq 0}$ en temps continu. Soit $t \geq 0$ fixé. Pour toute partie finie $\{0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = t\}$ de $[0, t]$, on peut appliquer cette inégalité à la sous-martingale en temps discret $Y_k = X_{t_k \wedge n}$, $k \geq 0$, par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_{t_k \wedge n})_{k \geq 0}$. L'inégalité discrète (4.3) donne

$$\mathbb{P}\left(\sup_{t \in [0, t] \cap \{t_1, \dots, t_n\}} |X_s| \geq x\right) = \mathbb{P}\left(\max_{k \leq n} |Y_k| \geq x\right) \leq \frac{\mathbb{E}[|X_0|] + 2\mathbb{E}[|X_t|]}{x}. \quad (4.4)$$

Étant donné un sous-ensemble D dénombrable de \mathbb{R}_+ et contenant t , on écrit D comme une limite croissante (pour l'inclusion) de parties finies $D_n = \{0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n\} \cup \{t\}$. La suite $(\sup_{s \in [0, t] \cap D_n} |X_s|)_{n \geq 1}$ est alors croissante et converge vers $\sup_{s \in [0, t] \cap D} |X_s|$. Puis la suite d'évènements $(\{\sup_{s \in [0, t] \cap D_n} |X_s| \geq x\})_{n \geq 1}$ est croissante et d'union

$$\bigcup_{n \geq 1} \left\{ \sup_{s \in [0, t] \cap D_n} |X_s| \geq x \right\} = \left\{ \sup_{s \in [0, t] \cap D} |X_s| \geq x \right\}.$$

En passant à la limite par convergence monotone des probabilités dans (4.4), on a :

$$\mathbb{P}\left(\sup_{s \in [0, t] \cap D} |X_s| \geq x\right) \leq \frac{\mathbb{E}[|X_0|] + 2\mathbb{E}[|X_t|]}{x}. \quad (4.5)$$

Si on suppose en plus que les trajectoires de X sont continues à droite alors en prenant D dense contenant t , on a $\sup_{s \in [0, t] \cap D} |X_s| = \sup_{s \in [0, t]} |X_s|$ ce qui justifie qu'on peut prendre $\sup_{s \in [0, t]} |X_s|$ dans (4.5) et on a alors montré :

Proposition 4.17 (Inégalité maximale de Doob) *Soit $(X_t)_{t \geq 0}$ une sous, sur-martingale ou martingales dont les trajectoires sont continues à droite. Alors*

$$\mathbb{P}\left(\sup_{s \in [0, t]} |X_s| \geq x\right) \leq \frac{\mathbb{E}[|X_0|] + 2\mathbb{E}[|X_t|]}{x} \leq \frac{3 \sup_{s \in [0, t]} \mathbb{E}[|X_s|]}{x}. \quad (4.6)$$

Inégalité de moment de Doob

Dans le cadre du temps discret, cette inégalité affirme :

Soit $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une martingale en temps discret telle que $Y_n \in L^p$ pour $p > 1$ (on note q le conjugué de p satisfaisant $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$). Alors pour tout $n \geq 0$ on a :

$$\left\| \sup_{k \leq n} |Y_k| \right\|_p \leq q \|Y_n\|_p. \quad (4.7)$$

En raisonnant comme précédemment, on a un résultat analogue pour une martingale en temps continu :

Proposition 4.18 (Inégalité de moment de Doob) Soit $(X_t)_{t \geq 0}$ une martingale dont les trajectoires sont continues à droite avec $X_t \in L^p$ pour tout $t \geq 0$ alors, avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$,

$$\left\| \sup_{s \in [0, t]} |X_s| \right\|_p \leq q \|X_t\|_p. \quad (4.8)$$

Démonstration : Soit $t \geq 0$ fixé. Pour toute partie finie $\{0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = t\}$ de $[0, t]$, on peut appliquer l'inégalité de Doob discrète (4.7) à la martingale discrète $Y_k = X_{t_{k \wedge n}}$, $k \geq 0$, par rapport à la filtration $\mathcal{F}_{t_{k \wedge n}}$, $k \geq 0$.

En considérant une partie D dénombrable de \mathbb{R}_+ contenant t , on peut l'écrire comme limite croissante de parties finies $D_n = \{0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n\} \cup \{t\}$ et on a pour chaque D_n :

$$\left\| \sup_{s \in [0, t] \cap D_n} |X_s| \right\|_p \leq q \|X_t\|_p. \quad (4.9)$$

Comme $D_n \nearrow \bigcup_{n \geq 1} D_n = D$ et $\sup_{s \in [0, t] \cap D_n} |X_s| \nearrow \sup_{s \in [0, t] \cap D} |X_s|$, lorsque $n \rightarrow +\infty$, par convergence monotone, on a

$$\left\| \sup_{s \in [0, t] \cap D_n} |X_s| \right\|_p \nearrow \left\| \sup_{s \in [0, t] \cap D} |X_s| \right\|_p, \quad n \rightarrow +\infty,$$

et en passant à la limite dans (4.9), on a

$$\left\| \sup_{s \in [0, t] \cap D} |X_s| \right\|_p \leq q \|X_t\|_p. \quad (4.10)$$

Lorsque le processus X a ses trajectoires continues à droite, en prenant D dénombrable dense dans \mathbb{R}_+ , on a $\sup_{s \in [0, t] \cap D} |X_s|$ par $\sup_{s \in [0, t]} |X_s|$ et (4.10) s'écrit (4.8). \square

Nombre de montées

Si f est une fonction définie sur une partie T de \mathbb{R}_+ et si $a < b$, le nombre de montées de f le long de $[a, b]$, noté $M_{a,b}^f(T)$, est le supremum des entiers k tels que l'on puisse trouver une suite croissante de T , $s_1 < t_1 < s_2 < t_2 \cdots < s_k < t_k$, avec $f(s_i) < a$, $f(t_i) > b$.

[Dessin typique des montées]

Pour une sous-martingale discrète $(Y_n)_{n \geq 0}$, on a :

$$\mathbb{E}[M_{a,b}^Y([0, n])] \leq \frac{1}{b-a} \mathbb{E}[(Y_n - a)^+]. \quad (4.11)$$

On en déduit comme précédemment le résultat suivant dans le cadre du temps continu :

Proposition 4.19 (Nombre de montées) *Soit $(X_t)_{t \geq 0}$ une sous-martingale. Si D est un sous-ensemble dénombrable de \mathbb{R}_+ , on a pour tout $a < b$:*

$$\mathbb{E}[M_{a,b}^X([0, t] \cap D)] \leq \frac{1}{b-a} \mathbb{E}[(X_t - a)^+]. \quad (4.12)$$

Remarque 4.20 Attention pour ce résultat, même en supposant le processus X à trajectoires continues, on ne peut pas prolonger la borne par continuité puisque la fonction $t \in \mathbb{R}_+ \mapsto M_{a,b}^X([0, t]) \in \mathbb{N}$ est à valeurs entières et donc non continue.

Démonstration : Pour toute partie finie $\{0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = t\}$ de $[0, t]$, on peut appliquer l'inégalité discrète (4.11) sur le nombre de montées à la sous-martingale discrète $Y_k = X_{t_k \wedge n}$, $k \geq 0$, par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_{t_k \wedge n})_{k \geq 0}$.

On écrit $D = \bigcup_{n \geq 1} D_n$ où $D_n = \{t_1, \dots, t_n\} \cup \{t\}$, $n \geq 1$ forme une suite croissante de parties finies contenant t . Pour chaque D_n , on a alors :

$$\mathbb{E}[M_{a,b}^X([0, t] \cap D_n)] \leq \frac{1}{b-a} \mathbb{E}[(X_t - a)^+]. \quad (4.13)$$

Comme $D_n \nearrow \bigcup_{n \geq 1} D_n = D$ lorsque $n \rightarrow +\infty$, on a

$$M_{a,b}^X([0, t] \cap D_n) \nearrow M_{a,b}^X \left([0, t] \cap \bigcup_{n \geq 1} D_n \right) = M_{a,b}^X([0, t] \cap D)$$

et on obtient (4.12) en passant à la limite dans (4.13) par convergence monotone. \square

4.5 Régularisation de trajectoires

Avant de donner des théorèmes de convergence pour les martingales en temps continu dans la Section 4.6, on rappelle les résultats du cadre en temps discret (voir [JCB-martingale]). Ils permettent d'abord de donner dans cette section des conditions de régularisation des martingales (existence de versions à trajectoires continues ou càdlàg).

Proposition 4.21 (Convergence des martingales discrètes)

- (1) Soit $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une sous, sur-martingale ou martingale bornée dans L^1 . Alors $Y_n \rightarrow Y_\infty$ ps et $Y_\infty \in L^1$.
- (2) Une sur-martingale positive converge ps.
- (3) Soit $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sous-martingale. Alors $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est uniformément intégrable si et seulement si $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge ps et L^1 .
- (4) Si $(Y_n)_{n \in -\mathbb{N}}$ est une sous-martingale rétrograde (ie. indexée par $-\mathbb{N} : \mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{n+1}$ et $Y_n \leq \mathbb{E}[Y_{n+1} | \mathcal{F}_n]$ pour $n \leq 0$) et telle que $\sup_{n \leq 0} \mathbb{E}[|Y_n|] < +\infty$ alors la suite $(Y_n)_{n \leq 0}$ est uniformément intégrable et converge ps et dans L^1 quand $n \rightarrow -\infty$ vers une variable Z telle que $Z \leq \mathbb{E}[Y_n | \mathcal{F}_{-\infty}]$, où par définition $\mathcal{F}_{-\infty} := \bigcap_{n \leq 0} \mathcal{F}_n$.

En appliquant ces résultats en temps discret à des (sous-)martingales en temps continu, on a :

Proposition 4.22 (Limites à droite et à gauche) Soit $(X_t)_{t \geq 0}$ une sous-martingale et D un sous-ensemble dénombrable dense dans \mathbb{R}_+ . Alors pour presque tout $\omega \in \Omega$, l'application $s \in D \mapsto X_s(\omega) \in \mathbb{R}$ admet en tout $t \in \mathbb{R}_+$ une limite à droite le long de D finie, notée $X_{t+}(\omega)$, et en tout point $t \in \mathbb{R}_+^*$, une limite à gauche le long de D , notée $X_{t-}(\omega)$.

Démonstration : C'est une conséquence de l'inégalité maximale de Doob (4.6) et de celle sur le nombre de montées (4.12). En effet, pour $T > 0$ fixé, on a d'abord, $\sup_{s \in [0, T] \cap D} |X_s| < +\infty$ ps car l'inégalité maximale de Doob (4.6) assure

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \mathbb{P} \left(\sup_{s \in [0, T] \cap D} |X_s| \geq x \right) = 0.$$

Ensuite, l'inégalité sur le nombre de montées (4.12) montre que ps pour

$$\forall a, b \in \mathbb{Q}, \text{ avec } a < b, \text{ on a } M_{a,b}^X([0, T] \cap D) < +\infty.$$

(D'abord pour tout $a < b$ rationnels presque sûrement, puis presque sûrement pour tout $a < b$ presque sûrement.) Finalement, $s \mapsto X_s(\omega)$ est bornée sur $[0, T] \cap D$ et pour tous $a < b$ rationnels, ne fait qu'un nombre fini de montées le long de $[a, b]$. La Prop. 4.22 s'en déduit puisque si, par exemple une fonction $f : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ n'a pas de limite à gauche finie en $t \in]0, T]$, on peut choisir $a < b$ rationnels de sorte que

$$\liminf_{s \in D \searrow t} f(s) < a < b < \limsup_{s \in D \searrow t} f(s),$$

et on obtient que $M_{[a,b]}^f([0, T] \cap D) = +\infty$, ie. f a un nombre infini de montées le long de $[a, b]$ sur $[0, t] \cap D$. \square

Corollaire 4.23 (sur le processus $(X_{t+})_{t \geq 0}$) Soit $(X_t)_{t \geq 0}$ une sous-martingale.

- (1) Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, on a $X_{t+} \in L^1(\mathcal{F}_{t+})$, ie. X_{t+} est \mathcal{F}_{t+} -mesurable et $X_{t+} \in L^1$.
- (2) Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, on a $X_t \leq \mathbb{E}[X_{t+}|\mathcal{F}_t]$ ps avec égalité si la fonction $t \mapsto \mathbb{E}[X_t]$ est continue à droite (par exemple, si $(X_t)_{t \geq 0}$ est une martingale).
- (3) De plus, le processus $(X_{t+})_{t \geq 0}$ est alors une sous-martingale par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_{t+})_{t \geq 0}$ et même une martingale si X en est une.

Démonstration : 1) Pour que $X_{t+}(\omega)$ soit définie pour tout $\omega \in \Omega$ et pas seulement sur l'ensemble de probabilité 1 où la limite existe, on prend $X_{t+}(\omega) = 0$ sur l'ensemble \mathcal{F}_{t+} -mesurable et de probabilité nulle où la limite en t le long de D n'existe pas.

La variable aléatoire X_{t+} est \mathcal{F}_{t+} -mesurable : en effet, en fixant $u > t$, pour $s \in [t, u]$, X_s est alors \mathcal{F}_u -mesurable et comme $X_{t+} = \lim_{s \in [t, u] \searrow t} X_s$ est limite de telles variables aléatoires, on a aussi que la \mathcal{F}_u -mesurabilité de X_{t+} . Comme cela est vrai pour tout $u > t$, X_{t+} est finalement mesurable par rapport à $\bigcap_{u>t} \mathcal{F}_u = \mathcal{F}_{t+}$.

De cette façon, la variable aléatoire $X_{t+}(\omega)$ est bien définie pour tout $\omega \in \Omega$ et reste \mathcal{F}_{t+} -mesurable (en supposant la filtration complète).

Pour l'intégrabilité, on choisit une suite $(t_n)_{n \geq 0}$ de D qui décroît vers t fixé. Par construction, on a $X_{t+} = \lim_{n \rightarrow +\infty} X_{t_n}$ ps. Pour $k \leq 0$, on pose $Y_k = X_{t_{-k}}$ et $\mathcal{G}_k = \mathcal{F}_{t_{-k}}$. Comme la suite $(t_n)_{n \geq 0}$ décroît, on a $t_{-k} \leq t_{-k-1}$ et :

- $\mathcal{G}_k = \mathcal{F}_{t_{-k}} \subset \mathcal{F}_{t_{-k-1}} = \mathcal{G}_{k+1} : (\mathcal{G}_k)_{k \leq 0}$ est bien une filtration indexée par $-\mathbb{N}$,
- $(Y_k)_{k \leq 0}$ est bien une (\mathcal{G}_k) -sous-martingale rétrograde :

$$\mathbb{E}[Y_{k+1}|\mathcal{G}_k] = \mathbb{E}[X_{t_{-k-1}}|\mathcal{F}_{t_{-k}}] \geq X_{t_{-k}} = Y_k,$$

puisque $t_{-k-1} \geq t_{-k}$ et X est une sous-martingale.

Comme par la Prop. 4.16

$$\sup_{k \leq 0} \mathbb{E}[|Y_k|] = \sup_{n \geq 0} \mathbb{E}[|X_{t_n}|] = \sup_{s \in [0, t_0] \cap D} \mathbb{E}[|X_s|] < +\infty,$$

le résultat discret (cf. 4) de la Prop. 4.21 assure que la suite $(Y_k)_{k \leq 0} = (X_{t_n})_{n \geq 0}$ converge dans L^1 , dans ce cas nécessairement vers X_{t+} . On a donc en particulier $X_{t+} \in L^1$.

2) Grâce à la convergence L^1 , on peut passer à la limite dans l'inégalité de sous-martingale (pour $t_n > t$) $X_t \leq \mathbb{E}[X_{t_n}|\mathcal{F}_t]$ et obtenir

$$X_t \leq \mathbb{E}[X_{t+}|\mathcal{F}_t] \quad \text{ps.} \quad (4.14)$$

Toujours grâce à la convergence $X_{t_n} \xrightarrow{L^1} X_{t+}$ dans L^1 , on a $\mathbb{E}[X_{t+}] = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}[X_{t_n}]$ et donc si la fonction $s \mapsto \mathbb{E}[X_s]$ est continue à droite, on doit avoir $\mathbb{E}[X_{t+}] = \mathbb{E}[X_t]$. L'inégalité précédente (4.14) n'est alors possible que si $X_t = \mathbb{E}[X_{t+}|\mathcal{F}_t]$ ps.

3) Par 1), le processus $(X_{t+})_{t \geq 0}$ est (\mathcal{F}_{t+}) -adapté et intégrable. Il reste à établir la propriété de sous-martingale pour $(X_{t+})_{t \geq 0}$:

$$X_{s+} \leq \mathbb{E}[X_{t+}|\mathcal{F}_{s+}] \quad \forall s \leq t. \quad (4.15)$$

Étant donnés $s < t$, on considère des suites $(s_n)_{n \geq 0}$ et $(t_n)_{n \geq 0}$ de D qui décroissent respectivement vers s et t . Comme $s < t$, on peut supposer $s_n \leq t_n$ pour tout $n \geq 1$. Alors $(X_{s_n})_{n \geq 1}$ converge vers X_{s+} dans L^1 , et donc, si $A \in \mathcal{F}_{s+} \subset \mathcal{F}_{t+}$,

$$\mathbb{E}[X_{s+} \mathbf{1}_A] = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}[X_{s_n} \mathbf{1}_A] \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}[X_{t_n} \mathbf{1}_A] = \mathbb{E}[X_{t+} \mathbf{1}_A] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X_{t+} | \mathcal{F}_{s+}] \mathbf{1}_A] \quad (4.16)$$

où on utilise l'inégalité de sous-martingale $\mathbb{E}[X_{t_n} \mathbf{1}_A] \leq \mathbb{E}[X_{s_n} \mathbf{1}_A]$ pour $s_n < t_n$. L'inégalité (4.16) entraîne (4.15).

Enfin, si X est une martingale, on peut remplacer dans le calcul précédent l'inégalité $\mathbb{E}[X_{s_n} \mathbf{1}_A] \leq \mathbb{E}[X_{t_n} \mathbf{1}_A]$ par une égalité $\mathbb{E}[X_{s_n} \mathbf{1}_A] = \mathbb{E}[X_{t_n} \mathbf{1}_A]$ et obtenir la propriété de martingale pour $(X_{t+})_{t \geq 0}$. \square

Théorème 4.24 (Régularisation de martingale) *On suppose que la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ satisfait les conditions habituelles. Soit $X = (X_t)_{t \geq 0}$ une sous-martingale dont la fonction espérance $t \mapsto \mathbb{E}[X_t]$ est continue à droite. Alors le processus X admet une modification qui est aussi une (\mathcal{F}_t) -sous-martingale et dont les trajectoires sont càdlàg (continues à droite avec des limites à gauche en tout point).*

Démonstration : On fixe D un ensemble dénombrable dense dans \mathbb{R}_+ et on applique la Prop. 4.22. D'après ce théorème, il existe un ensemble N négligeable tel que pour $\omega \notin N$, l'application $s \in \mathbb{R}_+ \mapsto X_s(\omega)$ admet des limites le long de D à droite en tout $t \geq 0$ et à gauche en tout $t > 0$. On pose alors

$$Y_t = \begin{cases} X_{t+}(\omega) & \text{si } \omega \notin N \\ 0 & \text{si } \omega \in N. \end{cases}$$

Les trajectoires de Y sont continues à droite et avec des limites à gauche pour tout $\omega \in \Omega$: si $\omega \in N$, c'est immédiat, tandis que si $\omega \notin N$ alors pour $t \geq 0$ et $\varepsilon > 0$, on a

$$Y_{t+} = \lim_{h \searrow 0} Y_{t+h} = \lim_{h \searrow 0} X_{(t+h)+} = \lim_{h \searrow 0} \lim_{\delta \searrow 0} X_{t+h+\delta} = \lim_{\eta \searrow 0} X_{t+\eta} = X_{t+} = Y_t$$

en posant $\eta = h + \delta \searrow 0$ et

$$Y_{t-} = \lim_{h \searrow 0} Y_{t-h} = \lim_{h \searrow 0} X_{(t-h)+} = \lim_{h \searrow 0} \lim_{\delta \searrow 0} X_{t-h+\delta} = \lim_{u \searrow 0} X_{t-\eta} \text{ existe}$$

car la limite itérée $\lim_{h \searrow 0} \lim_{\delta \searrow 0}$ revient à prendre $\lim_{\eta \searrow 0}$ avec $\eta = h - \delta \searrow 0$ car $\delta \searrow 0$ avant $h \searrow 0$.

On a alors

$$X_t = \mathbb{E}[X_{t+} | \mathcal{F}_t] = \mathbb{E}[X_{t+} | \mathcal{F}_{t+}] = X_{t+} = Y_t \quad \text{ps}$$

où la première égalité vient de 1) de la Prop. 4.22, la deuxième de $\mathcal{F}_{t+} = \mathcal{F}_t$ (par hypothèse de conditions habituelles satisfaites par la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$) et la troisième de \mathcal{F}_{t+} -mesurabilité de X_{t+} (Corollaire 4.23-1). Ainsi le processus Y est une modification de X . Comme la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ est complète, Y_t est \mathcal{F}_t -mesurable (Prop. 4.2). Enfin, d'après le Corollaire 4.23-3), le processus Y est une (\mathcal{F}_t) -sur-martingale. \square

4.6 Théorèmes de convergence

Dans cette section, la notion d'uniforme intégrabilité est importante. On renvoie à un cours de probabilités de base pour la définition de cette notion et ses principales propriétés, cf. par exemple [JCB-proba] ou [JCB-martingale].

Théorème 4.25 (Convergence ps de martingales) *Soit $X = (X_t)_{t \geq 0}$ une sous-martingale bornée dans L^1 et à trajectoires continues continues à droite. Alors il existe une variable aléatoire $X_\infty \in L^1$ telle que*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} X_t = X_\infty \quad ps. \quad (4.17)$$

Remarque 4.26 1) Ce résultat de convergence reste vrai pour des sur-martingales ou martingales continues à droite, il suffit de changer X en $-X$, ce qui ne modifie pas les hypothèses à vérifier dans le Th. 4.25.

2) Une sous-martingale $(X_t)_{t \geq 0}$ est bornée dans L^1 si et seulement si $\sup_{t \geq 0} \mathbb{E}[X_t^+] < +\infty$. En effet, comme $\mathbb{E}[X_0] \geq \mathbb{E}[X_t]$, on a $\mathbb{E}[X_0] + \mathbb{E}[X_t^-] \geq \mathbb{E}[X_t^+]$. Il vient

$$\mathbb{E}[X_t^+] \leq \mathbb{E}[|X_t|] = \mathbb{E}[X_t^+] + \mathbb{E}[X_t^-] \leq 2\mathbb{E}[X_t^+] - \mathbb{E}[X_0]$$

et donc

$$\sup_{t \geq 0} \mathbb{E}[|X_t|] \leq -\mathbb{E}[X_0] + 2 \sup_{t \geq 0} \mathbb{E}[X_t^+].$$

L'autre sens est évident puisque $X_t^+ \leq |X_t|$.

3) De la même façon, une sur-martingale est bornée dans L^1 si et seulement si $\sup_{t \geq 0} \mathbb{E}[X_t^-] < +\infty$

4) En particulier, une sur-martingale positive est bornée dans L^1 et d'après le Th. 4.25 ci-dessus elle converge ps.

Démonstration : Soit D un sous-ensemble dénombrable dense de \mathbb{R}_+ . On déduit de l'inégalité du nombre de montées pour une sous-martingale X (Prop. 4.19) que pour tous $a < b$, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[M_{a,b}^X(D)] &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \mathbb{E}[M_{a,b}^X([0, t] \cap D)] \quad (\text{convergence monotone}) \\ &\leq \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\mathbb{E}[(X_t - a)^+]}{b - a} \quad (\text{inégalité (4.12) sur le nombre de montées}) \\ &\leq \frac{\sup_{t \geq 0} \mathbb{E}[(X_t - a)^+]}{b - a} < +\infty. \end{aligned}$$

On a donc $M_{a,b}^X(D) < +\infty$ ps, pour tout rationnels $a < b$ et aussi $M_{a,b}^X(D) < +\infty$ pour tout rationnels $a < b$ ps. En raisonnant comme pour la preuve de la Prop. 4.21 (existence de limites à droite et à gauche), on en déduit que $X_\infty := \lim_{t \in D \rightarrow +\infty} X_t$ existe ps : sinon, il existerait $a < b$ rationnels tels que $\liminf_{t \in D \rightarrow +\infty} X_t < a < b < \limsup_{t \in D \rightarrow +\infty} X_t$, ce qui exige un nombre infini de montées de a vers b le long de D .

De plus, le lemme de Fatou permet de voir que cette limite est dans L^1 : d'abord, on a

$$\mathbb{E}[|X_\infty|] = \mathbb{E}\left[\lim_{s \rightarrow +\infty} |X_s|\right] = \mathbb{E}\left[\liminf_{s \rightarrow +\infty} |X_s|\right] \leq \liminf_{s \rightarrow +\infty} \mathbb{E}[|X_s|] \leq \sup_{s \geq 0} \mathbb{E}[|X_s|] < +\infty.$$

Pour finir, la continuité à droite des trajectoires de X permet de lever la restriction $t \in D$ dans la limite $X_\infty = \lim_{t \in D \rightarrow +\infty} X_t$ pour avoir (4.17). \square

Définition 4.27 (Martingale fermée)

- Une martingale $(X_t)_{t \geq 0}$ est dite fermée (comme martingale) par une variable aléatoire $Z \in L^1$ si pour tout $t \geq 0$, on a $X_t = \mathbb{E}[Z|\mathcal{F}_t]$.
- Une sous-martingale (resp. sur-martingale) $(X_t)_{t \geq 0}$ est dite fermée par une variable aléatoire $Z \in L^1$ si pour tout $t \geq 0$, on a $X_t \leq \mathbb{E}[Z|\mathcal{F}_t]$ (resp. $X_t \geq \mathbb{E}[Z|\mathcal{F}_t]$).

Attention : une martingale peut être fermée en tant que sous ou sur-martingale mais pas en tant que martingale : considérer par exemple une martingale positive (non nulle), elle est fermée par 0 en tant que sur-martingale pourtant elle n'est pas fermée en tant que martingale puisque non nulle.

Dans le cadre discret une martingale $(Y_n)_{n \geq 0}$ est fermée (ie. il existe une variable aléatoire Z telle que $Y_n = \mathbb{E}[Z|\mathcal{F}_n]$) si et seulement si elle est uniformément intégrable ou si et seulement si Y_n converge ps et dans L^1 . On a une caractérisation analogue dans le cadre continu :

Théorème 4.28 (Convergence ps et L^1 des martingales) Soit $X = (X_t)_{t \geq 0}$ une martingale à trajectoires continues à droite. Alors il y a équivalence entre les assertions suivantes :

- (1) X est fermée par une variable aléatoire $Z \in L^1$;
- (2) la famille $(X_t)_{t \geq 0}$ est uniformément intégrable ;
- (3) X_t converge ps et dans L^1 vers X_∞ .

De plus si la variable aléatoire Z dans 1) est \mathcal{F}_∞ -mesurable alors $X_\infty = Z$.

Remarque 4.29 En tant que variable aléatoire, Z est \mathcal{F} -mesurable et par définition $\mathcal{F}_\infty = \bigvee_{t \geq 0} \mathcal{F}_t := \sigma\left(\bigcup_{t \geq 0} \mathcal{F}_t\right)$. La \mathcal{F}_∞ -mesurabilité de Z n'est donc pas automatique.

Démonstration : L'implication (1) \Rightarrow (2) découle de la propriété générale d'une famille d'espérances conditionnelles : si $Z \in L^1$ alors la famille de variables aléatoires $\{\mathbb{E}[Z|\mathcal{G}] : \mathcal{G} \text{ sous-tribu de } \mathcal{F}\}$ est uniformément intégrable.

Si (2) est vrai, alors en particulier la martingale $(X_t)_{t \geq 0}$ est bornée dans L^1 et le Th. 4.25 (convergence ps) entraîne que X_t converge ps vers une variable aléatoire $X_\infty \in L^1$. Comme $(X_t)_{t \geq 0}$ est uniformément intégrable, par le théorème de Vitali (convergence en proba et uniforme intégrabilité impliquent convergence L^1), la convergence est aussi L^1 , ce qui donne (3).

Enfin, si (3) est vérifié, on peut passer à la limite $t \rightarrow +\infty$ dans L^1 dans l'égalité $X_s = \mathbb{E}[X_t | \mathcal{F}_s]$ et on trouve $X_s = \mathbb{E}[X_\infty | \mathcal{F}_s]$, et trouver que la martingale $(X_t)_{t \geq 0}$ est fermée, c'est à dire (1).

Pour la dernière partie, comme $X_t = \mathbb{E}[Z | \mathcal{F}_t]$ (la martingale est fermée par Z par (1)) et $X_t = \mathbb{E}[X_\infty | \mathcal{F}_t]$ par (3), on a $\mathbb{E}[Y | \mathcal{F}_t] = 0$ pour tout $t \geq 0$, en notant $Y = Z - X_\infty$. On a donc $\mathbb{E}[Y \mathbf{1}_A] = 0$ pour tout $A \in \bigcup_{t \geq 0} \mathcal{F}_t$. Comme $\mathcal{M} = \{A \in \mathcal{F} : \mathbb{E}[Y \mathbf{1}_A] = 0\}$ est une classe monotone et $\bigcup_{t \geq 0} \mathcal{F}_t$ est stable par intersection finie (π -système), le théorème des classes monotones assure que $\mathcal{F}_\infty = \sigma(\bigcup_{t \geq 0} \mathcal{F}_t)$ est inclus dans \mathcal{M} .

Lorsque Z est \mathcal{F}_∞ -mesurable alors Y l'est aussi et on en déduit de $\mathbb{E}[Y \mathbf{1}_A] = 0 \ \forall A \in \mathcal{F}_\infty$ que $Y = 0$ ps (arguments usuels passant des indicatrices aux variables simples, puis positives et enfin de signe quelconque), ie. $Z = X_\infty$ ps. \square

Le Th. 4.28 concerne les martingales (fermées). Pour les sous-martingales fermées, on a seulement la convergence presque sûre :

Proposition 4.30 *Soit $X = (X_t)_{t \geq 0}$ une sous-martingale à trajectoires continues à droite. Si X est fermée alors X_t converge ps vers X_∞ .*

Démonstration : On suppose $(X_t)_{t \geq 0}$ fermée, en tant que sous martingale par $Z : X_t \leq \mathbb{E}[Z | \mathcal{F}_t]$. L'inégalité de Jensen (conditionnelle) appliquée à la sous-martingale X et à la fonction convexe croissante $x \mapsto x^+$, assure $X_t^+ = (\mathbb{E}[Z | \mathcal{F}_t])^+ \leq \mathbb{E}[Z^+ | \mathcal{F}_t]$ puis en prenant l'espérance $\mathbb{E}[X_t^+] \leq \mathbb{E}[Z^+]$. Avec 2) dans la Remarque 4.26, le Th. 4.25 assure alors que X_t converge presque sûrement vers une limite X_∞ lorsque $t \rightarrow +\infty$. \square

4.7 Théorème d'arrêt

Dans le cas discret ($T = \mathbb{N}$), étant données une filtration $(\mathcal{G}_k)_{k \geq 0}$ et une (\mathcal{G}_k) -sous-martingale discrète $(Y_k)_{k \in \mathbb{N}}$, on a le théorème d'arrêt discret

Théorème 4.31 (Arrêt discret) *Soit S et T deux temps d'arrêt tels que $S \leq T$. Alors sous chacune des conditions qui suit, on a $Y_S, Y_T \in L^1$ et $Y_S \leq \mathbb{E}[Y_T | \mathcal{G}_S]$ (avec la convention $Y_T = Y_\infty$ sur $\{T = +\infty\}$).*

- (1) $(Y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est uniformément intégrable ;
- (2) S, T sont (déterministiquement) bornés.

Au sujet de $(Y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ sous-martingale uniformément intégrable dans 1), voir Prop. 4.21-3).

L'analogie en temps continu ($T = \mathbb{R}_+$) de ce Th. 4.31 reste vrai et est un résultat essentiel pour la suite du cours.

On rappelle que la Prop. 4.6 assure qu'une martingale $X = (X_t)_{t \geq 0}$ à trajectoires continues à droite est progressivement mesurable. En particulier, la Prop. 4.12 s'applique et assure qu'alors $X_T \mathbf{1}_{\{T < +\infty\}}$ est \mathcal{F}_T -mesurable. De plus, si $X = (X_t)_{t \geq 0}$ est fermée alors par le Th. 4.28 elle converge et la Remarque 4.13 assure que X_T est \mathcal{F}_T -mesurable.

Théorème 4.32 (Arrêt de Doob) Soit $X = (X_t)_{t \geq 0}$ une sous-martingale à trajectoires continues à droite et S et T deux temps d'arrêt avec $S \leq T$. Sous chacune des hypothèses suivantes, on a X_S et X_T dans L^1 et

$$X_S \leq \mathbb{E}[X_T | \mathcal{F}_S].$$

(1) X est uniformément intégrable ; dans ce cas, elle converge ps vers une variable aléatoire \mathcal{F} -mesurable X_∞ et par convention on pose $X_T = X_\infty$ sur $\{T = +\infty\}$.

(2) S et T sont (déterministiquement) bornés par $K \in \mathbb{R}_+$.

On a des énoncés analogues pour les sur-martingales ou pour les martingales avec

- Sous les mêmes conditions, pour X sur-martingale : $X_S \geq \mathbb{E}[X_T | \mathcal{F}_S]$.
- Sous les mêmes conditions, pour X martingale : $X_S = \mathbb{E}[X_T | \mathcal{F}_S]$, en particulier, $X_S = \mathbb{E}[X_\infty | \mathcal{F}_S]$.

Démonstration : Il suffit de faire la preuve pour X sous-martingale, puisque si X est une sur-martingale, on applique le cas sous-martingale à $-X$ et si X est une martingale on a les inégalités dans les deux sens car X sous-martingale puis sur-martingale, d'où l'égalité.

Soit donc X une sous-martingale à trajectoires continues.

1) On suppose X uniformément intégrable. Pour tout $n \geq 1$, posons $D_n = \{k2^{-n} : k \in \mathbb{N}\} \cup \{+\infty\}$ et comme en (4.1) on pose $T_n = ([2^n T] + 1)2^{-n}$, soit

$$\begin{aligned} T_n &= \inf(t \in D_n : t > T) \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k+1}{2^n} \mathbf{1}_{\{k2^{-n} < T \leq (k+1)2^{-n}\}} + (+\infty) \mathbf{1}_{\{T = +\infty\}}. \end{aligned} \tag{4.18}$$

D'après la Prop. 4.11, les variables aléatoires T_n , $n \geq 1$, forment une suite de temps d'arrêt qui décroît vers T .

Pour $n \geq 1$ fixé, les deux variables aléatoires T_n et T_{n+1} sont deux temps d'arrêt pour la filtration discrète $(\mathcal{F}_t)_{t \in D_{n+1}}$ car

$$\begin{aligned} \{T_n = (k+1)2^{-n}\} &= \{k2^{-n} < T \leq (k+1)2^{-n}\} \\ &= \{T \leq k2^{-n}\}^c \cap \{T \leq (k+1)2^{-n}\} \in \mathcal{F}_{(k+1)2^{-n}}. \end{aligned}$$

Puisque $T_{n+1} \leq T_n$, le théorème d'arrêt discret (Th. 4.31) appliqué à la sous-martingale discrète $(X_t)_{t \in D_{n+1}}$ uniformément intégrable, pour la filtration discrète $(\mathcal{F}_t)_{t \in D_{n+1}}$ entraîne que

$$X_{T_{n+1}} \leq \mathbb{E}[X_{T_n} | \mathcal{F}_{T_{n+1}}].$$

Pour $k \leq 0$, on note $Y_k := X_{T_{-k}}$ et $\mathcal{G}_k = \mathcal{F}_{T_{-k}}$. On a alors

$$Y_{k-1} = X_{T_{-k+1}} \leq \mathbb{E}[X_{T_{-k}} | \mathcal{F}_{T_{-k+1}}] = \mathbb{E}[Y_k | \mathcal{F}_{T_{-k}}].$$

La suite $(Y_k)_{k \in -\mathbb{N}}$ est donc une sous-martingale indexée par $-\mathbb{N}$ pour la filtration $(\mathcal{G}_k)_{k \in -\mathbb{N}}$. De plus, comme $|x| = 2x^+ - x$, on a

$$\begin{aligned} \sup_{k \leq 0} \mathbb{E}[|Y_k|] &= \sup_{n \geq 0} \mathbb{E}[|X_{T_n}|] \leq \sup_{n \geq 0} (2\mathbb{E}[X_{T_n}^+] - \mathbb{E}[X_{T_n}]) \\ &\leq 2\mathbb{E}[X_\infty^+] - \mathbb{E}[X_0] < +\infty \end{aligned} \quad (4.19)$$

en utilisant

- $\mathbb{E}[X_{T_n}] \geq \mathbb{E}[X_0]$ par le théorème d'arrêt discret
- et $\mathbb{E}[X_{T_n}^+] \leq \mathbb{E}[X_\infty^+]$ car X^+ sous-martingale convergeant ps et L^1 vers X_∞^+ .

La borne (4.19) assure qu'on peut utiliser Prop. 4.21-4 pour la convergence de la sous-martingale discrète $(Y_k)_{k \leq 0}$, et on a la convergence ps et L^1 quand $k \rightarrow -\infty$ de $(Y_{-k})_{k \leq 0}$, c'est à dire de $(X_{T_n})_{n \geq 1}$ quand $n \rightarrow +\infty$. Comme $T_n \searrow T$, par continuité à droite, la limite presque sûre est nécessairement X_T , ce qui donne en particulier $X_T \in L^1$ car il y a aussi convergence dans L^1 .

Au temps d'arrêt S , on associe de même qu'en (4.18) la suite $S_n \searrow S$ vérifiant aussi $S_n \leq T_n$ (quitte à réindexer S_n), et X_{S_n} converge vers X_S ps et dans L^1 . Puisque $S_n \leq T_n$, le théorème d'arrêt discret donne $X_{S_n} \leq \mathbb{E}[X_{T_n} | \mathcal{F}_{S_n}]$ ainsi, pour $A \in \mathcal{F}_S \subset \mathcal{F}_{S_n}$, on a :

$$\mathbb{E}[X_{S_n} \mathbf{1}_A] \leq \mathbb{E}[X_{T_n} \mathbf{1}_A].$$

Comme $X_{S_n} \xrightarrow{L^1} X_S$ et $X_{T_n} \xrightarrow{L^1} X_T$, quand $n \rightarrow +\infty$, en passant à la limite L^1 quand $n \rightarrow +\infty$, il vient

$$\mathbb{E}[X_S \mathbf{1}_A] \leq \mathbb{E}[X_T \mathbf{1}_A]$$

pour tout $A \in \mathcal{F}_S$. Comme d'après la Prop. 4.12 et la Remarque 4.13, X_S est \mathcal{F}_S -mesurable, cette inégalité assure alors que $X_S \leq \mathbb{E}[X_T | \mathcal{F}_S]$, ce qui conclut le 1). Soit $a \geq 0$ tel que $T \leq a$.

2) On suppose $S \leq T$ bornés par $K \in \mathbb{R}_+$. On applique le cas 1) à la sous-martingale $X^K = (X_{t \wedge K})_{t \geq 0}$ qui est fermée par X_K . Puis on remarque que $X_T^K = X_{T \wedge K} = X_T$ et $X_S^K = X_{S \wedge K} = X_S$. \square

Remarque 4.33 (Sur le mouvement brownien) Le théorème d'arrêt ne s'applique que pour des (sous/sur-) martingales uniformément intégrables (fermées, Th. 4.32-1)) ou pour des temps d'arrêt (déterministiquement) bornés (Th. 4.32-2)). Par exemple si B est un mouvement brownien, c'est bien une martingale (mais non uniformément intégrable sinon le Th. 4.25 (convergence ps) exigerait la convergence ps $B_t \rightarrow B_\infty$ ce qui est faux). Si pour $a > 0$, on pose $T_a = \inf(t \geq 0 : B_t = a)$ alors on a bien un temps d'arrêt mais il est non (déterministiquement) borné, cf. (3.9) dans la Remarque 3.43. Le théorème d'arrêt (Th. 4.32) ne s'applique effectivement pas dans ce cas puisque $\mathbb{E}[B_0] = 0 \neq \mathbb{E}[B_{T_a}] = a$ malgré $0 \leq T_a$.

Définition 4.34 (Martingale arrêtée) *Étant donné un temps d'arrêt T , on définit le processus arrêté $X^T = (X_t^T)_{t \geq 0}$ par $X_t^T := X_{t \wedge T}$, c'est le processus qui vaut X_t tant que $t \leq T$ puis qu'on arrête à sa valeur X_T en T pour les dates ultérieures à T .*

Corollaire 4.35 *Soit X une martingale à trajectoires continues à droite, uniformément intégrable, et soit T un temps d'arrêt. Alors le processus $(X_t^T)_{t \geq 0}$ est aussi une martingale uniformément intégrable, et*

$$X_t^T = \mathbb{E}[X_T | \mathcal{F}_t] \quad (4.20)$$

avec la convention $X_T = X_\infty = \lim_{t \rightarrow +\infty} X_t$ sur $\{T = +\infty\}$.

Démonstration : Il suffit d'établir (4.20) : on aura alors une martingale fermée donc uniformément intégrable (Th. 4.28). Rappelons que $X_T \in L^1$ d'après le théorème d'arrêt (Th. 4.32). Comme $S := t \wedge T \leq T$, ce même théorème assure

$$X_t^T = X_S = \mathbb{E}[X_T | \mathcal{F}_S] = \mathbb{E}[X_T | \mathcal{F}_{t \wedge T}].$$

Il reste à voir que

$$\mathbb{E}[X_T | \mathcal{F}_{t \wedge T}] = \mathbb{E}[X_T | \mathcal{F}_t]. \quad (4.21)$$

Puisque $X_T \mathbf{1}_{\{T < +\infty\}}$ est \mathcal{F}_T -mesurable (Prop. 4.12), la Prop. 4.10 assure que $X_T \mathbf{1}_{\{T \leq t\}}$ est \mathcal{F}_t -mesurable et aussi \mathcal{F}_T -mesurable, donc $\mathcal{F}_{t \wedge T}$ -mesurable. Il en découle que

$$\mathbb{E}[X_T \mathbf{1}_{\{T \leq t\}} | \mathcal{F}_{t \wedge T}] = X_T \mathbf{1}_{\{T \leq t\}} = \mathbb{E}[X_T \mathbf{1}_{\{T \leq t\}} | \mathcal{F}_t]. \quad (4.22)$$

Pour compléter la preuve de (4.21), il reste à voir que

$$\mathbb{E}[X_T \mathbf{1}_{\{T > t\}} | \mathcal{F}_{t \wedge T}] = \mathbb{E}[X_T \mathbf{1}_{\{T > t\}} | \mathcal{F}_t]. \quad (4.23)$$

Or si $A \in \mathcal{F}_t$, on a

- $A \cap \{T > t\} \in \mathcal{F}_t$ car $A, \{T > t\} = \{T \leq t\}^c \in \mathcal{F}_t$;
- puis $A \cap \{T > t\} \in \mathcal{F}_T$ car $A \cap \{T > t\} \cap \{T \leq s\} = \emptyset \in \mathcal{F}_s$ si $s \leq t$ et $A \cap \{T > t\} \cap \{T \leq s\} \in \mathcal{F}_s$ si $t \leq s$ car $A, \{T > t\} = \{T \leq t\}^c \in \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}_s$ et $\{T \leq s\} \in \mathcal{F}_s$.

Finalement, $A \cap \{T > t\} \in \mathcal{F}_T \cap \mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t \wedge T}$ (Prop. 4.9-8)). On a aussi $\{T > t\} \in \mathcal{F}_{t \wedge T} = \mathcal{F}_t \cap \mathcal{F}_T$ car

- $\{T > t\} = \{T \leq t\}^c \in \mathcal{F}_t$
- et $\{T > t\} \in \mathcal{F}_T$ car $\{T > t\} = \{T \leq t\}^c$ et pour tout $s \geq 0$: $\{T \leq t\} \cap \{T \leq s\} = \{T \leq t \wedge s\} \in \mathcal{F}_{t \wedge s} \subset \mathcal{F}_s$.

Pour tout $A \in \mathcal{F}_t$, on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\mathbf{1}_A \mathbf{1}_{\{T > t\}} X_T] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[\mathbf{1}_A \mathbf{1}_{\{T > t\}} X_T | \mathcal{F}_{t \wedge T}]] = \mathbb{E}[\mathbf{1}_A \mathbf{1}_{\{T > t\}} \mathbb{E}[X_T | \mathcal{F}_{t \wedge T}]] \\ &= \mathbb{E}[\mathbf{1}_A \mathbb{E}[X_T \mathbf{1}_{\{T > t\}} | \mathcal{F}_{t \wedge T}]]. \end{aligned}$$

Comme $\mathbb{E}[X_T \mathbf{1}_{\{T > t\}} | \mathcal{F}_{t \wedge T}]$ est $\mathcal{F}_{t \wedge T}$ - donc \mathcal{F}_t -mesurable, on a

$$\mathbb{E}[X_T \mathbf{1}_{\{T > t\}} | \mathcal{F}_{t \wedge T}] = \mathbb{E}[X_T \mathbf{1}_{\{T > t\}} | \mathcal{F}_t]$$

c'est à dire (4.23), et compte tenu de (4.22), cela termine la preuve du Corollaire 4.35. \square

On a aussi

Corollaire 4.36 (Martingale arrêtée) *Soit X est une martingale à trajectoires continues et T un temps d'arrêt. Alors $X^T = (X_{t \wedge T})_{t \geq 0}$ définit bien une martingale appelée **martingale arrêtée**. Elle est uniformément intégrable si X l'est ou si T est (déterministiquement) borné.*

Démonstration : Étant donné $a > 0$ quelconque, on considère $Y = (X_{t \wedge a})_{t \geq 0}$. Il s'agit d'une martingale fermée par X_a donc elle est uniformément intégrable (Th. 4.28). Par le Corollaire 4.35, pour tout temps d'arrêt T , $Y^T = (X_{t \wedge T \wedge a})_{t \geq 0}$ est une martingale uniformément intégrable. Comme on peut prendre $a > 0$ aussi grand qu'on le désire, on récupère la propriété de martingale directement pour $X^T = (X_{t \wedge T})_{t \geq 0}$: étant donnés $s \leq t$, on prend $a > t \geq s$, et la propriété de martingale pour $Y^T = (X_{t \wedge T \wedge a})_{t \geq 0}$, $\mathbb{E}[X_{t \wedge T \wedge a} | \mathcal{F}_s] = X_{s \wedge T \wedge a}$, s'écrit $\mathbb{E}[X_{t \wedge T} | \mathcal{F}_s] = X_{s \wedge T}$, c'est à dire : $X^T = (X_{t \wedge T})_{t \geq 0}$ est bien une martingale. \square

4.8 Processus de Poisson

Si le mouvement brownien est le processus à trajectoires continues typique, le processus à saut typique est le processus de Poisson qu'on décrit (très) sommairement dans cette section. Ce type de processus est utilisé par exemple pour modéliser les files d'attente comme les arrivées des appels téléphoniques à un central.

Définition 4.37 (Processus de Poisson) *Soit $\lambda > 0$ et $(S_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$. On pose $T_n = S_1 + \dots + S_n$. On définit alors le processus de comptage $N = (N_t)_{t \geq 0}$ à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ par*

$$N_t = \sum_{n \geq 1} \mathbf{1}_{\{T_n \leq t\}}.$$

Ce processus s'appelle le processus de Poisson d'intensité λ .

Définition 4.38 *On définit $(\mathcal{F}_t^N)_{t \geq 0}$ la filtration naturelle complétée du processus de Poisson.*

Remarque 4.39 Le processus se réécrit aussi sous la forme $N_t = \sup \{n \geq 0 : T_n \leq t\}$. Réciproquement, on remarque que $T_n = \inf \{t \geq 0 : N_t = n\}$ est un (\mathcal{F}_t^N) -temps d'arrêt.

Comme pour $t > s$, on a $N_t - N_s = \sum_{n \geq 1} \mathbf{1}_{\{s < T_n \leq t\}}$, N est un processus à accroissements indépendants et stationnaires (PAIS) et à trajectoires càdlàg. On montre qu'il vérifie alors la **propriété de Markov forte** : soit T un (\mathcal{F}_t^N) -temps d'arrêt fini presque sûrement ; on note N' le processus défini pour $s \geq 0$ par $N'_s = N_{T+s} - N_T$. Alors le processus N' est indépendant de \mathcal{F}_T^N et a même loi que N .

Proposition 4.40 (Caractérisation du processus de Poisson) *Un processus $N = (N_t)_{t \geq 0}$ est un processus de Poisson d'intensité λ si et seulement si il s'agit d'un processus de comptage à trajectoires continues à droite tel que*

- $N(0) = 0$;
- N est un processus à accroissements indépendants et stationnaires ;
- pour tout $t \geq 0$, N_t suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda t)$.

Démonstration : Calculs fastidieux... , cf. [BC]. □

Théorème 4.41 *Soit N un processus de Poisson d'intensité λ . Alors les processus suivants sont des martingales :*

1. le processus de Poisson compensé : $\tilde{N} = (N_t - \lambda t, t \geq 0)$;
2. $((N_t - \lambda t)^2 - \lambda t)_{t \geq 0}$.

Remarque 4.42 — On peut voir le processus de Poisson comme une mesure aléatoire sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$: la mesure de l'intervalle $]s, t]$ est $N(]s, t]) = N_t - N_s$.

- Le mouvement brownien et le processus de Poisson sont deux représentants d'une classe plus vaste de **processus** dit **de Lévy** (processus càdlàg à accroissements indépendants et stationnaires).

Chapitre 5

Semimartingales continues

Les semimartingales continues forment la classe générale de processus à trajectoires continues pour laquelle on peut développer une théorie de l'intégration stochastique qui sera l'objet du chapitre suivant. Par définition, une semimartingale est la somme d'une martingale (locale) et d'un processus à variation bornée. Dans ce chapitre nous étudions séparément ces deux classes de processus. En particulier, nous introduisons la notion de variation quadratique d'une martingale qui jouera un rôle fondamental pour l'intégration stochastique.

Dans ce chapitre, on considère un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ satisfaisant les conditions habituelles. On considère d'abord des processus à variation bornée en Section 5.1 puis des martingales locales en Section 5.2 dont on étudie la variation quadratique en Section 5.3. On résume les résultats obtenus pour les semimartingales en Section 5.4.

5.1 Processus à variation bornée

5.1.1 Fonctions à variation bornée

Soit $T > 0$ fixé. On rappelle qu'il y a une bijection entre les fonctions croissantes continues à droite $g : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}_+$ et les mesures ν positives finies sur $[0, T]$. Elle est donnée par $g(t) = \nu([0, t])$ où $\nu([s, t]) = g(t) - g(s)$. La donnée de ν sur les intervalles $]s, t]$ déterminent uniquement la mesure ν sur $\mathcal{B}([0, T])$ (par un argument de classe monotone). Si g est en plus supposée continue alors ν est sans atome (ie. $\nu(\{t\}) = 0$ pour tout $t \in [0, T]$).

Exemple 5.1 Si $g(x) = x$ alors ν est la mesure de Lebesgue λ ; si $g(x) = \mathbf{1}_{[a, +\infty[}(x)$ alors ν est la mesure de Dirac δ_a .

Définition 5.2 (Mesure signée) Une mesure finie est dite signée si elle est différence de deux mesures positives finies.

L'écriture d'une mesure μ signée sous la forme d'une différence de deux mesures positives finies n'est pas unique, cependant il existe une seule décomposition canonique :

Proposition 5.3 (Décomposition canonique d'une mesure signée) *Il existe une seule décomposition $\mu = \mu_+ - \mu_-$ minimale dans le sens où μ_+ et μ_- sont deux mesures positives finies portées par des boréliens disjoints. Il s'agit de la décomposition canonique de μ .*

Dans la suite, pour une fonction h à valeurs réelles, on note $h^+ = h \vee 0$ et $h^- = -(-h \vee 0)$ ses parties positive et négative.

Démonstration : Pour obtenir l'existence d'une telle décomposition, on considère une décomposition quelconque $\mu = \mu_1 - \mu_2$ de μ , on pose $\nu = \mu_1 + \mu_2$. Comme $\mu_1 \ll \nu$ et $\mu_2 \ll \nu$, on écrit par le théorème de Radon-Nikodym :

$$\mu_1(dt) = h_1(t)\nu(dt), \quad \mu_2(dt) = h_2(t)\nu(dt).$$

Avec $h := h_1 - h_2$ on a

$$\mu(dt) = h(t)\nu(dt) = h(t)^+\nu(dt) - h(t)^-\nu(dt)$$

ce qui donne la décomposition $\mu = \mu_+ - \mu_-$ avec $\mu_+(dt) = h(t)^+\nu(dt)$, $\mu_-(dt) = h(t)^-\nu(dt)$. Notons que les mesures μ_+ et μ_- sont bien à supports disjoints puisqu'elles sont portées respectivement par $D_+ = \{t \in [0, T] : h(t) > 0\}$ et $D_- = \{t \in [0, T] : h(t) < 0\}$. L'unicité de la décomposition $\mu = \mu_+ - \mu_-$ vient du fait que l'on a nécessairement

$$\mu_+(A) = \sup (\mu(C) : C \subset A, C \text{ borélien}).$$

En effet $\mu(C) \leq \mu_+(C) \leq \mu_+(A)$ quand $C \subset A$ et

$$\mu_+(A) = \mu_+(A \cap D_+) = \mu(A \cap D_+) \leq \sup (\mu(C) : C \subset A, C \text{ borélien}).$$

□

On note $|\mu|$ la mesure positive $|\mu| = \mu_+ + \mu_-$. Il s'agit de la **variation totale** de μ . Remarquons que la dérivée de Radon-Nikodym de μ par rapport à $|\mu|$ est

$$\frac{d\mu}{d|\mu|} = \mathbf{1}_{D_+} - \mathbf{1}_{D_-}$$

où $D_+ \cup D_-$ est une partition de l'espace.

Définition 5.4 (Fonction à variation bornée) *Soit $T > 0$. Une fonction continue $F : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $F(0) = 0$ est dite à variation bornée s'il existe une mesure signée (ie. différence de deux mesures positives finies) μ telle que $F(t) = \mu([0, t])$ pour tout $t \in [0, T]$.*

La mesure μ est alors déterminée de façon unique : l'expression $\mu([s, t]) = F(t) - F(s)$ la détermine uniquement sur la famille des intervalles $]s, t]$ puis, par un argument de classe monotone, sur $\mathcal{B}([0, T])$. De plus, F étant continue, μ est sans atome.

Proposition 5.5 *Une fonction F est à variation bornée si et seulement si F est différence de deux fonctions croissantes continues nulles en 0.*

Démonstration : Si F est à variation bornée, $F(t) = \mu([0, t])$ et avec la décomposition canonique de μ de la Proposition 5.3, F est différence de deux fonctions croissantes continues et nulles en 0 : $F(t) = \mu_+([0, t]) - \mu_-([0, t])$ (si μ_+ et μ_- ont des atomes, ils doivent nécessairement coïncider pour s'annuler (μ n'en ayant pas)). Mais comme μ_+ et μ_- sont censés avoir des supports disjoints, c'est que de tels atomes n'existent pas : μ_+ et μ_- sont bien sans atome. Réciproquement, si $F = F_1 - F_2$ avec F_1, F_2 fonctions croissantes continues et nulles en 0 alors on associe μ_1 et μ_2 des mesures positives finies à F_1, F_2 et F s'écrit alors $F(t) = \mu([0, t])$ pour la mesure signée $\mu = \mu_1 - \mu_2$. \square

Dans la suite, on note μ la mesure associée à F et $\mu_+ - \mu_-$ la décomposition canonique de μ . La fonction définie par $\mu^+([0, t]) + \mu^-([0, t])$ s'appelle la **variation totale** de F . D'habitude, les fonctions à variation bornée sont plutôt définies par la propriété suivante :

Proposition 5.6 (Variation bornée) *Pour tout $t \in [0, T]$, on a*

$$|\mu|([0, t]) = \sup_{\{t_i\}_{i=1, \dots, p}} \left\{ \sum_{i=1}^p |F(t_i) - F(t_{i-1})| \right\}$$

où le supremum porte sur toutes les subdivisions $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_p = t$ de $[0, t]$.

Démonstration : Il suffit de traiter le cas $t = T$. L'inégalité \geq s'obtient facilement puisque

$$|F(t_i) - F(t_{i-1})| = |\mu([t_{i-1}, t_i])| \leq |\mu|([t_{i-1}, t_i])$$

et donc $\sum_{i=1}^p |F(t_i) - F(t_{i-1})| \leq \sum_{i=1}^p |\mu|([t_{i-1}, t_i]) = |\mu|([0, T]) = |\mu|([0, T])$ par additivité de $|\mu|$. Pour l'autre inégalité, on montre le résultat plus fort suivant : pour toute suite $0 = t_0^n < t_1^n < \dots < t_{p_n}^n = T$ de subdivisions emboîtées de $[0, T]$ de pas tendant vers 0, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^{p_n} |F(t_i^n) - F(t_{i-1}^n)| = |\mu|([0, T]).$$

Pour simplifier, on considère les subdivisions dyadiques $t_i^n = i2^{-n}T$, $0 \leq i \leq 2^n$, de $[0, T]$. On utilise un argument de martingales en introduisant l'espace de probabilité

$$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) = \left([0, T], \mathcal{B}([0, T]), \frac{|\mu|(ds)}{(|\mu|([0, T])^{-1})} \right).$$

Sur cet espace, on considère la filtration discrète $(\mathcal{B}_n)_{n \geq 0}$ où \mathcal{B}_n est la tribu engendrée par les intervalles $[(i-1)2^{-n}T, i2^{-n}T]$, avec $1 \leq i \leq 2^n$. On pose alors

$$X(s) = \frac{d\mu}{d|\mu|}(s) = \mathbf{1}_{D_+}(s) - \mathbf{1}_{D_-}(s)$$

où $D_+ \cup D_-$ est une partition de l'espace et on considère pour chaque $n \geq 0$

$$X_n = \mathbb{E}[X | \mathcal{B}_n].$$

Il s'agit d'une $(\mathcal{B}_n)_{n \geq 0}$ -martingale. Comme X_n est \mathcal{B}_n -mesurable, X_n est constante sur chaque intervalle $[(i-1)2^{-n}T, i2^{-n}T]$ et vaut

$$\begin{aligned} \alpha_i &= \frac{\mathbb{E}[X \mathbf{1}_{[(i-1)2^{-n}T, i2^{-n}T]}]}{\mathbb{P}([(i-1)2^{-n}T, i2^{-n}T])} = \frac{\int_{[(i-1)2^{-n}T, i2^{-n}T]} \frac{d\mu}{d|\mu|}(s) \frac{|\mu|(ds)}{(|\mu|([0, T])^{-1})}}{\int_{[(i-1)2^{-n}T, i2^{-n}T]} \frac{|\mu|(ds)}{(|\mu|([0, T])^{-1})}}} \\ &= \frac{\mu([(i-1)2^{-n}T, i2^{-n}T])}{|\mu|([(i-1)2^{-n}T, i2^{-n}T])} = \frac{F(i2^{-n}T) - F((i-1)2^{-n}T)}{|\mu|([(i-1)2^{-n}T, i2^{-n}T])}. \end{aligned}$$

Par définition, la martingale discrète $(X_n)_{n \geq 0}$ est fermée et comme X est mesurable par rapport à $\mathcal{B}([0, T]) = \bigvee_{n \geq 0} \mathcal{B}_n$, $(X_n)_{n \geq 0}$ converge ps et dans L^1 vers X . En particulier,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}[|X_n|] = \mathbb{E}[|X|] = 1,$$

où on utilise $|X(s)| = 1$, μ -pp. Le résultat suit facilement puisque

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[|X_n|] &= \sum_{i=1}^{2^n} |\alpha_i| \frac{|\mu|([(i-1)2^{-n}T, i2^{-n}T])}{|\mu|([0, T])^{-1}} \\ &= \frac{1}{|\mu|([0, T])} \sum_{i=1}^{2^n} |F(i2^{-n}T) - F((i-1)2^{-n}T)|. \end{aligned}$$

□

5.1.2 Intégrale de Stieltjes

Soit $f : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction mesurable telle que $\int_{[0, T]} |f(s)| |\mu|(ds) < +\infty$. On note

$$\int_0^t f(s) dF(s) = \int_{[0, t]} f(s) \mu(ds), \quad \int_0^t f(s) |dF(s)| = \int_{[0, t]} f(s) |\mu|(ds).$$

On vérifie facilement l'inégalité

$$\left| \int_0^t f(s) dF(s) \right| \leq \int_0^t |f(s)| |dF(s)|.$$

Remarquons de plus que la fonction $t \mapsto \int_0^t f(s) dF(s)$ est aussi à variation bornée. La mesure associée est alors simplement $\mu'(ds) = f(s)\mu(ds)$ et sa décomposition canonique est

$$\left(\int_0^t f^+(s) dF^+(s) + \int_0^t f^-(s) dF^-(s) \right) - \left(\int_0^t f^-(s) dF^+(s) + \int_0^t f^+(s) dF^-(s) \right).$$

On a aussi une écriture en terme d'intégrales par rapport à des mesures positives

$$\int_0^t f(s) dF(s) = \int_0^t f(s) dF^+(s) - \int_0^t f(s) dF^-(s).$$

On a encore l'associativité de l'intégrale : si F est une fonction à variation bornée et si h, g sont des fonctions mesurables bornées alors en notant $\tilde{F}(t) = \int_0^t h(s) dF(s)$, on a

$$\int_0^t g(s) d\tilde{F}(s) = \int_0^t g(s) h(s) dF(s).$$

Le résultat suivant généralise les sommes de Riemann à l'intégrale de Stieltjes et donne donc un moyen d'approcher les intégrales de Stieltjes par des sommes.

Proposition 5.7 (Approximation de Riemann des intégrales stochastiques) *Si $f : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue et si $0 = t_0^n < t_1^n < \dots < t_{p_n}^n = T$ est une suite de subdivisions emboîtées de $[0, T]$ de pas tendant vers 0. Alors on a :*

$$\int_0^T f(s) dF(s) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^{p_n} f(t_{i-1}^n) (F(t_i^n) - F(t_{i-1}^n)).$$

Démonstration : Soit f_n la fonction constante par morceaux définie par $f_n(s) = f(t_{i-1}^n)$ si $s \in]t_{i-1}^n, t_i^n]$. Alors,

$$\sum_{i=1}^{p_n} f(t_{i-1}^n) (F(t_i^n) - F(t_{i-1}^n)) = \int_{[0, T]} f_n(s) \mu(ds)$$

et le résultat suit par convergence dominée (f continue sur $[0, T]$ est bornée). \square

5.1.3 Extension de l'intégration de Stieltjes à \mathbb{R}_+

Définition 5.8 (Variation bornée sur \mathbb{R}_+) *Une fonction continue $F : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ est dite à variation bornée sur \mathbb{R}_+ si, pour tout $T > 0$, la restriction de F à $[0, T]$ est à variation bornée.*

Il est alors facile d'étendre les définitions précédentes des intégrales à \mathbb{R}_+ en supposant f dF -intégrable. En particulier, on peut définir $\int_0^{+\infty} f(s) dF(s)$ pour toute fonction f telle que $\int_0^{+\infty} |f(s)| |dF(s)| = \sup_{T>0} \int_0^T |f(s)| |dF(s)| < +\infty$.

5.1.4 Processus à variation bornée

On rappelle qu'on considère un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ satisfaisant les conditions habituelles.

Définition 5.9 (Processus à variation bornée et processus croissant)

- Un processus à variation bornée $A = (A_t)_{t \geq 0}$ est un processus adapté dont toutes les trajectoires sont à variation bornée au sens de la Définition 5.4.
- Le processus A est appelé processus croissant si de plus les trajectoires de A sont croissantes.

Remarque 5.10 — En particulier, d'après la Définition 5.4 d'une fonction à variation bornée, on a $A_0 = 0$ et les trajectoires de A sont continues.

- Le mouvement brownien n'est pas à variation bornée, cf. Prop. 3.30 : on ne pourra donc pas utiliser cette section pour construire l'intégrale contre un mouvement brownien !

Proposition 5.11 Soit A un processus à variation bornée et H un processus progressif tel que

$$\forall t \geq 0, \forall \omega \in \Omega, \quad \int_0^t |H_s(\omega)| |dA_s(\omega)| < +\infty.$$

Alors le processus $H \cdot A$ défini par

$$(H \cdot A)_t = \int_0^t H_s(\omega) dA_s(\omega)$$

est aussi un processus à variation bornée.

Remarque 5.12 Quand on intègre contre un processus à variation bornée, on définit une intégrale trajectorielle : l'intégrale se définit ω par ω (ie. trajectoire par trajectoire).

Démonstration : D'après les observations de la section précédente, les trajectoires de $H \cdot A$ sont à variation bornée. Il ne reste donc qu'à justifier que $H \cdot A$ est bien adapté. Pour cela, il suffit de voir que, si $h : [0, t] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est mesurable pour la tribu produit $\mathcal{B}([0, t]) \otimes \mathcal{F}_t$ et si $\int_0^t |h(s, \omega)| |dA_s(\omega)|$ est fini pour tout ω , alors la variable aléatoire $\int_0^t h(s, \omega) dA_s(\omega)$ est \mathcal{F}_t -mesurable.

D'abord, pour $h(s, \omega) = \mathbf{1}_{]u, v]}(s) \mathbf{1}_\Gamma(\omega)$ avec $]u, v] \subset [0, t]$ et $\Gamma \in \mathcal{F}_t$, on a

$$\int_0^t h(s, \omega) dA_s(\omega) = (A_v(\omega) - A_u(\omega)) \mathbf{1}_\Gamma(\omega)$$

qui est clairement \mathcal{F}_t -mesurable puisque $(A_t)_{t \geq 0}$ est adapté, $u, v \leq t$ et $\Gamma \in \mathcal{F}_t$.

Par un argument de classe monotone, comme $\{]u, v] \times \Gamma,]u, v] \subset [0, t] : \Gamma \in \mathcal{F}_t\}$ est un π -système qui engendre $\mathcal{B}([0, t]) \otimes \mathcal{F}_t$, on a aussi $\int_0^t h(s, \omega) dA_s(\omega)$ est \mathcal{F}_t -mesurable pour $h = \mathbf{1}_G$, $G \in \mathcal{B}([0, t]) \otimes \mathcal{F}_t$.

Enfin, on passe au cas général en écrivant h fonction $\mathcal{B}([0, t]) \otimes \mathcal{F}_t$ -mesurable, $|dA_s|(\omega)$ -intégrable, comme limite simple d'une suite de fonctions étagées h_n telles que pour tout n on ait $|h_n| \leq |h|$. Par convergence dominée (pour l'intégrale de Stieltjes), on a

$$\int_0^t h_n(s, \omega) dA_s(\omega) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^t h(s, \omega) dA_s(\omega).$$

Comme le cas précédent assure que $\int_0^t h_n(s, \omega) dA_s(\omega)$ est \mathcal{F}_t -mesurable et que la \mathcal{F}_t -mesurabilité se conserve en passant à la limite, on obtient la Prop. 5.11. \square

Remarque 5.13 — Souvent, on sera dans la situation où l'hypothèse plus faible suivante est satisfaite :

$$\text{ps} \quad \forall t \geq 0, \quad \int_0^t |H_s| |dA_s| < +\infty.$$

Dans ce cas, on peut encore définir $H \cdot A$ en convenant que, sur l'ensemble de probabilité nulle où $\int_0^t |H_s| |dA_s|$ devient infini, on prend $(H \cdot A)_t(\omega) = 0$ pour tout $t \geq 0$. Le processus $(H \cdot A)$ ainsi défini reste adapté lorsque la filtration est supposée complète (conditions habituelles).

— Sous des hypothèses convenables d'intégrabilité de H et de K , on a la propriété d'associativité, due à celle de l'intégrale de Stieltjes :

$$K \cdot (H \cdot A) = (KH) \cdot A.$$

Un cas particulier important est celui où $A_t = t$: soit $H = (H_t)_{t \geq 0}$ un processus progressif tel que

$$\text{ps} \quad \forall t \geq 0 \quad \int_0^t |H_s| ds < +\infty,$$

le processus $\int_0^t H_s ds$ est un processus à variation bornée.

5.2 Martingales locales

Si T est un temps d'arrêt et $X = (X_t)_{t \geq 0}$ un processus à trajectoires continues, on rappelle que X^T désigne le processus arrêté : pour tout $t \geq 0$, $X_t^T = X_{t \wedge T}$. On a vu que si X est une martingale alors X^T l'est aussi (il s'agit de la martingale arrêtée, cf. Corollaire 4.36).

Définition 5.14 (Martingale locale) *Un processus $M = (M_t)_{t \geq 0}$ est appelé une martingale locale (continue) s'il s'écrit $M_t = M_0 + N_t$ où*

- M_0 est une variable aléatoire \mathcal{F}_0 -mesurable et
- $(N_t)_{t \geq 0}$ est un processus adapté à trajectoires continues avec $N_0 = 0$ et tel qu'il existe une suite croissante $(T_n)_{n \geq 0}$ de temps d'arrêt avec $T_n \nearrow +\infty$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ le processus arrêté N^{T_n} est une martingale uniformément intégrable.

On dit que la suite de temps d'arrêt $T_n \nearrow +\infty$ réduit M si pour tout $n \in \mathbb{N}$ le processus arrêté N^{T_n} est une martingale uniformément intégrable.

Lorsque $M_0 = 0$, on parle de martingale locale issue de 0.

Remarque 5.15 On n'impose pas dans la définition d'une martingale locale que les variables M_t soient dans L^1 (c'est une différence essentielle avec les martingales). En particulier, d'après la définition précédente, M_0 peut être n'importe quelle variable aléatoire \mathcal{F}_0 -mesurable.

Dans les propriétés qui suivent, la plupart des justifications viennent des propriétés des martingales arrêtées énoncées dans le Corollaire 4.36.

Exemple 5.16 Une martingale à trajectoires continues est une martingale locale (et la suite $T_n = n$ réduit M).

En effet, cela suit par exemple du Corollaire 4.36 et de ses conséquences avec les temps d'arrêt $T_n = n \nearrow +\infty$, plus simplement, en écrivant $M = M_0 + N$ il est immédiat que pour $s < t$:

$$N_{s \wedge n} = \mathbb{E}[N_{t \wedge n} | \mathcal{F}_s]$$

et $(N_{t \wedge n})_{t \geq 0}$ est fermée par N_n donc est uniformément intégrable.

Proposition 5.17 Dans la définition d'une martingale locale (issue de 0), on peut remplacer "martingale uniformément intégrable" par "martingale" (en effet, on peut ensuite remplacer T_n par $T_n \wedge n$ pour récupérer l'uniforme intégrabilité).

Démonstration : Si M^{T_n} est une martingale alors $(M^{T_n})^n = M^{T_n \wedge n}$ l'est aussi et elle est fermée par M_n donc uniformément intégrable. De plus, il est évident que $(T_n \wedge n) \nearrow +\infty$ lorsque $T_n \nearrow +\infty$. \square

Proposition 5.18 Si M est une martingale locale, pour tout temps d'arrêt T , alors M^T est encore une martingale locale.

Démonstration : Si la suite $(T_n)_{n \geq 0}$ réduit M alors M^{T_n} est une martingale et $(M^T)^{T_n} = M^{T \wedge T_n} = (M^{T_n})^T$ l'est aussi d'après le Corollaire 4.36. \square

Proposition 5.19 Si $(T_n)_{n \geq 0}$ réduit une martingale locale M et si $(S_n)_{n \geq 0}$ est une suite de temps d'arrêt telle que $S_n \rightarrow +\infty$, alors la suite $(T_n \wedge S_n)_{n \geq 0}$ réduit encore M .

Démonstration : On a $(T_n \wedge S_n) \nearrow +\infty$ et $M^{T_n \wedge S_n} = (M^{T_n})^{S_n}$ est une martingale uniformément intégrable en tant que martingale uniformément intégrable M^{T_n} arrêtée (Corollaire 4.36). \square

Proposition 5.20 L'espace des martingales locales est un espace vectoriel.

Démonstration : Si M, N sont des martingales locales réduites respectivement par $(T_n)_{n \geq 0}$ et $(S_n)_{n \geq 0}$ alors d'après la Prop. 5.19, elles le sont encore toutes les deux par $(T_n \wedge S_n)_{n \geq 0}$. Mais alors $(M + N)^{T_n \wedge S_n} = M^{T_n \wedge S_n} + N^{T_n \wedge S_n}$ est une martingale, comme somme de martingales. \square

Proposition 5.21 Une martingale locale **positive** M telle que $M_0 \in L^1$ est une sur-martingale.

D'après le Théorème 4.25 (convergence ps des sur-martingales) et la Remarque 4.26 qui le suit, une martingale locale positive converge donc presque sûrement.

Démonstration : Écrivons $M_t = M_0 + N_t$ et soit $(T_n)_{n \geq 0}$ une suite de temps d'arrêt qui réduit N . Alors, si $s \leq t$, on a pour tout $n \geq 0$,

$$N_{s \wedge T_n} = \mathbb{E}[N_{t \wedge T_n} | \mathcal{F}_s].$$

En ajoutant des deux côtés la variable aléatoire M_0 (qui est \mathcal{F}_0 -mesurable et dans L^1), on trouve

$$M_{s \wedge T_n} = \mathbb{E}[M_{t \wedge T_n} | \mathcal{F}_s]. \quad (5.1)$$

Puisque M est positive, on peut appliquer le lemme de Fatou pour les espérances conditionnelles en faisant $n \rightarrow +\infty$. Comme $T_n \nearrow +\infty$ ps, on a alors

$$\begin{aligned} M_s &= \lim_{n \rightarrow +\infty} M_{s \wedge T_n} = \liminf_{n \rightarrow +\infty} M_{s \wedge T_n} = \liminf_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}[M_{t \wedge T_n} | \mathcal{F}_s] \\ &\geq \mathbb{E}\left[\liminf_{n \rightarrow +\infty} M_{t \wedge T_n} | \mathcal{F}_s\right] = \mathbb{E}[M_t | \mathcal{F}_s]. \end{aligned}$$

En particulier, en prenant $s = 0$ et l'espérance, on a $\mathbb{E}[M_t] \leq \mathbb{E}[M_0] < +\infty$, donc comme M est positive, $M_t \in L^1$ pour tout $t \geq 0$. L'inégalité précédente assure alors que M est bien une sur-martingale. \square

Proposition 5.22 *Soit M une martingale locale. S'il existe une variable $Z \in L^1$ telle que, pour tout $t \geq 0$, $|M_t| \leq Z$, alors M est une martingale. En particulier, une martingale locale bornée est une martingale.*

Démonstration : Si M est dominée par une variable aléatoire Z intégrable, on obtient comme pour la Prop. 5.21 pour $s \leq t$:

$$M_{s \wedge T_n} = \mathbb{E}[M_{t \wedge T_n} | \mathcal{F}_s].$$

Comme par convergence dominée la suite $M_{t \wedge T_n}$ converge dans L^1 vers M_t , on peut passer à la limite $n \rightarrow +\infty$ pour trouver

$$M_s = \lim_{n \rightarrow +\infty} M_{s \wedge T_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}[M_{t \wedge T_n} | \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}\left[\lim_{n \rightarrow +\infty} M_{t \wedge T_n} | \mathcal{F}_s\right] = \mathbb{E}[M_t | \mathcal{F}_s].$$

\square

Remarque 5.23 Attention, il n'est donc pas facile d'affaiblir les conditions de la Prop. 5.22 : si M est une martingale locale uniformément intégrable, en général M n'est pas une martingale (cf. le contre-exemple 2.13 p. 182 dans [RY]). Par contre si on a une condition d'uniforme intégrabilité pour tous les temps d'arrêt, on a un résultat positif :

Proposition 5.24 *Soit M une martingale locale à trajectoires continues avec $M_0 = 0$. Alors M est réduite par la suite de temps d'arrêt $T_n = \inf (t \geq 0 : |M_t| = n)$.*

Démonstration : Comme M^{T_n} est une martingale locale bornée, c'est aussi une martingale uniformément intégrable par la Prop. 5.22. De plus M est à trajectoires continues, on a bien $T_n \nearrow +\infty$. En effet, soit $A > 0$, comme M est à trajectoires continues, $\{M_t : t \in [0, A]\}$ est compact donc borné par $R(A) < +\infty$. On a alors pour tout $n \geq R(A)$, $T_n \geq A$, ie. $T_n \nearrow +\infty$. \square

Dans la suite, on utilise abondamment le résultat immédiat suivant :

Lemme 5.25 *Soit M une martingale de carré intégrable. Alors pour $0 \leq s \leq t$, on a :*

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[(M_t - M_s)^2 | \mathcal{F}_s] &= \mathbb{E}[M_t^2 | \mathcal{F}_s] - \mathbb{E}[M_s^2 | \mathcal{F}_s], \\ \mathbb{E}[(M_t - M_s)^2] &= \mathbb{E}[M_t^2] - \mathbb{E}[M_s^2].\end{aligned}$$

Démonstration : La deuxième partie découle de la première en y prenant l'espérance. Pour la première, on a

$$\mathbb{E}[(M_t - M_s)^2 | \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[(M_t^2 - 2M_t M_s + M_s^2) | \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[M_t^2 | \mathcal{F}_s] - 2\mathbb{E}[M_t M_s | \mathcal{F}_s] + \mathbb{E}[M_s^2 | \mathcal{F}_s].$$

Mais par la propriété de martingale, on a

$$\mathbb{E}[M_t M_s | \mathcal{F}_s] = M_s \mathbb{E}[M_t | \mathcal{F}_s] = M_s^2 = \mathbb{E}[M_s^2 | \mathcal{F}_s],$$

ce qui conclut. \square

Le résultat suivant montre qu'une martingale locale continue qui n'est pas triviale est à variation non bornée. L'ensemble des martingales locales est donc un ensemble vraiment différent de celui des processus à variation bornée.

Théorème 5.26 *Soit M une martingale locale (continue) issue de 0. Alors si M est un processus à variation bornée, M est indistinguable de 0.*

Démonstration : Supposons que M est un processus à variation bornée et posons pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\tau_n = \inf \left(t \geq 0 : \int_0^t |dM_s| \geq n \right).$$

Les temps τ_n sont des temps d'arrêt d'après l'Exemple 3.35 (pour cela, il faut remarquer que le processus $\int_0^t |dM_s|$ est adapté et à trajectoires continues, ce qui se voit par l'approximation donnée par la Prop. 5.7). Fixons $n \geq 1$ et posons $N = M^{\tau_n}$. Alors N est une martingale locale telle que $\int_0^{+\infty} |dN_s| \leq n$, en particulier $|N_t| = \left| \int_0^{t \wedge \tau_n} dM_s \right| \leq \int_0^{t \wedge \tau_n} |dM_s| \leq n$. D'après la Prop. 5.22, N est alors une vraie martingale bornée.

Ensuite, soit $t > 0$ et soit $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_p = t$ une subdivision de $[0, t]$. Alors, avec le Lemme 5.25, on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[N_t^2] &= \sum_{i=1}^p \mathbb{E}[N_{t_i}^2 - N_{t_{i-1}}^2] = \sum_{i=1}^p \mathbb{E}[(N_{t_i} - N_{t_{i-1}})^2] \\ &\leq \mathbb{E} \left[\left(\sup_{1 \leq i \leq p} |N_{t_i} - N_{t_{i-1}}| \right) \sum_{i=1}^p |N_{t_i} - N_{t_{i-1}}| \right] \leq n \mathbb{E} \left[\left(\sup_{1 \leq i \leq p} |N_{t_i} - N_{t_{i-1}}| \right) \right] \end{aligned}$$

en utilisant la Prop. 5.6. On applique l'inégalité précédente à une suite $0 = t_0^k < t_1^k < \dots < t_{p_k}^k = t$ de subdivisions de $[0, t]$ de pas tendant vers 0. En utilisant la continuité des trajectoires, et le fait que N est bornée par n (fixé dans cette partie de l'argument), on a par convergence dominée :

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \mathbb{E} \left[\sup_{1 \leq i \leq p_k} |N_{t_i^k} - N_{t_{i-1}^k}| \right] = 0.$$

On conclut alors que $\mathbb{E}[N_t^2] = 0$ c'est à dire $\mathbb{E}[M_{t \wedge \tau_n}^2] = 0$. En faisant ensuite tendre $n \rightarrow +\infty$, comme $\tau_n \rightarrow +\infty$, on obtient par le lemme de Fatou :

$$\mathbb{E}[M_t^2] = \mathbb{E} \left[\lim_{n \rightarrow +\infty} M_{t \wedge \tau_n}^2 \right] = \mathbb{E} \left[\liminf_{n \rightarrow +\infty} M_{t \wedge \tau_n}^2 \right] \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}[M_{t \wedge \tau_n}^2] = 0.$$

Finalement pour tout $t \geq 0$, $M_t = 0$ ps. La martingale locale M admet donc 0 comme version. Pour conclure, comme le processus nul et M sont à trajectoires continues, le processus M est en fait indistinguable de 0. \square

5.3 Variation quadratique d'une martingale locale

Le théorème ci-dessous définit la variation quadratique (ou crochet) d'une martingale locale. Cette notion est clef dans le calcul stochastique qui va être développé dans la suite.

Théorème 5.27 (Variation quadratique d'une martingale locale) *Soit $M = (M_t)_{t \geq 0}$ une martingale locale à trajectoires continues.*

- (1) *Il existe un processus croissant, noté $\langle M, M \rangle = (\langle M, M \rangle_t)_{t \geq 0}$ unique à indistinguabilité près, tel que*

$$M_t^2 - \langle M, M \rangle_t \tag{5.2}$$

est une martingale locale continue.

- (2) *De plus, pour tout $t > 0$, étant donnée une suite de subdivisions emboîtées de $[0, t]$, $0 = t_0^n < t_1^n < \dots < t_{p_n}^n = t$, de pas tendant vers 0 alors dans le sens de la convergence en probabilité, on a :*

$$\langle M, M \rangle_t = \mathbb{P}\text{-} \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^{p_n} (M_{t_i^n} - M_{t_{i-1}^n})^2. \tag{5.3}$$

Le processus $\langle M, M \rangle$ est appelé la **variation quadratique** ou **crochet** de M .

Remarque 5.28

- (Martingale) Pour les martingales, on a mieux : si M est une martingale de carré intégrable alors $M_t^2 - \langle M, M \rangle_t$ est une martingale aussi, cf. Th. 5.32 ci-dessous.
- (Mouvement brownien) Dans le cas où $M = B$ est un mouvement brownien, on a vu en Prop. 3.29 que $\langle B, B \rangle_t = t$.
- Pour la dernière assertion, il n'est pas nécessaire en fait de supposer que les subdivisions sont emboîtées.

Démonstration du Théorème 5.27

L'**unicité** découle du Th. 5.26. En effet, si A et A' sont deux processus croissants satisfaisant la condition (5.2), le processus $A_t - A'_t = (M_t^2 - A'_t) - (M_t^2 - A_t)$ doit être à la fois une martingale locale (car différence de martingales locales) et un processus à variation bornée (car différence de tels processus), le Th. 5.26 exige alors sa nullité à indistinguabilité près.

Pour l'**existence**, on procède de la façon suivante :

- 1) On considère d'abord le cas où $M_0 = 0$ et M est bornée.
- 2) On traite le cas général d'une martingale M non bornée

Étape 1 : $M_0 = 0$ et M est bornée

D'après la Prop. 5.22, M est alors une vraie martingale. On se fixe $t > 0$ et on considère une suite de subdivisions $0 = t_0^n < t_1^n < \dots < t_{p_n}^n = t$ emboîtées de $[0, t]$ de pas tendant vers 0. Pour chaque $n \geq 1$, on considère le processus $X^{(n)}$ défini par

$$X_s^{(n)} = \sum_{i=1}^{p_n} M_{t_{i-1}^n} (M_{t_i^n \wedge s} - M_{t_{i-1}^n \wedge s}), \quad s \in [0, t].$$

Lemme 5.29 *Pour chaque $n \geq 1$ le processus $X^{(n)}$ est une martingale à trajectoires continues.*

Démonstration : Le processus X est adapté et à trajectoires continues car la martingale M l'est, il est intégrable car M est bornée. Pour la propriété de martingale, pour $s \leq r$, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X_r^{(n)} | \mathcal{F}_s] &= \sum_{i=1}^{p_n} \mathbb{E}[M_{t_{i-1}^n} (M_{t_i^n \wedge r} - M_{t_{i-1}^n \wedge r}) | \mathcal{F}_s] \\ &= \sum_{i: t_{i-1}^n \leq r} \mathbb{E}[M_{t_{i-1}^n} (M_{t_i^n \wedge r} - M_{t_{i-1}^n \wedge r}) | \mathcal{F}_s] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i:s \leq t_{i-1}^n \leq r} \mathbb{E}[M_{t_{i-1}^n}(M_{t_i^n \wedge r} - M_{t_{i-1}^n \wedge r}) | \mathcal{F}_s] + \sum_{i:t_{i-1}^n \leq s \leq r} \mathbb{E}[M_{t_{i-1}^n}(M_{t_i^n \wedge r} - M_{t_{i-1}^n \wedge r}) | \mathcal{F}_s] \\
&= \sum_{i:s \leq t_{i-1}^n \leq r} \mathbb{E}[M_{t_{i-1}^n} \mathbb{E}[(M_{t_i^n \wedge r} - M_{t_{i-1}^n \wedge r}) | \mathcal{F}_{t_{i-1}^n}] | \mathcal{F}_s] + \sum_{i:t_{i-1}^n \leq s \leq r} M_{t_{i-1}^n} \mathbb{E}[(M_{t_i^n \wedge r} - M_{t_{i-1}^n \wedge r}) | \mathcal{F}_s] \\
&= \sum_{i:s \leq t_{i-1}^n \leq r} \mathbb{E}[M_{t_{i-1}^n} \underbrace{(M_{t_i^n} - M_{t_{i-1}^n})}_{=0} | \mathcal{F}_s] + \sum_{i:t_{i-1}^n \leq s \leq r} M_{t_{i-1}^n} (M_{t_i^n \wedge s} - M_{t_{i-1}^n \wedge s}) \\
&= \sum_{i:t_{i-1}^n \leq s} M_{t_{i-1}^n} (M_{t_i^n \wedge s} - M_{t_{i-1}^n \wedge s}) = X_s^{(n)}.
\end{aligned}$$

□

On a ensuite :

Lemme 5.30 *Les variables aléatoires $X_t^{(n)}$, $n \geq 1$, vérifient la propriété de Cauchy dans L^2 :*

$$\lim_{n,m \rightarrow +\infty} \mathbb{E}[(X_t^{(n)} - X_t^{(m)})^2] = 0.$$

Démonstration : On commence par observer que, puisque les subdivisions sont emboîtées, on peut écrire lorsque $n \leq m$:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{p_n} M_{t_{i-1}^n} (M_{t_i^n} - M_{t_{i-1}^n}) &= \sum_{i=1}^{p_n} \sum_{t_j^m \in [t_{i-1}^n, t_i^n]} M_{t_{i-1}^n} (M_{t_j^m} - M_{t_{j-1}^m}), \\
\sum_{j=1}^{p_m} M_{t_{j-1}^m} (M_{t_j^m} - M_{t_{j-1}^m}) &= \sum_{i=1}^{p_n} \sum_{t_j^m \in [t_{i-1}^n, t_i^n]} M_{t_{j-1}^m} (M_{t_j^m} - M_{t_{j-1}^m}).
\end{aligned}$$

Avec des calculs (fastidieux...) qui utilisent la propriété de martingale sous la forme du Lemme 5.25, pour $n \leq m$ on a :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}[(X_t^{(n)} - X_t^{(m)})^2] \\
&= \mathbb{E} \left[\left(\sum_{i=1}^{p_n} M_{t_{i-1}^n} (M_{t_i^n} - M_{t_{i-1}^n}) - \sum_{j=1}^{p_m} M_{t_{j-1}^m} (M_{t_j^m} - M_{t_{j-1}^m}) \right)^2 \right] \\
&= \mathbb{E} \left[\left(\sum_{i=1}^{p_n} \sum_{t_j^m \in [t_{i-1}^n, t_i^n]} M_{t_{i-1}^n} (M_{t_j^m} - M_{t_{j-1}^m}) - \sum_{i=1}^{p_n} \sum_{t_j^m \in [t_{i-1}^n, t_i^n]} M_{t_{j-1}^m} (M_{t_j^m} - M_{t_{j-1}^m}) \right)^2 \right] \\
&\quad \text{(les partitions sont emboîtées)} \\
&= \mathbb{E} \left[\left(\sum_{i=1}^{p_n} \sum_{t_j^m \in [t_{i-1}^n, t_i^n]} (M_{t_{i-1}^n} - M_{t_{j-1}^m}) (M_{t_j^m} - M_{t_{j-1}^m}) \right)^2 \right] \\
&= \sum_{i=1}^{p_n} \mathbb{E} \left[\left(\sum_{t_j^m \in [t_{i-1}^n, t_i^n]} (M_{t_{i-1}^n} - M_{t_{j-1}^m}) (M_{t_j^m} - M_{t_{j-1}^m}) \right)^2 \right]
\end{aligned}$$

car la propriété de martingale annule les termes croisés du carré de la somme : en effet pour $i_1 < i_2$

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E} \left[\left(\sum_{t_{j_1}^m \in]t_{i_1-1}^n, t_{i_1}^n]} (M_{t_{i_1-1}^n} - M_{t_{j_1-1}^m})(M_{t_{j_1}^m} - M_{t_{j_1-1}^m}) \right) \left(\sum_{t_{j_2}^m \in]t_{i_2-1}^n, t_{i_2}^n]} (M_{t_{i_2-1}^n} - M_{t_{j_2-1}^m})(M_{t_{j_2}^m} - M_{t_{j_2-1}^m}) \right) \right] \\
&= \mathbb{E} \left[\mathbb{E} \left[\left(\sum_{t_{j_1}^m \in]t_{i_1-1}^n, t_{i_1}^n]} (M_{t_{i_1-1}^n} - M_{t_{j_1-1}^m})(M_{t_{j_1}^m} - M_{t_{j_1-1}^m}) \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left(\sum_{t_{j_2}^m \in]t_{i_2-1}^n, t_{i_2}^n]} (M_{t_{i_2-1}^n} - M_{t_{j_2-1}^m})(M_{t_{j_2}^m} - M_{t_{j_2-1}^m}) \right) \middle| \mathcal{F}_{t_{i_1}^n} \right] \right] \\
&= \mathbb{E} \left[\left(\sum_{t_{j_1}^m \in]t_{i_1-1}^n, t_{i_1}^n]} (M_{t_{i_1-1}^n} - M_{t_{j_1-1}^m})(M_{t_{j_1}^m} - M_{t_{j_1-1}^m}) \right) \right. \\
&\quad \left. \mathbb{E} \left[\left(\sum_{t_{j_2}^m \in]t_{i_2-1}^n, t_{i_2}^n]} (M_{t_{i_2-1}^n} - M_{t_{j_2-1}^m})(M_{t_{j_2}^m} - M_{t_{j_2-1}^m}) \right) \middle| \mathcal{F}_{t_{i_1}^n} \right] \right] \\
&= \mathbb{E} \left[\left(\sum_{t_{j_1}^m \in]t_{i_1-1}^n, t_{i_1}^n]} (M_{t_{i_1-1}^n} - M_{t_{j_1-1}^m})(M_{t_{j_1}^m} - M_{t_{j_1-1}^m}) \right) \right. \\
&\quad \left. \mathbb{E} \left[\sum_{t_{j_2}^m \in]t_{i_2-1}^n, t_{i_2}^n]} \mathbb{E} \left[(M_{t_{i_2-1}^n} - M_{t_{j_2-1}^m})(M_{t_{j_2}^m} - M_{t_{j_2-1}^m}) \middle| \mathcal{F}_{t_{j_2-1}^m} \right] \middle| \mathcal{F}_{t_{i_1}^n} \right] \right] \\
&= \mathbb{E} \left[\left(\sum_{t_{j_1}^m \in]t_{i_1-1}^n, t_{i_1}^n]} (M_{t_{i_1-1}^n} - M_{t_{j_1-1}^m})(M_{t_{j_1}^m} - M_{t_{j_1-1}^m}) \right) \right. \\
&\quad \left. \mathbb{E} \left[\sum_{t_{j_2}^m \in]t_{i_2-1}^n, t_{i_2}^n]} (M_{t_{i_2-1}^n} - M_{t_{j_2-1}^m}) \underbrace{\mathbb{E} \left[(M_{t_{j_2}^m} - M_{t_{j_2-1}^m}) \middle| \mathcal{F}_{t_{j_2-1}^m} \right]}_{=0} \middle| \mathcal{F}_{t_{i_1}^n} \right] \right]
\end{aligned}$$

car pour $t_{j_2}^m \in]t_{i_2-1}^n, t_{i_2}^n]$, on a $t_{i_2-1}^n \leq t_{j_2-1}^m$ et $(M_{t_{i_2-1}^n} - M_{t_{j_2-1}^m})$ est $\mathcal{F}_{t_{j_2-1}^m}$ -mesurable. On a donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[(X_t^{(n)} - X_t^{(m)})^2] &= \sum_{i=1}^{p_n} \mathbb{E} \left[\left(\sum_{t_j^m \in]t_{i-1}^n, t_i^n]} (M_{t_{i-1}^n} - M_{t_{j-1}^m})(M_{t_j^m} - M_{t_{j-1}^m}) \right)^2 \right] \\
&= \sum_{i=1}^{p_n} \sum_{t_j^m \in]t_{i-1}^n, t_i^n]} \mathbb{E} \left[(M_{t_{i-1}^n} - M_{t_{j-1}^m})^2 (M_{t_j^m} - M_{t_{j-1}^m})^2 \right] \quad (5.4)
\end{aligned}$$

car à nouveau la propriété de martingale annule les termes croisés du carré de la somme : pour $j_1 < j_2$ avec $t_{j_1}^m, t_{j_2}^m \in]t_{i-1}^n, t_i^n]$, on a

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E} \left[(M_{t_{i-1}^n}^n - M_{t_{j_1-1}^m}^m)(M_{t_{j_1}^m}^m - M_{t_{j_1-1}^m}^m)(M_{t_{i-1}^n}^n - M_{t_{j_2-1}^m}^m)(M_{t_{j_2}^m}^m - M_{t_{j_2-1}^m}^m) \right] \\
&= \mathbb{E} \left[\mathbb{E} \left[(M_{t_{i-1}^n}^n - M_{t_{j_1-1}^m}^m)(M_{t_{j_1}^m}^m - M_{t_{j_1-1}^m}^m)(M_{t_{i-1}^n}^n - M_{t_{j_2-1}^m}^m)(M_{t_{j_2}^m}^m - M_{t_{j_2-1}^m}^m) \middle| \mathcal{F}_{t_{j_2-1}^m}^m \right] \right] \\
&= \mathbb{E} \left[(M_{t_{i-1}^n}^n - M_{t_{j_1-1}^m}^m)(M_{t_{j_1}^m}^m - M_{t_{j_1-1}^m}^m)(M_{t_{i-1}^n}^n - M_{t_{j_2-1}^m}^m) \underbrace{\mathbb{E} \left[(M_{t_{j_2}^m}^m - M_{t_{j_2-1}^m}^m) \middle| \mathcal{F}_{t_{j_2-1}^m}^m \right]}_{=0} \right] \\
&= 0.
\end{aligned}$$

car $t_{i-1}^n, t_{j_1-1}^m, t_{j_1}^m \leq t_{j_2-1}^m$. Et donc à partir de (5.4), on a

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}[(X_t^{(n)} - X_t^{(m)})^2] \\
&\leq \sum_{i=1}^{p_n} \sum_{\substack{t_j^m \in]t_{i-1}^n, t_i^n] \\ 1 \leq j \leq p_n}} \mathbb{E} \left[\left(\sup_{\substack{t_j^m \in]t_{i-1}^n, t_i^n] \\ 1 \leq j \leq p_n}} (M_{t_{i-1}^n}^n - M_{t_{j-1}^m}^m)^2 \right) (M_{t_j^m}^m - M_{t_{j-1}^m}^m)^2 \right] \\
&= \mathbb{E} \left[\left(\sup_{\substack{t_j^m \in]t_{i-1}^n, t_i^n] \\ 1 \leq j \leq p_n}} (M_{t_{i-1}^n}^n - M_{t_{j-1}^m}^m)^2 \right) \left(\sum_{j=1}^{p_m} (M_{t_j^m}^m - M_{t_{j-1}^m}^m)^2 \right) \right] \\
&\leq \mathbb{E} \left[\sup_{\substack{t_j^m \in]t_{i-1}^n, t_i^n] \\ 1 \leq j \leq p_n}} (M_{t_{i-1}^n}^n - M_{t_{j-1}^m}^m)^4 \right]^{1/2} \mathbb{E} \left[\left(\sum_{j=1}^{p_m} (M_{t_j^m}^m - M_{t_{j-1}^m}^m)^2 \right)^2 \right]^{1/2} \quad (5.5) \\
&\quad (\text{par l'inégalité de Cauchy-Schwarz})
\end{aligned}$$

Comme M est à trajectoires continues, donc uniformément continues sur $[0, t]$, on a

$$\lim_{n, m \rightarrow +\infty} \sup_{\substack{t_j^m \in]t_{i-1}^n, t_i^n] \\ 1 \leq j \leq p_n}} (M_{t_{i-1}^n}^n - M_{t_{j-1}^m}^m) = 0$$

et comme M est bornée, disons par K :

$$\left| \sup_{\substack{t_j^m \in]t_{i-1}^n, t_i^n] \\ 1 \leq j \leq p_n}} (M_{t_{i-1}^n}^n - M_{t_{j-1}^m}^m) \right| \leq 2K$$

si bien que, par convergence dominée, on a

$$\lim_{n, m \rightarrow +\infty} \mathbb{E} \left[\sup_{\substack{t_j^m \in]t_{i-1}^n, t_i^n] \\ 1 \leq j \leq p_n}} (M_{t_{i-1}^n}^n - M_{t_{j-1}^m}^m)^4 \right] = 0. \quad (5.6)$$

Pour conclure il suffit de montrer qu'il existe une constante C telle que

$$\mathbb{E} \left[\left(\sum_{j=1}^{p_m} (M_{t_j^m} - M_{t_{j-1}^m})^2 \right)^2 \right] \leq C. \quad (5.7)$$

En effet, en combinant (5.5), (5.6) et (5.7), on aura

$$\lim_{n,m \rightarrow +\infty} \mathbb{E}[(X_t^{(n)} - X_t^{(m)})^2] = 0.$$

Pour voir (5.7) (avec $C = 8K^4$), on développe les carrés en utilisant le Lemme 5.25 :

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[\left(\sum_{j=1}^{p_m} (M_{t_j^m} - M_{t_{j-1}^m})^2 \right)^2 \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\sum_{j=1}^{p_m} (M_{t_j^m} - M_{t_{j-1}^m})^4 + 2 \sum_{1 \leq j_1 < j_2 \leq p_m} (M_{t_{j_1}^m} - M_{t_{j_1-1}^m})^2 (M_{t_{j_2}^m} - M_{t_{j_2-1}^m})^2 \right] \\ &\leq (2K)^2 \mathbb{E} \left[\sum_{j=1}^{p_m} (M_{t_j^m} - M_{t_{j-1}^m})^2 \right] + 2 \sum_{1 \leq j_1 < j_2 \leq p_m} \mathbb{E} \left[\mathbb{E} \left[(M_{t_{j_1}^m} - M_{t_{j_1-1}^m})^2 (M_{t_{j_2}^m} - M_{t_{j_2-1}^m})^2 \middle| \mathcal{F}_{t_{j_1}^m} \right] \right] \\ &\leq (2K)^2 \sum_{j=1}^{p_m} \mathbb{E} \left[(M_{t_j^m} - M_{t_{j-1}^m})^2 \right] + 2 \sum_{1 \leq j_1 < j_2 \leq p_m} \mathbb{E} \left[(M_{t_{j_1}^m} - M_{t_{j_1-1}^m})^2 \mathbb{E} \left[(M_{t_{j_2}^m} - M_{t_{j_2-1}^m})^2 \middle| \mathcal{F}_{t_{j_1}^m} \right] \right] \end{aligned}$$

On estime les deux termes en utilisant le Lemme 5.25 : pour le premier terme, on a

$$\sum_{j=1}^{p_m} \mathbb{E} \left[(M_{t_j^m} - M_{t_{j-1}^m})^2 \right] = \sum_{j=1}^{p_m} \mathbb{E} \left[M_{t_j^m}^2 - M_{t_{j-1}^m}^2 \right] = \mathbb{E} [M_{t_{p_m}^m}^2] - \mathbb{E} [M_{t_0}^2] = \mathbb{E} [M_t^2] \leq K^2.$$

Puis

$$\mathbb{E} \left[(M_{t_{j_2}^m} - M_{t_{j_2-1}^m})^2 \middle| \mathcal{F}_{t_{j_1}^m} \right] = \mathbb{E} \left[M_{t_{j_2}^m}^2 - M_{t_{j_2-1}^m}^2 \middle| \mathcal{F}_{t_{j_1}^m} \right]$$

si bien que

$$\begin{aligned} & \sum_{1 \leq j_1 < j_2 \leq p_m} \mathbb{E} \left[(M_{t_{j_1}^m} - M_{t_{j_1-1}^m})^2 \mathbb{E} \left[(M_{t_{j_2}^m} - M_{t_{j_2-1}^m})^2 \middle| \mathcal{F}_{t_{j_1}^m} \right] \right] \\ &= \sum_{j_1=1}^{p_m} \mathbb{E} \left[(M_{t_{j_1}^m} - M_{t_{j_1-1}^m})^2 \sum_{j_2=j_1+1}^{p_m} \mathbb{E} \left[M_{t_{j_2}^m}^2 - M_{t_{j_2-1}^m}^2 \middle| \mathcal{F}_{t_{j_1}^m} \right] \right] \\ &= \sum_{j_1=1}^{p_m} \mathbb{E} \left[(M_{t_{j_1}^m} - M_{t_{j_1-1}^m})^2 \mathbb{E} \left[M_t^2 - M_{t_{j_1}^m}^2 \middle| \mathcal{F}_{t_{j_1}^m} \right] \right] \\ &\leq \sum_{j_1=1}^{p_m} \mathbb{E} \left[(M_{t_{j_1}^m} - M_{t_{j_1-1}^m})^2 (2K^2) \right] = (2K^2) \sum_{j_1=1}^{p_m} \mathbb{E} \left[M_{t_{j_1}^m}^2 - M_{t_{j_1-1}^m}^2 \right] \end{aligned}$$

$$= (2K^2)(\mathbb{E}[M_{t_{p_m}^m}^2] - \mathbb{E}[M_{t_0}^2]) = (2K^2)\mathbb{E}[M_t^2] \leq 2K^4.$$

Finalement,

$$\mathbb{E} \left[\left(\sum_{j=1}^{p_m} (M_{t_j^m} - M_{t_{j-1}^m})^2 \right)^2 \right] \leq 8K^4.$$

□

En combinant le Lemme 5.29, l'inégalité de Doob (Prop. 4.18 avec $p = q = 2$), on obtient :

$$\lim_{n,m \rightarrow +\infty} \mathbb{E} \left[\sup_{s \leq t} (X_s^{(n)} - X_s^{(m)})^2 \right] = 0. \quad (5.8)$$

On peut alors extraire une sous-suite $(n_k)_{k \geq 0}$ telle que

$$\mathbb{E} \left[\sup_{s \leq t} (X_s^{(n_k)} - X_s^{(n_{k+1})})^2 \right] \leq 2^{-2k}.$$

Avec l'inégalité de Cauchy-Schwarz, il vient alors

$$\mathbb{E} \left[\sum_{k=1}^{+\infty} \sup_{s \leq t} |X_s^{(n_k)} - X_s^{(n_{k+1})}| \right] \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{E} \left[\sup_{s \leq t} (X_s^{(n_k)} - X_s^{(n_{k+1})})^2 \right]^{1/2} \leq \sum_{k=0}^{+\infty} 2^{-k} = 2 < +\infty.$$

On en déduit que presque sûrement :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \sup_{s \leq t} |X_s^{(n_k)} - X_s^{(n_{k+1})}| < +\infty.$$

Presque sûrement, la suite de fonction $(X_s^{(n_k)})_{s \in [0, t]}$, $k \geq 1$, converge donc uniformément sur $[0, t]$ vers une limite qu'on note $(Y_s)_{s \in [0, t]}$. Sur l'ensemble négligeable où il n'y a pas la convergence, on impose $Y_s \equiv 0$. Le processus limite $(Y_s)_{s \in [0, t]}$ ainsi construit a alors des trajectoires continues.

Comme d'après le Lemme 5.29 pour chaque $s \in [0, t]$, $(X_s^{(n)})_{n \geq 1}$ est une suite de Cauchy dans L^2 , on a aussi la convergence $X_s^{(n)} \xrightarrow{L^2} Y_s$ quand $n \rightarrow +\infty$. En passant à la limite L^2 dans l'égalité de martingale pour $X^{(n)}$ aux dates s et r ,

$$X_s^{(n)} = \mathbb{E}[X_r^{(n)} | \mathcal{F}_s], \quad s \leq r,$$

on obtient la propriété de martingale pour Y sur $[0, t]$:

$$Y_s = \mathbb{E}[Y_r | \mathcal{F}_s], \quad s \leq r.$$

Le processus $Y = (Y_s)_{0 \leq s \leq t}$ est donc une martingale à trajectoire continue.

Puis par un calcul simple, pour tout $n \geq 1$ et $j \in \{1, \dots, p_n\}$, on a

$$M_{t_j^n}^2 - 2X_{t_j^n}^{(n)} = \sum_{i=1}^j (M_{t_i^n} - M_{t_{i-1}^n})^2. \quad (5.9)$$

En effet $X_{t_j^n}^{(n)} = \sum_{i=1}^j M_{t_{i-1}^n} (M_{t_i^n} - M_{t_{i-1}^n}) = \sum_{i=1}^j (M_{t_{i-1}^n} M_{t_i^n} - M_{t_{i-1}^n}^2)$ et donc

$$\begin{aligned} M_{t_j^n}^2 - 2X_{t_j^n}^{(n)} &= M_{t_j^n}^2 + 2 \sum_{i=1}^j M_{t_{i-1}^n}^2 - 2 \sum_{i=1}^j M_{t_{i-1}^n} M_{t_i^n} \\ &= \sum_{i=1}^j M_{t_i^n}^2 + \sum_{i=1}^j M_{t_{i-1}^n}^2 - 2 \sum_{i=1}^j M_{t_{i-1}^n} M_{t_i^n} \\ &\quad (\text{en reindexant la somme et avec } M_{t_0^n} = M_0 = 0) \\ &= \sum_{i=1}^j (M_{t_i^n}^2 + M_{t_{i-1}^n}^2 - 2M_{t_{i-1}^n} M_{t_i^n}) \\ &= \sum_{i=1}^j (M_{t_i^n} - M_{t_{i-1}^n})^2. \end{aligned}$$

Le processus $M^2 - 2X^{(n)}$ est donc croissant le long de la subdivision $\{t_i^n : 0 \leq i \leq p_n\}$. En passant à la limite avec la sous-suite $n_k \rightarrow +\infty$ trouvée précédemment (pour laquelle il y a convergence presque sûre), par continuité, la fonction $s \in [0, t] \mapsto M_s^2 - 2Y_s$ est presque sûrement croissante sur $[0, t]$.

On pose alors, pour $s \in [0, t]$, $\langle M, M \rangle_s := M_s^2 - 2Y_s$ (avec, par convention, $\langle M, M \rangle_s \equiv 0$ sur l'ensemble de probabilité nulle où la fonction $t \mapsto M_t^2 - 2Y_t$ n'est pas croissante).

Ainsi, $\langle M, M \rangle$ est un processus croissant et par construction $M_s^2 - \langle M, M \rangle_s = 2Y_s$ est une martingale, sur l'intervalle de temps $[0, t]$.

Rappelons que t est fixé depuis le début de l'argument. Pour étendre la définition de $\langle M, M \rangle_s$ à tout $s \in \mathbb{R}_+$, on applique ce qui précède avec $t = k$ pour tout entier $k \geq 1$ et on note $A^{(k)}$ le processus ainsi construit. Par unicité (à indistinguabilité près), on remarque que le processus obtenu avec $t = k$ doit être la restriction à $[0, k]$ de celui obtenu avec $t = k + 1$: $A^{(k)} = A^{(k+1)}|_{[0, k]}$. On définit alors un processus $\langle M, M \rangle_t$, $t \geq 0$, croissant vérifiant

(5.2) en prenant

$$\langle M, M \rangle_t = A_t^{(k)} \quad \text{pour } k \geq t.$$

L'égalité des restrictions des $A^{(k)}$ assure la cohérence de la définition ci-dessus. Le processus $\langle M, M \rangle$ ainsi construit vérifie la première partie du Th 5.27.

La partie unicité montre aussi que le processus $\langle M, M \rangle = (\langle M, M \rangle_t)_{t \geq 0}$ ne dépend pas de la suite de subdivisions (emboîtées) choisies pour le construire. On déduit alors de (5.9)

(avec $j = p_n$) que pour tout $t > 0$, pour n'importe quelle suite de subdivisions emboîtées de $[0, t]$ de pas tendant vers 0, on a

$$L^2\text{-}\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{j=1}^{p_n} (M_{t_j^n} - M_{t_{j-1}^n})^2 = \langle M, M \rangle_t$$

dans L^2 . Cela achève la preuve du théorème dans le cas borné.

Étape 2 : cas général

Considérons maintenant une martingale locale générale qu'on écrit sous la forme $M_t = M_0 + N_t$. On a donc $M_t^2 = M_0^2 + 2M_0N_t + N_t^2$.

On remarque que $(M_0N_t)_{t \geq 0}$ est une martingale locale. En effet, en notant $(T_n)_{n \geq 1}$ la suite de temps d'arrêt qui réduit la martingale locale N et $S_n = \inf(n \geq 0 : |M_0N_t| \geq n)$, alors S_n est un temps d'arrêt ($(M_0N_t)_{t \geq 0}$ est adaptée) et $S_n \nearrow +\infty$ (continuité de $t \mapsto M_0N_t$, comme en Prop. 5.24). Comme $(M_0N_t)_{t \geq 0}^{T_n \wedge S_n}$ est bornée et vérifie la propriété de martingale, $(M_0N_t)_{t \geq 0}$ est bien une martingale locale réduite par la suite de temps d'arrêt $T_n \wedge S_n$, $n \geq 1$.

Ainsi pour montrer que $M^2 - A_t = (M_0^2 + 2M_0N_t) + N_t^2 - A_t$, $t \geq 0$ est une martingale locale, il suffit de le faire pour $(N_t^2 - A_t)_{t \geq 0}$, et sans perte de généralité, on suppose donc que $M_0 = 0$ et on pose alors

$$T_n = \inf(t \geq 0 : |M_t| \geq n),$$

et on applique le résultat déjà prouvé dans le cas borné aux martingales bornées M^{T_n} . Notons $A^{(n)} = \langle M^{T_n}, M^{T_n} \rangle$ le processus associé à M^{T_n} . D'après l'unicité, les processus $A_{t \wedge T_n}^{(n+1)}$ et $A_t^{(n)}$ sont indistinguables. On en déduit qu'il existe un processus croissant A tel que, pour tout $n \geq 1$, $A_{t \wedge T_n}$ et $A_t^{(n)}$ sont indistinguables. De plus, par construction du cas borné, $M_{t \wedge T_n}^2 - A_{t \wedge T_n} = (M_t^2 - A_t)^{T_n}$ est une martingale, c'est à dire $M_t^2 - A_t$ est une martingale locale puisque $T_n \nearrow +\infty$.

On prend alors $\langle M, M \rangle_t = A_t$ et cela termine la preuve de la partie existence.

Deuxième partie du Th. 5.27

Enfin, la **deuxième partie** du théorème reste vraie dans le cas d'une martingale locale : en effet, si on remplace M et $\langle M, M \rangle_t$ par M^{T_n} et $\langle M^{T_n}, M^{T_n} \rangle_t = \langle M, M \rangle_t^{T_n}$ (en anticipant la Prop. 5.31 juste ci-dessous) alors le cas borné assure :

$$\langle M, M \rangle_{t \wedge T_n} = \mathbb{P}\text{-}\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^{p_n} (M_{t_i^n}^{T_n} - M_{t_{i-1}^n}^{T_n})^2$$

(même avec convergence dans L^2 plutôt qu'en probabilité). On conclut en observant que, pour tout $t > 0$, on a $\mathbb{P}(t \leq T_n) \rightarrow 1$, quand $n \rightarrow +\infty$, ce qui affaiblit la convergence L^2

en une convergence en probabilité : soit $\varepsilon > 0$, posons

$$A_n(\varepsilon) = \left\{ \left| \langle M, M \rangle_t - \sum_{i=1}^{p_n} (M_{t_i^n} - M_{t_{i-1}^n})^2 \right| \geq \varepsilon \right\}$$

alors $\mathbb{P}(A_n(\varepsilon)) = \mathbb{P}(A_n(\varepsilon), t \leq T_n) + \mathbb{P}(A_n(\varepsilon), T_n < t)$ avec $\mathbb{P}(A_n(\varepsilon), T_n < t) \leq \mathbb{P}(T_n < t) \rightarrow 0$ et

$$A_n(\varepsilon) \cap \{t \leq T_n\} = \left\{ \left| \langle M, M \rangle_{t \wedge T_n} - \sum_{i=1}^{p_n} (M_{t_i^n}^{T_n} - M_{t_{i-1}^n}^{T_n})^2 \right| \geq \varepsilon \right\} \cap \{t \leq T_n\}.$$

Il vient

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(A_n(\varepsilon)) \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(T_n < t) + \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P} \left(\left| \langle M, M \rangle_{t \wedge T_n} - \sum_{i=1}^{p_n} (M_{t_i^n}^{T_n} - M_{t_{i-1}^n}^{T_n})^2 \right| \geq \varepsilon \right) = 0$$

ie. $\mathbb{P}\text{-}\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^{p_n} (M_{t_i^n} - M_{t_{i-1}^n})^2 = \langle M, M \rangle_t$. \square

Proposition 5.31 (Crochet et arrêt) *Si T est un temps d'arrêt, alors on a*

$$\langle M^T, M^T \rangle_t = \langle M, M \rangle_t^T.$$

Démonstration : Cela vient de ce que

$$(M_t^T)^2 - \langle M, M \rangle_t^T = M_{t \wedge T}^2 - \langle M, M \rangle_{t \wedge T} = (M^2 - \langle M, M \rangle)_t^T$$

est une martingale locale comme martingale locale arrêtée. Par conséquent le crochet arrêté $\langle M, M \rangle^T$ vérifie la propriété/définition de $\langle M^T, M^T \rangle$ du Théorème 5.27. Par unicité du crochet, on doit avoir $\langle M^T, M^T \rangle = \langle M, M \rangle^T$ à indistinguabilité près. \square

Le théorème suivant montre comment les propriétés d'une martingale locale M sont liées à celles de sa variation quadratique $\langle M, M \rangle$. Ainsi, les intervalles sur lesquels M est constante sont exactement ceux sur lesquels $\langle M, M \rangle$ est constant. Si A est un processus croissant, on note A_∞ la limite croissante de A_t quand $t \rightarrow +\infty$.

Théorème 5.32 *Soit M une martingale locale à trajectoires continues avec $M_0 = 0$.*

- (1) *Si M est une (vraie) martingale bornée dans L^2 , alors $\mathbb{E}[\langle M, M \rangle_\infty] < +\infty$, et $M_t^2 - \langle M, M \rangle_t$ est une martingale uniformément intégrable.*
- (2) *Réciproquement, si $\mathbb{E}[\langle M, M \rangle_\infty] < +\infty$, alors M est une (vraie) martingale bornée dans L^2 (donc uniformément intégrable).*
- (3) *Il y a équivalence entre :*

(a) M est une (vraie) martingale de carré intégrable (ie. $\mathbb{E}[M_t^2] < +\infty$ pour tout $t \geq 0$).

(b) $\mathbb{E}[\langle M, M \rangle_t] < +\infty$ pour tout $t \geq 0$.

De plus si ces conditions sont satisfaites, $M_t^2 - \langle M, M \rangle_t$ est une martingale.

Remarque 5.33 Dans la partie 1) de l'énoncé, il est essentiel de supposer que M est une martingale, et pas seulement une martingale locale car on utilise l'inégalité de Doob et elle n'est pas valable pour une martingale locale.

Démonstration : 1) Si M est une martingale (continue) bornée dans L^2 , l'inégalité de Doob (Proposition 4.18 avec $p = q = 2$) assure

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t \geq 0} M_t^2\right] \leq 4 \sup_{t \geq 0} \mathbb{E}[M_t^2] < +\infty.$$

En particulier, M est une martingale uniformément intégrable qui converge (ps et, par convergence dominée, dans L^2) vers une limite $M_\infty \in L^2$ quand $t \rightarrow +\infty$. Pour tout entier $n \geq 1$, on pose

$$S_n = \inf(t \geq 0 : \langle M, M \rangle_t \geq n).$$

Alors S_n est un temps d'arrêt et $\langle M, M \rangle_{t \wedge S_n} \leq n$. On en déduit que la martingale locale $M_{t \wedge S_n}^2 - \langle M, M \rangle_{t \wedge S_n}$ est dominée par la variable intégrable $n + \sup_{t \geq 0} M_t^2$. D'après la Proposition 5.22, cette martingale locale est donc une vraie martingale. Comme elle est nulle en 0, la propriété de martingale assure

$$\mathbb{E}[M_{t \wedge S_n}^2 - \langle M, M \rangle_{t \wedge S_n}] = \mathbb{E}[M_{0 \wedge S_n}^2 - \langle M, M \rangle_{0 \wedge S_n}] = 0,$$

soit

$$\mathbb{E}[\langle M, M \rangle_{t \wedge S_n}] = \mathbb{E}[M_{t \wedge S_n}^2].$$

En faisant tendre $t \rightarrow +\infty$ (avec le théorème de convergence monotone pour le terme de gauche, le théorème de convergence dominée pour celui de droite), on trouve

$$\mathbb{E}[\langle M, M \rangle_{S_n}] = \mathbb{E}[M_{S_n}^2].$$

Puis comme $S_n \nearrow +\infty$, en faisant tendre $n \rightarrow +\infty$, on trouve de la même façon (convergences monotone et dominée)

$$\mathbb{E}[\langle M, M \rangle_\infty] = \mathbb{E}[M_\infty^2] < +\infty.$$

De plus comme la martingale locale $M_t^2 - \langle M, M \rangle_t$ est dominée par la variable intégrable $\sup_{t \geq 0} M_t^2 + \langle M, M \rangle_\infty$, c'est donc une (vraie) martingale uniformément intégrable (toujours par la Prop. 5.22)).

2) On suppose maintenant $\mathbb{E}[\langle M, M \rangle_\infty] < +\infty$. Avec $T_n = \inf(t \geq 0 : |M_t| \geq n)$, M^{T_n} est bornée donc c'est une vraie martingale bornée. De plus, la martingale locale

$M_{t \wedge T_n}^2 - \langle M, M \rangle_t^{T_n}$ est aussi une vraie martingale uniformément intégrable, car elle est dominée par la variable aléatoire intégrable $n^2 + \langle M, M \rangle_\infty$ (cf. encore Prop. 5.22)).

Soit S un temps d'arrêt fini ps. D'après le théorème d'arrêt (Th. 4.32) appliqué à la martingale uniformément intégrable $M_{t \wedge T_n}^2 - \langle M, M \rangle_t^{T_n}$ avec $S \geq 0$, on a

$$\mathbb{E}[M_{S \wedge T_n}^2] = \mathbb{E}[\langle M, M \rangle_{S \wedge T_n}].$$

Par le lemme de Fatou, on a alors (en utilisant S fini et $T_n \nearrow +\infty$ ps) :

$$\mathbb{E}[M_S^2] = \mathbb{E}[\liminf_{n \rightarrow +\infty} M_{S \wedge T_n}^2] \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}[M_{S \wedge T_n}^2] = \liminf_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}[\langle M, M \rangle_{S \wedge T_n}] \leq \mathbb{E}[\langle M, M \rangle_\infty].$$

La famille $\{M_S : S \text{ temps d'arrêt fini}\}$ est donc bornée dans L^2 et par conséquent uniformément intégrable.

En particulier, la sous-famille $(M_{t \wedge T_n})_{n \geq 1}$ est uniformément intégrable et converge ps vers M_t quand $n \rightarrow +\infty$, elle converge donc aussi dans L^1 (théorème de Vitali). De même, on a $M_{s \wedge T_n} \xrightarrow{L^1} M_s$. En passant à la limite L^1 quand $n \rightarrow +\infty$ dans l'égalité $\mathbb{E}[M_{t \wedge T_n} | \mathcal{F}_s] = M_s^{T_n}$ (pour $s \leq t$), on en déduit

$$\mathbb{E}[M_t | \mathcal{F}_s] = M_s,$$

ie. M est une vraie martingale. De plus, M est bornée dans L^2 puisque $\{M_s, s \geq 0\}$ est une sous-famille de $\{M_S : S \text{ temps d'arrêt fini}\}$ qui est bornée dans L^2 .

3) Soit $a > 0$. Comme $\langle M, M \rangle_a = \langle M^a, M^a \rangle_\infty$, d'après 1) et 2), on a $\mathbb{E}[\langle M, M \rangle_a] < +\infty$ si et seulement si $M^a = (M_t^a)_{t \geq 0}$ est une vraie martingale bornée dans L^2 . L'équivalence de (3a) et (3b) suit alors facilement. Enfin, si ces conditions sont remplies, 1) montre que $M_{t \wedge a}^2 - \langle M, M \rangle_{t \wedge a}$ est une vraie martingale, ce qui prouve le 3) car a est quelconque et peut être choisi arbitrairement grand. \square

Corollaire 5.34 *Soit M une martingale locale à trajectoires continues telle que $M_0 = 0$. Alors on a $\langle M, M \rangle_t = 0$ ps pour tout $t \geq 0$ si et seulement si M est indistinguable de 0.*

Démonstration : Supposons $\langle M, M \rangle_t = 0$ ps pour tout $t \geq 0$. D'après les parties 1) et 2) du théorème ci-dessus, M_t^2 est une martingale uniformément intégrable, d'où $\mathbb{E}[M_t^2] = \mathbb{E}[M_0^2] = 0$. Le processus nul est une modification de M . Comme les deux sont à trajectoires continues, ils sont indistingubles. \square

Crochet de deux martingales locales

Si M et N sont deux martingales locales, on définit leur crochet par polarisation en posant :

$$\langle M, N \rangle_t = \frac{1}{2} (\langle M + N, M + N \rangle_t - \langle M, M \rangle_t - \langle N, N \rangle_t).$$

Proposition 5.35 (Propriétés du crochet joint)

- (1) $\langle M, N \rangle$ est l'unique (à indistinguabilité près) processus à variation bornée tel que $M_t N_t - \langle M, N \rangle_t$ soit une martingale locale.
- (2) Si $0 = t_0^n < t_1^n < \dots < t_{p_n}^n = t$ est une suite de subdivisions emboîtées de $[0, t]$ de pas tendant vers 0, on a, au sens de la convergence en probabilité,

$$\mathbb{P}\text{-}\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^{p_n} (M_{t_i^n} - M_{t_{i-1}^n})(N_{t_i^n} - N_{t_{i-1}^n}) = \langle M, N \rangle_t.$$

- (3) L'application $(M, N) \mapsto \langle M, N \rangle$ est bilinéaire symétrique.
- (4) (arrêt) Pour tout temps d'arrêt T ,

$$\langle M^T, N^T \rangle_t = \langle M^T, N \rangle_t = \langle M, N \rangle_{t \wedge T}. \quad (5.10)$$

Démonstration : 1) découle de la caractérisation analogue dans le Théorème 5.27 avec la polarisation du produit réel (et l'unicité découle du Théorème 5.26). On a

$$MN - \langle M, N \rangle = \frac{1}{2} \left(((M+N)^2 - \langle M+N, M+N \rangle) - (M^2 - \langle N, N \rangle) - (N^2 - \langle N, N \rangle) \right)$$

est une martingale locale comme somme des martingales locales $(M+N)^2 - \langle M+N, M+N \rangle$, $M^2 - \langle N, N \rangle$ et $N^2 - \langle N, N \rangle$ par définitions de $\langle M+N, M+N \rangle$, $\langle M, M \rangle$ et $\langle N, N \rangle$.

2) est de même une conséquence de l'affirmation analogue dans le Théorème 5.27 par polarisation : De

$$(M_{t_i^n} - M_{t_{i-1}^n})(N_{t_i^n} - N_{t_{i-1}^n}) = \frac{1}{2} \left(((M_{t_i^n} - M_{t_{i-1}^n}) + (N_{t_i^n} - N_{t_{i-1}^n}))^2 - (M_{t_i^n} - M_{t_{i-1}^n})^2 - (N_{t_i^n} - N_{t_{i-1}^n})^2 \right)$$

on déduit

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{p_n} (M_{t_i^n} - M_{t_{i-1}^n})(N_{t_i^n} - N_{t_{i-1}^n}) \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^{p_n} ((M_{t_i^n} - M_{t_{i-1}^n}) + (N_{t_i^n} - N_{t_{i-1}^n}))^2 - \sum_{i=1}^{p_n} (M_{t_i^n} - M_{t_{i-1}^n})^2 - \sum_{i=1}^{p_n} (N_{t_i^n} - N_{t_{i-1}^n})^2 \right) \\ &\xrightarrow{\mathbb{P}} \frac{1}{2} (\langle M+N, M+N \rangle_t - \langle M, M \rangle_t - \langle N, N \rangle_t) \\ &= \langle M, N \rangle_t, \end{aligned}$$

en utilisant 2) dans Th. 5.27 pour $\langle M+N, M+N \rangle_t$, $\langle M, M \rangle_t$, et $\langle N, N \rangle_t$.

3) découle, par exemple, de l'expression 2).

Enfin, on peut voir 4) comme une conséquence de la propriété 2), en observant que cette propriété entraîne ps

$$\langle M^T, N^T \rangle_t = \langle M^T, N \rangle_t = \langle M, N \rangle_t \quad \text{sur } \{T \geq t\},$$

$$\langle M^T, N^T \rangle_t - \langle M^T, N^T \rangle_s = \langle M^T, N \rangle_t - \langle M^T, N \rangle_s = 0 \quad \text{sur} \quad \{T \leq s < t\}.$$

□

Proposition 5.36 *Soit M_1, M_2 deux martingales locales à trajectoires continues issues de 0. On a $M_1 = M_2$ (à indistinguabilité près) si et seulement si pour toute martingale locale N , on a $\langle M_1, N \rangle = \langle M_2, N \rangle$.*

Démonstration : Il suffit de choisir $N = M_1 - M_2$ pour avoir $\langle M_1 - M_2, M_1 - M_2 \rangle = 0$, c'est à dire $M_1 - M_2$ est constante donc nulle. □

Le résultat suivant est une sorte de généralisation de l'inégalité de Cauchy-Schwarz aux intégrales par rapport à un crochet de martingales locales.

Proposition 5.37 (Inégalité de Kunita-Watanabe) *Soit M et N deux martingales locales et H et K deux processus progressivement mesurables bornés. Alors pour tout $t \geq 0$:*

$$\int_0^t |H_s| |K_s| |d\langle M, N \rangle_s| \leq \left(\int_0^t H_s^2 d\langle M, M \rangle_s \right)^{1/2} \left(\int_0^t K_s^2 d\langle N, N \rangle_s \right)^{1/2}. \quad (5.11)$$

Conséquence : Avec $H = K = 1$, on a $|\langle M, N \rangle|^2 \leq \langle M, M \rangle \langle N, N \rangle$.

Démonstration : Par le théorème de convergence monotone, il suffit de voir le résultat pour H, K processus progressifs bornés. Quitte à remplacer K par $gK \operatorname{sgn}(HK)$, où $g = d(\langle M, N \rangle)/d|\langle M, N \rangle|$ est la densité de Radon-Nikodym à valeurs dans $\{-1, +1\}$, on peut remplacer $\int_0^{+\infty} |H_s| |K_s| |d\langle M, N \rangle_s|$ à gauche dans (5.11) par $|\int_0^{+\infty} H_s K_s d\langle M, N \rangle_s|$.

Notons $\langle M, N \rangle_{s,t} = \langle M, N \rangle_t - \langle M, N \rangle_s$. On commence par remarquer que presque sûrement pour tous $s < t$ rationnels (donc aussi par continuité pour tous $s < t$) on a

$$|\langle M, N \rangle_{s,t}| \leq \sqrt{\langle M, M \rangle_{s,t}} \sqrt{\langle N, N \rangle_{s,t}}. \quad (5.12)$$

En effet, cela découle des approximations en probabilité de $\langle M, M \rangle$ et $\langle M, N \rangle$ données respectivement dans le Th. 5.27 et la Prop. 5.35, ainsi que de l'inégalité de Cauchy-Schwarz (classique pour les sommes) :

$$\left(\sum_{i=1}^{p_n} (M_{t_i^n} - M_{t_{i-1}^n})(N_{t_i^n} - N_{t_{i-1}^n}) \right)^2 \leq \sum_{i=1}^{p_n} (M_{t_i^n} - M_{t_{i-1}^n})^2 \sum_{i=1}^{p_n} (N_{t_i^n} - N_{t_{i-1}^n})^2$$

où $(t_i^n)_{i=1, \dots, p_n}$ est une partition de $[s, t]$. À la limite $n \rightarrow +\infty$, on obtient bien (5.12).

Dans la suite on fixe un $\omega \in \Omega$ pour lequel (5.12) est vraie pour tout $s < t$ et on raisonne pour ce ω presque sûr. L'interprétation de $\int_s^t |d\langle M, N \rangle_u|$ comme variation bornée par la Prop. 5.6 donne aussi

$$\int_s^t |d\langle M, N \rangle_u| \leq \sqrt{\langle M, M \rangle_{s,t}} \sqrt{\langle N, N \rangle_{s,t}}. \quad (5.13)$$

En effet, pour une subdivision $s = t_0 < t_1 < \dots < t_p = t$, on a

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^p |\langle M, N \rangle_{t_{i-1}, t_i}| &\leq \sum_{i=1}^p \sqrt{\langle M, M \rangle_{t_{i-1}, t_i}} \sqrt{\langle N, N \rangle_{t_{i-1}, t_i}} \\ &\leq \left(\sum_{i=1}^p \langle M, M \rangle_{t_{i-1}, t_i} \right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^p \langle N, N \rangle_{t_{i-1}, t_i} \right)^{1/2} \\ &\leq \sqrt{\langle M, M \rangle_{s, t}} \sqrt{\langle N, N \rangle_{s, t}}. \end{aligned}$$

Soit maintenant H, K des processus progressifs simples. Quitte à raffiner les partitions définissant H et K , on peut trouver $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n < +\infty$ et $h_0, \dots, h_n, k_0, \dots, k_n$ telles que $h_i, k_i \in L^\infty(\mathcal{F}_{t_i})$, et pour lesquels

$$H = h_0 \mathbf{1}_{\{0\}} + \sum_{i=0}^{n-1} h_i \mathbf{1}_{]t_i, t_{i+1}]}, \quad K = k_0 \mathbf{1}_{\{0\}} + \sum_{i=0}^{n-1} k_i \mathbf{1}_{]t_i, t_{i+1}]}.$$

On a alors

$$\begin{aligned} \left| \int_0^t H_s K_s d\langle M, N \rangle_s \right| &= \left| \sum_{i=0}^{n-1} h_i k_i \int_{t_i}^{t_{i+1}} d\langle M, N \rangle_s \right| \leq \sum_{i=0}^{n-1} |h_i| |k_i| \left| \int_{t_i}^{t_{i+1}} d\langle M, N \rangle_s \right| \\ &\leq \sum_{i=0}^{n-1} |h_i| |k_i| \left(\int_{t_i}^{t_{i+1}} d\langle M, M \rangle_s \right)^{1/2} \left(\int_{t_i}^{t_{i+1}} d\langle N, N \rangle_s \right)^{1/2} \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \left(\int_{t_i}^{t_{i+1}} h_i^2 d\langle M, M \rangle_s \right)^{1/2} \left(\int_{t_i}^{t_{i+1}} k_i^2 d\langle N, N \rangle_s \right)^{1/2} \\ &\leq \left(\sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} h_i^2 d\langle M, M \rangle_s \right)^{1/2} \left(\sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} k_i^2 d\langle N, N \rangle_s \right)^{1/2} \\ &= \left(\int_0^t H_s d\langle M, M \rangle_s \right)^{1/2} \left(\int_0^t K_s d\langle N, N \rangle_s \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Quand H et K sont des processus progressifs bornés, on peut les approximer par deux suites de processus simples $(H_n)_{n \geq 1}$ et $(K_n)_{n \geq 1}$ qui convergent vers H et K en restant bornées. On conclut alors par le théorème de convergence dominée pour l'intégrale de Stieltjes. \square

5.4 Semimartingales continues

Les semimartingales forment la classe la plus générale de processus considérés pour construire une intégrale stochastique au Chapitre 6 suivant.

Définition 5.38 (Semimartingale) *Un processus $X = (X_t)_{t \geq 0}$ est une semimartingale à trajectoires continues s'il s'écrit sous la forme $X_t = X_0 + M_t + A_t$ où M est une martingale locale (issue de 0) et A est un processus à variation bornée.*

Toujours grâce au Théorème 5.26, la décomposition ci-dessus est unique à indistinguabilité près. Si $Y_t = Y_0 + M'_t + A'_t$ est une autre semimartingale continue, on pose par définition

$$\langle X, Y \rangle_t := \langle M, M' \rangle_t.$$

En particulier, $\langle X, X \rangle_t = \langle M, M \rangle_t$.

Proposition 5.39 *Soit X, Y deux semimartingales et $0 = t_0^n < t_1^n < \dots < t_{p_n}^n = t$ une suite de subdivisions emboîtées de $[0, t]$ de pas tendant vers 0. Alors, au sens de la convergence en probabilité :*

$$\mathbb{P}\text{-}\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^{p_n} (X_{t_i^n} - X_{t_{i-1}^n})(Y_{t_i^n} - Y_{t_{i-1}^n}) = \langle X, Y \rangle_t.$$

Remarque 5.40 En particulier, si X ou Y est à variation bornée, alors $\langle X, Y \rangle \equiv 0$. En effet, si par exemple X est à variation bornée, on a

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i=1}^{p_n} (X_{t_i^n} - X_{t_{i-1}^n})(Y_{t_i^n} - Y_{t_{i-1}^n}) \right| &\leq \sum_{i=1}^{p_n} |X_{t_i^n} - X_{t_{i-1}^n}| \sup_{i=1, \dots, p_n} |Y_{t_i^n} - Y_{t_{i-1}^n}| \\ &\leq \left(\sup_{i=1, \dots, p_n} |Y_{t_i^n} - Y_{t_{i-1}^n}| \right) \int_0^t |dX_s| \rightarrow 0 \end{aligned}$$

car $\int_0^t |dX_s|$ est bornée (processus à variation bornée) et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{1 \leq i \leq p_n} |Y_{t_i^n} - Y_{t_{i-1}^n}| = 0$ par continuité des trajectoires de Y .

Démonstration : Pour simplifier, on suppose $X = Y$. Le cas général s'obtient ensuite facilement par polarisation du produit. Alors,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{p_n} (X_{t_i^n} - X_{t_{i-1}^n})^2 &= \sum_{i=1}^{p_n} (M_{t_i^n} - M_{t_{i-1}^n})^2 + \sum_{i=1}^{p_n} (A_{t_i^n} - A_{t_{i-1}^n})^2 \\ &\quad + 2 \sum_{i=1}^{p_n} (M_{t_i^n} - M_{t_{i-1}^n})(A_{t_i^n} - A_{t_{i-1}^n}). \end{aligned}$$

Le Th. 5.27 donne déjà pour la martingale locale M :

$$\mathbb{P}\text{-}\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^{p_n} (M_{t_i^n} - M_{t_{i-1}^n})^2 = \langle M, M \rangle_t = \langle X, X \rangle_t.$$

Puis comme A est à variation bornée et M est à trajectoires continues, la Remarque 5.40 précédente s'applique pour donner

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^{p_n} (M_{t_i^n} - M_{t_{i-1}^n})(A_{t_i^n} - A_{t_{i-1}^n}) &= \langle M, A \rangle_t = 0, \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^{p_n} (A_{t_i^n} - A_{t_{i-1}^n})^2 &= \langle A, A \rangle_t = 0. \end{aligned}$$

□

Les principaux résultats d'intégration contre un crochet de martingales locales restent vrais contre un crochet de semimartingales, en particulier :

Proposition 5.41 (Inégalité de Kunita-Watanabe) *Soit X, Y deux semimartingales continues et H, K deux processus progressifs localement bornés (ie. pour tout $t \geq 0$, $\sup_{s \leq t} |H_s| < +\infty$, idem pour K). Alors ps pour $t \geq 0$:*

$$\int_0^t |H_s| |K_s| |d\langle X, Y \rangle_s| \leq \left(\int_0^t H_s^2 d\langle X, X \rangle_s \right)^{1/2} \left(\int_0^t K_s^2 d\langle Y, Y \rangle_s \right)^{1/2}. \quad (5.14)$$

Troisième partie
Intégration stochastique

Chapitre 6

Intégration stochastique

On considère à nouveau dans ce chapitre un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ muni d'une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ satisfaisant les conditions habituelles. Le but est de construire une théorie de l'intégration contre les processus stochastiques. La bonne classe de processus à considérer est celle des semimartingales (à trajectoires continues) introduites dans le Chapitre 5.

On commence par intégrer par rapport à des martingales (à trajectoires) continues bornées dans L^2 en Section 6.1, cette construction est fondée sur une théorie L^2 . On étend cette construction par propriété d'arrêt en Section 6.2 à des martingales locales à trajectoires continues. On achève la construction en Section 6.3 avec l'intégration contre des semimartingales. On termine le chapitre par quelques commentaires sur le cas des semimartingales à trajectoires non continues en Section 6.4.

6.1 Par rapport à une martingale bornée dans L^2

Définition 6.1 (Espace H_c^2) On note H_c^2 l'espace des martingales M (à trajectoires continues) bornées dans $L^2(\Omega)$ et telles que $M_0 = 0$.

Le Th. 5.32 montre que, pour $M \in H_c^2$, on a $\mathbb{E}[\langle M, M \rangle_\infty] < +\infty$. D'après l'inégalité de Kunita-Watanabe (Prop. 5.37), si $M, N \in H_c^2$ on a $\mathbb{E}[|\langle M, N \rangle_\infty|] < +\infty$, en effet :

$$\mathbb{E}[|\langle M, N \rangle_\infty|] \leq \mathbb{E} \left[\int_0^{+\infty} |d\langle M, N \rangle_s| \right] \leq \mathbb{E}[\langle M, M \rangle_\infty]^{1/2} \mathbb{E}[\langle N, N \rangle_\infty]^{1/2} < +\infty.$$

On définit alors un produit scalaire sur H_c^2 par $(M, N)_{H_c^2} := \mathbb{E}[\langle M, N \rangle_\infty]$ et on note $\|\cdot\|_{H_c^2}$ la norme sur H_c^2 associée à ce produit scalaire :

$$\|M\|_{H_c^2} = (M, M)_{H_c^2}^{1/2} = \mathbb{E}[\langle M, M \rangle_\infty]^{1/2}.$$

D'après le Corollaire 5.34, en identifiant les processus indistinguables, on a bien une norme puisque $(M, M)_{H_c^2} = 0$ si et seulement si $M = 0$ (ie. le produit scalaire considéré est bien défini positif).

Proposition 6.2 *L'espace H_c^2 muni du produit scalaire $(M, N)_{H_c^2}$ est un espace de Hilbert.*

Démonstration : Il s'agit de vérifier que H_c^2 est complet pour la norme $\|\cdot\|_{H_c^2}$. Pour cela, on considère une suite de Cauchy $(M^n)_{n \geq 0}$ pour cette norme : comme $M^n - M^m \in H_c^2$, d'après le Théorème 5.32, $(M^n - M^m)^2 - \langle M^n - M^m, M^n - M^m \rangle$ est une martingale uniformément intégrable. L'égalité de martingale assure

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}[(M^n - M^m)_t^2 - \langle M^n - M^m, M^n - M^m \rangle_t] \\ &= \mathbb{E}[(M^n - M^m)_0^2 - \langle M^n - M^m, M^n - M^m \rangle_0] = 0 \end{aligned}$$

c'est à dire

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(M^n - M^m)_t^2] &= \mathbb{E}[\langle M^n - M^m, M^n - M^m \rangle_t] \\ &\leq \mathbb{E}[\langle M^n - M^m, M^n - M^m \rangle_\infty], \end{aligned}$$

soit

$$\sup_{t \geq 0} \mathbb{E}[(M^n - M^m)_t^2] \leq \|M^n - M^m\|_{H_c^2}^2.$$

La propriété de Cauchy pour la suite $(M^n)_{n \geq 0}$ dans H_c^2 donne donc

$$\lim_{m, n \rightarrow +\infty} \sup_{t \geq 0} \mathbb{E}[(M_t^n - M_t^m)^2] = \lim_{m, n \rightarrow +\infty} \|M^n - M^m\|_{H_c^2}^2 = 0.$$

On a aussi $\mathbb{E}[(M^n - M^m)_\infty^2] \leq \mathbb{E}[\langle M^n - M^m, M^n - M^m \rangle_\infty]$ et donc $M_n \xrightarrow{L^2} M_\infty$.

L'inégalité de moment de Doob (Prop. 4.18) donne alors

$$\lim_{m, n \rightarrow +\infty} \mathbb{E} \left[\sup_{t \geq 0} (M_t^n - M_t^m)^2 \right] \leq 4 \lim_{m, n \rightarrow +\infty} \sup_{t \geq 0} \mathbb{E}[(M_t^n - M_t^m)^2] = 0.$$

On peut alors extraire une sous-suite $(n_k)_{k \geq 0}$ telle que pour tout $k \geq 0$

$$\mathbb{E} \left[\sup_{t \geq 0} (M_t^{n_k} - M_t^{n_{k+1}})^2 \right]^{1/2} \leq \frac{1}{2^k}.$$

Avec l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a alors

$$\mathbb{E} \left[\sum_{k=0}^{+\infty} \sup_{t \geq 0} |M_t^{n_k} - M_t^{n_{k+1}}| \right] \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{E} \left[\sup_{t \geq 0} (M_t^{n_k} - M_t^{n_{k+1}})^2 \right]^{1/2} \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k} < +\infty.$$

On en déduit que presque sûrement

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \sup_{t \geq 0} |M_t^{n_k} - M_t^{n_{k+1}}| < +\infty. \quad (6.1)$$

Presque sûrement, la suite $(M_t^{n_k})_{t \geq 0}$ converge dans $C^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ muni de $\|\cdot\|_\infty$. En effet, en écrivant

$$M^{n_p} = \sum_{k=0}^{p-1} (M^{n_{k+1}} - M^{n_k}) + M^{n_0} \quad \text{et} \quad M = \sum_{k \geq 0} (M^{n_{k+1}} - M^{n_k}) + M^{n_0},$$

par (6.1), on a presque sûrement :

$$\begin{aligned} \sup_{t \geq 0} |M_t - M_t^{n_p}| &= \sup_{t \geq 0} \left| \sum_{k \geq p} (M_t^{n_{k+1}} - M_t^{n_k}) \right| \\ &\leq \sum_{k \geq p} \sup_{t \geq 0} |M_t^{n_{k+1}} - M_t^{n_k}| \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 0, \end{aligned}$$

on a la convergence uniforme de M^{n_p} vers $M = (M_t)_{t \geq 0}$ qui est donc dans $C^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$. Sur l'ensemble négligeable où il n'y a pas convergence, on impose $M_t \equiv 0$. Le processus limite $(M_t)_{t \geq 0}$ a alors des trajectoires continues.

Comme, pour chaque $t \geq 0$, la suite $(M_t^{n_k})_{k \geq 0}$ est évidemment de Cauchy dans $L^2(\Omega)$, $(M_t^{n_k})_{k \geq 0}$ converge aussi dans $L^2(\Omega)$ vers M_t pour tout $t \geq 0$. On peut donc passer à la limite dans $L^1(\Omega)$ dans la propriété de martingale de $(M_t^{n_k})_{t \geq 0}$ et on obtient celle de $(M_t)_{t \geq 0}$ qui est donc aussi une martingale. La suite $(M^n)_{n \geq 1}$ étant de Cauchy dans H_c^2 , elle est bornée dans H_c^2 pour $\|\cdot\|_{H_c^2}$, on a alors pour tout $n \geq 1, t \geq 0$

$$\mathbb{E}[(M_t^n)^2] = \mathbb{E}[\langle M^n, M^n \rangle_t] \leq \mathbb{E}[\langle M^n, M^n \rangle_\infty] = \|M^n\|_{H_c^2}^2 \leq \sup_{n \geq 0} \|M^n\|_{H_c^2}^2$$

soit $\sup_{n \geq 1} \mathbb{E}[(M_t^n)^2] < +\infty$. La collection de variables aléatoires $\{M_t^n : n \geq 1, t \geq 0\}$ est donc uniformément bornée dans $L^2(\Omega)$. Par conséquent, la martingale M est aussi bornée dans $L^2(\Omega)$, ce qui assure $M \in H_c^2$.

Enfin, comme $M, M^{n_k} \in H_c^2$, $(M - M^{n_k})^2 - \langle M - M^{n_k}, M - M^{n_k} \rangle$ est une martingale uniformément intégrale (Th. 5.27), on a

$$\|M^{n_k} - M\|_{H_c^2}^2 = \mathbb{E}[\langle M^{n_k} - M, M^{n_k} - M \rangle_\infty] = \mathbb{E}[(M_\infty^{n_k} - M_\infty)^2] \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0,$$

ce qui montre que la sous-suite $(M^{n_k})_{k \geq 0}$ converge vers M dans H_c^2 . Finalement, comme la suite de Cauchy $(M^n)_{n \geq 0}$ a une sous-suite convergeant vers M , elle converge entièrement vers M dans H_c^2 . \square

Rappelons que Prog désigne la tribu progressive sur $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ (Déf. 4.4) et que les processus, vus comme fonctions sur $(\mathbb{R}_+ \times \Omega, \text{Prog})$ sont appelés progressifs (Déf. 4.3).

Définition 6.3 (Espace $L^2(M)$) Pour $M \in H_c^2$, on note

$$L^2(M) = L^2(\mathbb{R}_+ \times \Omega, \text{Prog}, d\mathbb{P} \otimes d\langle M, M \rangle)$$

l'espace des processus progressifs $H = (H_t)_{t \geq 0}$ tels que

$$\mathbb{E} \left[\int_0^{+\infty} H_t^2 d\langle M, M \rangle_t \right] < +\infty.$$

L'espace $L^2(M)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$(H, K)_{L^2(M)} = \mathbb{E} \left[\int_0^{+\infty} H_s K_s d\langle M, M \rangle_s \right]. \quad (6.2)$$

Définition 6.4 (Processus simple) On note \mathcal{S} le sous-espace vectoriel de $L^2(M)$ formé des processus H , dits simples, de la forme

$$H_t(\omega) = \sum_{i=0}^{p-1} H_{(i)}(\omega) \mathbf{1}_{]t_i, t_{i+1}]}(t) \quad (6.3)$$

où $0 < t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_p$ et pour chaque $0 \leq i \leq p$, $H_{(i)}$ est une variable aléatoire \mathcal{F}_{t_i} -mesurable et bornée.

Proposition 6.5 (Densité) Pour tout $M \in H_c^2$, l'espace \mathcal{S} est dense dans $L^2(M)$.

Démonstration : Il suffit de montrer que si $K \in L^2(M)$ est orthogonal à \mathcal{S} alors $K = 0$. Supposons donc K orthogonal à \mathcal{S} pour le produit scalaire (6.2). Soit $0 \leq s < r$ et soit F une variable aléatoire \mathcal{F}_s -mesurable bornée. Avec $H = F \mathbf{1}_{]s, r]} \in \mathcal{S}$, on a

$$\mathbb{E} \left[F \int_s^r K_t d\langle M, M \rangle_t \right] = (H, K)_{L^2(M)} = 0. \quad (6.4)$$

En posant

$$X_t = \int_0^t K_u d\langle M, M \rangle_u, \quad t \geq 0,$$

l'égalité (6.4) se réécrit $\mathbb{E}[F(X_t - X_s)] = 0$ pour tous $s < t$ et toute variable aléatoire \mathcal{F}_s -mesurable F bornée. De plus $X_t \in L^1(\mathcal{F}_t)$ pour tout $t \geq 0$, car

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[|X_t|] &= \mathbb{E} \left[\left| \int_0^t K_u d\langle M, M \rangle_u \right| \right] \\ &\leq \mathbb{E} \left[\left(\int_0^t K_u^2 d\langle M, M \rangle_u \int_0^t d\langle M, M \rangle_u \right)^{1/2} \right] \\ &\quad (\text{par Kunita-Watanabe (5.11) pour } d\langle M, M \rangle_u) \\ &\leq \mathbb{E} \left[\int_0^t K_u^2 d\langle M, M \rangle_u \right]^{1/2} \mathbb{E}[\langle M, M \rangle_t]^{1/2} < +\infty \\ &\quad (\text{par Cauchy-Schwarz pour } \mathbb{E}) \end{aligned}$$

car $M \in H_c^2$ et $K \in L^2(M)$. Le processus $X = (X_t)_{t \geq 0}$ est donc une martingale.

D'autre part, par la Proposition 5.11, X étant une intégrale contre un processus croissant est aussi un processus à variation bornée avec $X_0 = 0$. Le Théorème 5.26 exige alors d'avoir $X = 0$, ie.

$$\int_0^t K_u d\langle M, M \rangle_u = 0 \quad \forall t \geq 0 \text{ ps.}$$

Comme $0 = \int_0^t K_u d\langle M, M \rangle_u = \int_{\mathbb{R}_+} K_u \mathbf{1}_{[0,t]}(u) d\langle M, M \rangle_u$, la mesure $K_u d\langle M, M \rangle_u$ coïncide avec la mesure nulle sur la famille des intervalles $[0, t]$, donc par un argument de classe monotone sur tout $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$. Cela assure que K est ps orthogonal à $L^2(M)$, ou encore $K = 0$ dans $L^2(M)$, établissant la densité de \mathcal{S} dans $L^2(M)$. \square

On commence la construction de l'intégrale stochastique avec le cas de processus simple H à intégrer :

Définition 6.6 (Intégrale stochastique simple) Soit $M \in H_c^2$ et $H \in \mathcal{S}$ de la forme (6.3). On définit le processus $H \cdot M$ par

$$(H \cdot M)_t = \sum_{i=0}^{p-1} H_{(i)}(M_{t_{i+1} \wedge t} - M_{t_i \wedge t}).$$

Proposition 6.7 Soit $M \in H_c^2$ et $H \in \mathcal{S}$. Alors on a $H \cdot M \in H_c^2$ et pour tout $N \in H_c^2$:

$$\langle H \cdot M, N \rangle_t = \int_0^t H_s d\langle M, N \rangle_s = H \cdot \langle M, N \rangle_t. \quad (6.5)$$

Remarque 6.8 — En général, on utilise la notation intégrale pour écrire ces processus :

$$(H \cdot M)_t = \int_0^t H_s dM_s.$$

- L'intégrale $H \cdot \langle M, N \rangle$ qui figure dans le terme de droite de (6.5) est une intégrale de Stieltjes par rapport à un processus à variation bornée $\langle M, N \rangle$, comme défini dans la Section 5.1.2.
- Par symétrie et en itérant (6.5), on a aussi $\langle H \cdot M, H \cdot M \rangle = H^2 \cdot \langle M, M \rangle$.

Démonstration : Pour $H \in \mathcal{S}$ de la forme (6.3), on écrit $H \cdot M = \sum_{i=0}^{p-1} M_t^{(i)}$ où $M_t^{(i)} := H_{(i)}(M_{t_{i+1} \wedge t} - M_{t_i \wedge t})$. On commence par observer que $(M_t^{(i)})_{t \geq 0}$ est une martingale pour chaque $0 \leq i \leq p-1$. En effet : pour $s \leq t$,

- si $s \geq t_i$:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[M_t^{(i)} | \mathcal{F}_s] &= \mathbb{E}[H_{(i)}(M_{t_{i+1} \wedge t} - M_{t_i \wedge t}) | \mathcal{F}_s] = H_{(i)} \mathbb{E}[(M_{t_{i+1} \wedge t} - M_{t_i \wedge t}) | \mathcal{F}_s] \\ &= H_{(i)}(M_{t_{i+1} \wedge s} - M_{t_i \wedge s}) = M_s^{(i)}; \end{aligned}$$

— puis si $s < t_i$:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[M_t^{(i)}|\mathcal{F}_s] &= \mathbb{E}[H_{(i)}(M_{t_{i+1}\wedge t} - M_{t_i\wedge t})|\mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[H_{(i)}(M_{t_{i+1}\wedge t} - M_{t_i\wedge t})|\mathcal{F}_{t_i}]|\mathcal{F}_s] \\ &= \mathbb{E}[H_{(i)}\mathbb{E}[(M_{t_{i+1}\wedge t} - M_{t_i\wedge t})|\mathcal{F}_{t_i}]|\mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[H_{(i)}(M_{t_i\wedge t} - M_{t_i\wedge t})|\mathcal{F}_s] \\ &= 0 = M_s^{(i)}.\end{aligned}$$

On a donc $\mathbb{E}[M_t^{(i)}|\mathcal{F}_s] = M_s^{(i)}$ pour tout $t \geq s$ et $H \cdot M = \sum_{i=0}^{p-1} M^{(i)}$ est bien une martingale. De plus, comme H est bornée et $M \in H_c^2$, on a aussi $H \cdot M \in H_c^2$.

Pour la deuxième partie, d'abord, si $H = H_{(i)}\mathbf{1}_{]t_i, t_{i+1}]}$, comme $MN - \langle M, N \rangle$ est une martingale (car martingale locale bornée dans L^2 d'après la Prop. 5.35), en remplaçant M par $M^{t_{i+1}}$ ou M^{t_i} alors

$$M^{t_{i+1}}N - \langle M, N \rangle^{t_{i+1}} \quad \text{et} \quad M^{t_i}N - \langle M, N \rangle^{t_i}$$

sont des martingales. Par conséquent la différence

$$\begin{aligned}(M^{t_{i+1}} - M^{t_i})N - (\langle M, N \rangle^{t_{i+1}} - \langle M, N \rangle^{t_i}) \\ = (M^{t_{i+1}}N - \langle M, N \rangle^{t_{i+1}}) - (M^{t_i}N - \langle M, N \rangle^{t_i})\end{aligned}$$

est aussi une martingale et elle est nulle en $t \leq t_i$ puisqu'alors

$$\begin{aligned}M_t^{t_{i+1}}N_t - \langle M, N \rangle_t^{t_{i+1}} &= M_{t_{i+1}\wedge t}N_t - \langle M, N \rangle_{t_{i+1}\wedge t} = M_tN_t - \langle M, N \rangle_t \\ M_t^{t_i}N_t - \langle M, N \rangle_t^{t_i} &= M_{t_i\wedge t}N_t - \langle M, N \rangle_{t_i\wedge t} = M_tN_t - \langle M, N \rangle_t\end{aligned}$$

Comme $H_{(i)} \in \mathcal{F}_{t_i}$,

$$H_{(i)}(M^{t_{i+1}} - M^{t_i})N - H_{(i)}(\langle M, N \rangle^{t_{i+1}} - \langle M, N \rangle^{t_i})$$

est encore une martingale : soit $s \leq t$,

— si $t_i \leq s$, alors $H_{(i)}$ est \mathcal{F}_s -mesurable et :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[H_{(i)}(M_t^{t_{i+1}} - M_t^{t_i})N_t - H_{(i)}(\langle M, N \rangle_t^{t_{i+1}} - \langle M, N \rangle_t^{t_i})|\mathcal{F}_s] \\ = H_{(i)}\mathbb{E}[(M_t^{t_{i+1}} - M_t^{t_i})N_t - H_{(i)}(\langle M, N \rangle_t^{t_{i+1}} - \langle M, N \rangle_t^{t_i})|\mathcal{F}_s] \\ = H_{(i)}(M_s^{t_{i+1}} - M_s^{t_i})N_s - H_{(i)}(\langle M, N \rangle_s^{t_{i+1}} - \langle M, N \rangle_s^{t_i});\end{aligned}$$

— si $s < t_i$, alors

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[H_{(i)}(M_t^{t_{i+1}} - M_t^{t_i})N_t - H_{(i)}(\langle M, N \rangle_t^{t_{i+1}} - \langle M, N \rangle_t^{t_i})|\mathcal{F}_s] \\ = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}[H_{(i)}(M_t^{t_{i+1}} - M_t^{t_i})N_t - H_{(i)}(\langle M, N \rangle_t^{t_{i+1}} - \langle M, N \rangle_t^{t_i})|\mathcal{F}_{t_i}|\mathcal{F}_s]\right] \\ = \mathbb{E}\left[H_{(i)}\mathbb{E}[(M_t^{t_{i+1}} - M_t^{t_i})N_t - H_{(i)}(\langle M, N \rangle_t^{t_{i+1}} - \langle M, N \rangle_t^{t_i})|\mathcal{F}_{t_i}|\mathcal{F}_s]\right] \\ = \mathbb{E}\left[H_{(i)}\underbrace{(M_s^{t_{i+1}} - M_s^{t_i})N_s - H_{(i)}(\langle M, N \rangle_s^{t_{i+1}} - \langle M, N \rangle_s^{t_i})}_{=0 \text{ car } s \leq t_i}|\mathcal{F}_s]\right] = 0\end{aligned}$$

Ensuite, en sommant sur $0 \leq i \leq p-1$,

$$\begin{aligned} (H \cdot M)N - \int_0^\cdot H_s d\langle M, N \rangle_s \\ = \sum_{i=0}^{p-1} \left(H_{(i)}(M^{t_{i+1}} - M^{t_i})N - H_{(i)}(\langle M, N \rangle^{t_{i+1}} - \langle M, N \rangle^{t_i}) \right) \end{aligned}$$

reste aussi une martingale. D'après la Prop. 5.35, cette propriété identifie le crochet de $(H \cdot M)$ et de N :

$$\langle (H \cdot M), N \rangle = H \cdot \langle M, N \rangle.$$

□

On poursuit la construction de l'intégrale stochastique à partir du cas H , processus simple, de la Déf. 6.6, en passant au cas $H \in L^2(M)$ par densité (Prop. 6.5).

Théorème 6.9 (Intégrale stochastique L^2) Soit $M \in H_c^2$. Alors, l'application $H \in \mathcal{S} \mapsto H \cdot M$ s'étend en une isométrie de $L^2(M)$ dans H_c^2 . De plus,

(1) la martingale $H \cdot M$ est caractérisée par la relation

$$\langle H \cdot M, N \rangle = H \cdot \langle M, N \rangle, \quad \forall N \in H_c^2; \quad (6.6)$$

(2) puis, si T est un temps d'arrêt, on a la propriété d'arrêt :

$$(\mathbf{1}_{[0,T]}H) \cdot M = (H \cdot M)^T = H \cdot M^T. \quad (6.7)$$

Avec des notations intégrales, cette dernière propriété s'écrit de façon naturelle :

$$\int_0^t \mathbf{1}_{[0,T]} H dM = \int_0^{t \wedge T} H dM = \int_0^t H dM^T.$$

Démonstration : L'application $H \mapsto H \cdot M$ est clairement linéaire. Puis pour $H \in \mathcal{S}$, on a vu que $H \cdot M$ est une martingale avec la propriété caractéristique (6.5) (Prop. 6.7). On a

$$\begin{aligned} \|H \cdot M\|_{H_c^2}^2 &= \mathbb{E}[\langle H \cdot M, H \cdot M \rangle_\infty] \\ &= \mathbb{E}[H^2 \cdot \langle M, M \rangle_\infty] \quad (\text{par (6.5)}) \\ &= \mathbb{E} \left[\int_0^{+\infty} H_s^2 d\langle M, M \rangle_s \right] \\ &= \|H\|_{L^2(M)}^2. \end{aligned}$$

L'application $H \mapsto H \cdot M$ est donc une isométrie de \mathcal{S} dans H_c^2 .

Comme H_c^2 est un espace de Hilbert (Proposition 6.2) et comme \mathcal{S} est dense dans $L^2(M)$ (Proposition 6.5), on peut prolonger de manière unique cette application en une isométrie de $L^2(M)$ dans H_c^2 .

1) On vérifie maintenant la propriété de crochet caractéristique (6.6). On sait déjà par (6.5) qu'elle est vraie si $H \in \mathcal{S}$. Pour la généraliser, notons que pour $N \in H_c^2$, l'application

$$\begin{cases} H_c^2 & \longrightarrow L^1(\Omega) \\ X & \longmapsto \langle X, N \rangle_\infty \end{cases} \quad (6.8)$$

est continue de H_c^2 dans $L^1(\Omega)$: en effet, par les inégalités (5.14) de Kunita-Watanabe (Prop. 5.41) et de Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[|\langle X, N \rangle_\infty|] &\leq \mathbb{E}[\langle X, X \rangle_\infty^{1/2} \langle N, N \rangle_\infty^{1/2}] \quad (\text{Kunita-Watanabe}) \\ &= \mathbb{E}[\langle X, X \rangle_\infty]^{1/2} \mathbb{E}[\langle N, N \rangle_\infty]^{1/2} \quad (\text{Cauchy-Schwarz}) \\ &= \mathbb{E}[\langle N, N \rangle_\infty]^{1/2} \|X\|_{H_c^2}. \end{aligned}$$

Par densité de \mathcal{S} dans $L^2(M)$ (Prop. 6.5), soit alors $H \in L^2(M)$ et $(H^n)_{n \geq 0}$ suite de \mathcal{S} qui converge vers H dans $L^2(M)$. Par l'isométrie, on a alors $H^n \cdot M \xrightarrow{H_c^2} H \cdot M$ quand $n \rightarrow +\infty$. Puis par la continuité de (6.8) :

$$\langle H \cdot M, N \rangle_\infty = L^1\text{-}\lim_{n \rightarrow +\infty} \langle H^n \cdot M, N \rangle_\infty = L^1\text{-}\lim_{n \rightarrow +\infty} (H^n \cdot \langle M, N \rangle)_\infty = (H \cdot \langle M, N \rangle)_\infty,$$

où les convergences ont lieu dans $L^1(\Omega)$ avec pour la dernière égalité l'utilisation, encore, des inégalités (5.14) de Kunita-Watanabe et de Cauchy-Schwarz :

$$\mathbb{E} \left[\left| \int_0^{+\infty} (H_s^n - H_s) d\langle M, N \rangle_s \right| \right] \leq \mathbb{E}[\langle N, N \rangle_\infty]^{1/2} \|H^n - H\|_{L^2(M)}.$$

(On justifie de la même façon que $(H \cdot \langle M, N \rangle)_\infty$ est bien défini.) On a donc établi la propriété de crochet (6.6) pour $t = +\infty$. Pour conclure, il faut l'obtenir pour tout $t \geq 0$. Pour cela, il suffit de remplacer N par la martingale arrêtée N^t en $t \geq 0$ dans l'égalité $\langle H \cdot M, N \rangle_\infty = (H \cdot \langle M, N \rangle)_\infty$ et on trouve

$$\begin{aligned} \langle H \cdot M, N \rangle_t &= \langle H \cdot M, N \rangle_\infty^t = \langle H \cdot M, N^t \rangle_\infty \\ &= (H \cdot \langle M, N^t \rangle)_\infty = (H \cdot \langle M, N \rangle^t)_\infty = (H \cdot \langle M, N \rangle)_t \end{aligned}$$

ce qui achève de prouver la propriété de crochet (6.6).

La propriété (6.6) est bien caractéristique pour $H \cdot M$: soit X une autre martingale de H_c^2 qui satisfait la même propriété (6.6), on a pour tout $N \in H_c^2$,

$$\langle H \cdot M - X, N \rangle = 0.$$

Le choix particulier $N = H \cdot M - X \in H_c^2$ donne alors $\langle H \cdot M - X, H \cdot M - X \rangle = 0$ donc $\|H \cdot M - X\|_{H_c^2} = 0$, ie. $X = H \cdot M$. Cela termine la preuve de **1)**.

2) Pour prouver la dernière propriété, on utilise la propriété d'arrêt du crochet (5.10) de deux martingales (Prop. 5.35) et la propriété caractéristique (6.6) déjà prouvée : si $N \in H_c^2$, on a

$$\langle (H \cdot M)^T, N \rangle_t = \langle H \cdot M, N \rangle_{t \wedge T} = (H \cdot \langle M, N \rangle)_{t \wedge T} = (H \mathbf{1}_{[0, T]} \cdot \langle M, N \rangle)_t$$

où l'avant dernière égalité vient de (6.6) et la dernière égalité est évidente puisqu'il s'agit d'une intégrale de Stieltjes. La martingale arrêtée $(H \cdot M)^T$ vérifie donc la propriété caractéristique de l'intégrale $(\mathbf{1}_{[0,T]}H) \cdot M$. Cela justifie la première partie de (6.7). On obtient la seconde partie en procédant de même :

$$\langle H \cdot M^T, N \rangle = H \cdot \langle M^T, N \rangle = H \cdot \langle M, N \rangle^T = (H\mathbf{1}_{[0,T]}) \cdot \langle M, N \rangle$$

où à nouveau la dernière égalité est due au fait qu'il s'agit d'une intégrale de Stieltjes. \square

Le résultat suivant est une propriété d'associativité de l'intégrale stochastique sous réserve de conditions convenables d'intégrabilité des processus à intégrer.

Proposition 6.10 (Associativité de l'intégrale stochastique L^2) Soit $M \in H_c^2$, $K \in L^2(M)$ et $H \in L^2(K \cdot M)$. Alors $HK \in L^2(M)$ et

$$(HK) \cdot M = H \cdot (K \cdot M). \quad (6.9)$$

Démonstration : D'après le Théorème 6.9, on a

$$\langle K \cdot M, K \cdot M \rangle = K \cdot \langle M, K \cdot M \rangle = K^2 \cdot \langle M, M \rangle,$$

et donc

$$\mathbb{E} \left[\int_0^{+\infty} H_s^2 K_s^2 d\langle M, M \rangle_s \right] = \mathbb{E} \left[\int_0^{+\infty} H_s^2 d\langle K \cdot M, K \cdot M \rangle_s \right] < +\infty$$

ce qui garantit $HK \in L^2(M)$. Pour (6.9), on montre la propriété caractéristique (6.6) : si $N \in H_c^2$, on a :

$$\langle (HK) \cdot M, N \rangle = HK \cdot \langle M, N \rangle = H \cdot (K \cdot \langle M, N \rangle) = H \cdot \langle K \cdot M, N \rangle = \langle H \cdot (K \cdot M), N \rangle$$

où la deuxième égalité utilise l'associativité de l'intégrale de Stieltjes. Comme l'égalité est vraie pour toute $N \in H_c^2$, elle exige $(HK) \cdot M = H \cdot (K \cdot M)$. \square

Remarque 6.11 (Moments des intégrales stochastiques) La proposition précédente légitime les écritures informelles suivantes :

$$\int_0^t H_s (K_s dM_s) = \int_0^t H_s K_s dM_s.$$

De même (6.6) s'écrit

$$\left\langle \int_0^\cdot H_s dM_s, N \right\rangle_t = \int_0^t H_s d\langle M, N \rangle_s.$$

En appliquant deux fois cette relation, on obtient aussi :

$$\left\langle \int_0^\cdot H_s dM_s, \int_0^\cdot K_s dN_s \right\rangle_t = \int_0^t H_s K_s d\langle M, N \rangle_s. \quad (6.10)$$

En particulier, on a

$$\left\langle \int_0^\cdot H_s dM_s, \int_0^\cdot H_s dM_s \right\rangle_t = \int_0^t H_s^2 d\langle M, M \rangle_s.$$

Soit $M \in H_c^2$, $N \in H_c^2$ et $H \in L^2(M)$, $K \in L^2(N)$, comme $H \cdot M$ et $(H \cdot M)(K \cdot N) - \langle (H \cdot M), (K \cdot N) \rangle$ sont des martingales (en utilisant (6.10)), on a pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ les moments suivants :

$$\mathbb{E} \left[\int_0^t H_s dM_s \right] = 0 \quad (6.11)$$

$$\mathbb{E} \left[\left(\int_0^t H_s dM_s \right) \left(\int_0^t K_s dN_s \right) \right] = \mathbb{E} \left[\int_0^t H_s K_s d\langle M, N \rangle_s \right]. \quad (6.12)$$

Attention : Ces relations (6.11), (6.12) ne seront plus forcément vraies pour les extensions de l'intégrale stochastique qu'on décrit ci-dessous pour les martingales locales.

Remarque 6.12 (Sur l'intégrale contre le mouvement brownien) Le mouvement brownien est bien une martingale continue mais n'est pas borné dans L^2 (par exemple avec le Théorème 5.32 parce que son crochet $\langle B, B \rangle_t = t \rightarrow +\infty$). Cette section ne permet donc toujours pas de construire une intégrale contre le mouvement brownien. Les derniers obstacles sont levés dans la section suivante.

6.2 Par rapport à une martingale locale

En utilisant la propriété d'arrêt (6.7), on étend maintenant dans cette section la définition de $H \cdot M$ au cas où M est une martingale locale à trajectoires continues. Dans cette section, on considère M une martingale locale à trajectoires continues issue de 0.

Définition 6.13 (Espaces $L_{loc}^2(M)$) On note $L_{loc}^2(M)$ l'espace des processus progressifs H tels que pour tout $t \geq 0$,

$$\int_0^t H_s^2 d\langle M, M \rangle_s < +\infty \quad ps.$$

Pour une martingale locale M , on continue à noter $L^2(M)$ l'espace des processus progressifs H tels que

$$\mathbb{E} \left[\int_0^{+\infty} H_s^2 d\langle M, M \rangle_s \right] < +\infty.$$

Le résultat suivant achève (presque) la construction de l'intégrale stochastique, en considérant le cas d'une martingale locale M à trajectoires continues.

Théorème 6.14 (Intégrale stochastique générale) *Soit M une martingale locale, à trajectoires continues, issue de 0. Alors pour tout $H \in L^2_{loc}(M)$, il existe une unique martingale locale issue de 0, notée $H \cdot M$. De plus :*

(1) *la martingale locale $H \cdot M$ est caractérisée par la propriété de crochet :*

$$\langle H \cdot M, N \rangle = H \cdot \langle M, N \rangle \quad \forall N \text{ martingale locale ;} \quad (6.13)$$

(2) *la propriété d'arrêt (6.7) reste vraie : si T est un temps d'arrêt, on a*

$$(\mathbf{1}_{[0,T]}H) \cdot M = (H \cdot M)^T = H \cdot M^T. \quad (6.14)$$

Remarque 6.15 — On note habituellement $(H \cdot M)_t = \int_0^t H_s dM_s$.

— Cette définition étend celle du Théorème 6.9 : si $M \in H^2_c$ et $H \in L^2(M)$, alors les définitions des deux théorèmes coïncident.

En effet, si $M \in H^2_c$ et $H \in L^2(M)$, l'égalité $\langle H \cdot M, H \cdot M \rangle = H^2 \cdot \langle M, M \rangle$ entraîne d'abord que $H \cdot M \in H^2_c$, et ensuite les propriétés caractéristiques (6.6) et (6.13) montrent que les définitions des Théorèmes 6.9 et 6.14 coïncident.

— La propriété d'associativité de la Proposition 6.10 reste vraie aussi sous des hypothèses convenables d'intégrabilité.

— Le mouvement brownien B est une martingale locale pour laquelle le Théorème 6.14 définit donc l'intégrale $(H \cdot B)_t = \int_0^t H_s dB_s$ pour $H \in L^2_{loc}(B)$. Les intégrales stochastiques par rapport au mouvement brownien B s'appellent les **intégrales d'Itô**. Le calcul stochastique lié à ces intégrales est le **calcul d'Itô**.

Démonstration : On définit

$$T_n = \inf \left(t \geq 0 : \int_0^t (1 + H_s^2) d\langle M, M \rangle_s \geq n \right).$$

Comme pour la Prop. 5.24, il s'agit d'une suite de temps d'arrêt, croissante vers $+\infty$. Comme on a

$$\langle M^{T_n}, M^{T_n} \rangle_t = \langle M, M \rangle_{t \wedge T_n} \leq \int_0^{T_n} d\langle M, M \rangle_s \leq n,$$

la martingale locale arrêtée M^{T_n} est une (vraie) martingale bornée dans L^2 par le Th. 5.32, ie. M^{T_n} est dans H^2_c . De plus, $H \in L^2(M^{T_n})$ car par définition de T_n , on a aussi

$$\int_0^{+\infty} H_s^2 d\langle M^{T_n}, M^{T_n} \rangle_s = \int_0^{T_n} H_s^2 d\langle M, M \rangle_s \leq n.$$

Pour chaque $n \geq 1$, on peut donc définir l'intégrale stochastique $H \cdot M^{T_n}$ par le Th. 6.9 (cas L^2 borné). Par la propriété caractéristique (6.6), on vérifie facilement que nécessairement si $m > n$ alors $T_m \geq T_n$ et on a

$$H \cdot M^{T_n} = (H \cdot M^{T_m})^{T_n}.$$

En effet

$$\begin{aligned}
\langle (H \cdot M^{T_m})^{T_n}, N \rangle_t &= \langle (H \cdot M^{T_m}), N \rangle_{t \wedge T_n} = \int_0^{t \wedge T_n} H_s d\langle M^{T_m}, N \rangle_s \\
&= \int_0^{t \wedge T_n} H_s d\langle M, N \rangle_s^{T_m} = \int_0^{t \wedge T_n \wedge T_m} H_s d\langle M, N \rangle_s \\
&= \int_0^{t \wedge T_n} H_s d\langle M, N \rangle_s = (H \cdot \langle M, N \rangle)_t^{T_n} = \langle (H \cdot M), N \rangle_t^{T_n} \\
&= \langle (H \cdot M)^{T_n}, N \rangle_t.
\end{aligned}$$

Il existe donc un (unique) processus noté $H \cdot M$ qui étend tous les $H \cdot M^{T_n}$, ie. pour tout $n \geq 1$,

$$(H \cdot M)^{T_n} = H \cdot M^{T_n}.$$

Explicitement, on pose

$$(H \cdot M)_t = (H \cdot M^{T_n})_t \quad (6.15)$$

pour tout n tel que $T_n \geq t$, la discussion précédente justifiant que la définition a bien un sens (elle ne dépend pas de n !). D'après le Théorème 6.9 (isométrie entre $L^2(M)$ et H_c^2), les processus $(H \cdot M)^{T_n} = H \cdot M^{T_n}$ sont des martingales de H_c^2 , si bien que $H \cdot M$ est en fait une martingale locale.

1) On montre maintenant la propriété de crochet (6.13) caractéristique. Pour cela, soit N une martingale locale issue de 0 et soit $T'_n = \inf(t \geq 0 : |N_t| \geq n)$, $n \geq 1$, une suite de temps d'arrêt qui réduit N . On pose alors $S_n = T_n \wedge T'_n$. Comme $M^{S_n}, N^{S_n} \in H_2^c$, on a

$$\begin{aligned}
\langle H \cdot M, N \rangle^{S_n} &= \langle (H \cdot M)^{S_n}, N^{S_n} \rangle \\
&= \langle (H \cdot M^{T_n})^{S_n}, N^{S_n} \rangle \quad (\text{car } S_n \leq T_n) \\
&= \langle H \cdot M^{T_n}, N^{S_n} \rangle \quad (\text{propriété (5.10) du crochet}) \\
&= H \cdot \langle M^{T_n}, N^{S_n} \rangle \quad (\text{d'après (6.6) du cas } L^2 \text{ borné}) \\
&= H \cdot \langle M^{T_n}, N \rangle^{S_n} \quad (\text{propriété (5.10) du crochet}) \\
&= H \cdot \langle M, N \rangle^{S_n \wedge T_n} = H \cdot \langle M, N \rangle^{S_n} \quad (S_n \leq T_n) \\
&= (H \cdot \langle M, N \rangle)^{S_n} \quad (\text{propriété de l'intégrale de Stieltjes}). \quad (6.16)
\end{aligned}$$

Comme $S_n \nearrow +\infty$, en faisant $n \rightarrow +\infty$, on déduit de (6.16) pour tout $t \geq 0$: $\langle H \cdot M, N \rangle_t = H \cdot \langle M, N \rangle_t$. Finalement, on a $\langle H \cdot M, N \rangle = H \cdot \langle M, N \rangle$, établissant la propriété de crochet (6.13) dans ce cas général.

La caractérisation de $H \cdot M$ par (6.13) se justifie exactement comme précédemment dans le Th. 6.9 : si pour toute martingale locale N

$$\langle (H \cdot M), N \rangle = H \cdot \langle M, N \rangle = \langle X, N \rangle,$$

alors pour la martingale locale $N = (H \cdot M) - X$, on a $\langle (H \cdot M) - X, (H \cdot M) - X \rangle = 0$, et d'après le Th. 5.32 $(H \cdot M) - X$ est une vraie martingale L^2 . La propriété de martingale

donne alors $\mathbb{E}[(H \cdot M)_t - X_t]^2 = 0$, donc $(H \cdot M)_t - X_t = 0$ presque sûrement. Comme il s'agit de processus à trajectoires continues, on a $X = H \cdot M$, à indistinguabilité près (cf. Corollaire 5.34).

2) La propriété d'arrêt (6.14) est obtenue pour les martingales locales par les mêmes arguments que dans la preuve du Th. 6.9 (noter que ces arguments utilisent seulement la propriété caractéristique (6.6) qu'on vient d'étendre). \square

Remarque 6.16 (Moments des intégrales stochastiques) Discutons maintenant de l'extension des formules de moments (6.11), (6.12) énoncées en Remarque 6.11. Soit M une martingale locale, $H \in L^2_{loc}(M)$ et $t \in [0, +\infty]$. Alors, sous la condition

$$\mathbb{E}[\langle H \cdot M, H \cdot M \rangle_t] = \mathbb{E} \left[\int_0^t H_s^2 d\langle M, M \rangle_s \right] < +\infty,$$

on a $H \in L^2(M^t)$ et on peut appliquer le Théorème 5.32 à $(H \cdot M)^t$ pour obtenir

$$\mathbb{E} \left[\int_0^t H_s dM_s \right] = 0, \quad \mathbb{E} \left[\left(\int_0^t H_s dM_s \right)^2 \right] = \mathbb{E} \left[\int_0^t H_s^2 d\langle M, M \rangle_s \right].$$

De façon générale, la propriété d'isométrie de l'intégrale stochastique du cas borné dans L^2 est remplacée par

$$\mathbb{E} \left[\left(\int_0^t H_s dM_s \right)^2 \right] \leq \mathbb{E} \left[\int_0^t H_s^2 d\langle M, M \rangle_s \right]. \quad (6.17)$$

En effet, soit le majorant est $+\infty$ et l'inégalité est vraie, soit il est fini et l'estimation de la variance reste valable et donne l'égalité.

L'énoncé suivant établit une approximation par des sommes de Riemann des intégrales stochastiques (contre une martingale locale) et complète la Prop. 5.7 pour le cas d'un processus à variation bornée.

Proposition 6.17 (Approximation de Riemann) *Soit M une martingale locale à trajectoires continues et H un processus adapté à trajectoires continues. Alors, pour tout $t > 0$, pour toute suite $0 = t_0^n < \dots < t_{p_n}^n = t$ de subdivisions de $[0, t]$ de pas tendant vers 0, on a, au sens de la convergence en probabilité :*

$$\mathbb{P}\text{-}\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=0}^{n-1} H_{t_i^n} (M_{t_{i+1}^n} - M_{t_i^n}) = \int_0^t H_s dM_s. \quad (6.18)$$

Démonstration : On commence par observer que (6.18) est immédiate pour un processus $H^{(n)}$ simple donné par

$$H_t^{(n)} = \sum_{i=0}^{p-1} H_{t_i^n} \mathbf{1}_{]t_i^n, t_{i+1}^n]}, \quad t \geq 0.$$

Dans le cas général, on pose pour tout $p \geq 1$:

$$T_p = \inf \left(s \geq 0 : |H_s| + \langle M, M \rangle_s \geq p \right) \quad (6.19)$$

et on remarque que $H, H^{(n)}$ et $\langle M, M \rangle$ sont bornés sur l'intervalle $]0, T_p]$. D'après la théorie L^2 de l'intégrale stochastique en Section 6.1 (avec notamment l'expression (6.12) pour le moment d'ordre 2), on a pour tout p fixé :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\left((H^{(n)} \cdot M^{T_p})_t - (H \cdot M^{T_p})_t \right)^2 \right] &= \mathbb{E} \left[\left((H^{(n)} \mathbf{1}_{[0, T_p]} \cdot M)_t - (H \mathbf{1}_{[0, T_p]} \cdot M)_t \right)^2 \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\left(((H^{(n)} - H) \mathbf{1}_{[0, T_p]}) \cdot M \right)_t^2 \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\int_0^t (H_s^{(n)} - H_s)^2 \mathbf{1}_{[0, T_p]}(s) d\langle M, M \rangle_s \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\int_0^{t \wedge T_p} (H_s^{(n)} - H_s)^2 d\langle M, M \rangle_s \right]. \end{aligned}$$

Sur $[0, T_p]$, on a $(H_s^{(n)} - H_s)^2 \leq 4p^2$ et par continuité des trajectoires de H , $\lim_{n \rightarrow +\infty} H_s^{(n)} = H_s$. Par le théorème de convergence dominée (pour l'intégrale de Stieltjes), il vient presque sûrement :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{t \wedge T_p} (H_s^{(n)} - H_s)^2 d\langle M, M \rangle_s = 0.$$

Puis comme

$$\begin{aligned} \left| \int_0^{t \wedge T_p} (H_s^{(n)} - H_s)^2 d\langle M, M \rangle_s \right| &\leq \int_0^{t \wedge T_p} 4p^2 d\langle M, M \rangle_s \leq 4p^2 \langle M, M \rangle_{t \wedge T_p} \\ &\leq 4p^2 \langle M, M \rangle_{T_p} \leq 4p^3, \end{aligned}$$

le théorème de convergence dominée (pour \mathbb{E} cette fois) entraîne :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E} \left[\left((H^{(n)} \cdot M^{T_p})_t - (H \cdot M^{T_p})_t \right)^2 \right] = 0.$$

On a donc $(H^{(n)} \cdot M^{T_p})_t \xrightarrow{L^2} (H \cdot M^{T_p})_t$ quand $n \rightarrow +\infty$, et en utilisant la propriété d'arrêt (6.14), on en déduit la convergence dans L^2

$$L^2\text{-}\lim_{n \rightarrow +\infty} (H^{(n)} \cdot M)_{t \wedge T_p} = (H \cdot M)_{t \wedge T_p}.$$

Pour conclure, on remarque que $\lim_{p \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(T_p > t) = 1$, ce qui affaiblit la convergence L^2 obtenue en une convergence en probabilité. \square

6.3 Par rapport à une semimartingale

On achève complètement dans cette section la construction de l'intégrale stochastique en intégrant finalement par rapport aux semimartingales à trajectoires continues. Pour cela, on dit qu'un processus progressif H est localement borné si

$$\text{ps } \forall t \geq 0, \quad \sup_{s \leq t} |H_s| < +\infty.$$

En particulier, tout processus continu adapté est localement borné (cf. Prop. 4.6). De plus, lorsque H est un processus localement borné :

— pour tout processus V à variation bornée, on a :

$$\text{ps } \forall t \geq 0, \quad \int_0^t |H_s| |dV_s| < +\infty;$$

— pour toute martingale locale M , on a $H \in L_{loc}^2(M)$ car pour tout $t \geq 0$, on a :

$$\int_0^t H_s^2 d\langle M, M \rangle_s \leq \left(\sup_{s \leq t} |H_s| \right) \sup_{s \in [0, t]} \langle M, M \rangle_s < +\infty.$$

La définition suivante synthétise l'intégration par rapport à la partie martingale locale du Th. 6.14 et l'intégrale par rapport à la partie processus à variation bornée (Section 5.1.2) :

Définition 6.18 (Intégrale par rapport à une semimartingale) *Soit $X = X_0 + M + A$ une semimartingale à trajectoires continues, et H un processus progressif localement borné. L'intégrale stochastique $H \cdot X$ est alors définie par*

$$H \cdot X = H \cdot M + H \cdot A$$

où $H \cdot M$ est définie dans la Section 6.2 (Th. 6.14) et $H \cdot A$ est définie en Section 5.1.4 en tant qu'intégrale de Stieltjes. Traditionnellement, on note :

$$(H \cdot X)_t = \int_0^t H_s dX_s.$$

Des propriétés déjà vues pour l'intégrale contre une martingale locale et contre un processus à variation bornée, on déduit facilement :

Proposition 6.19 (Propriétés de l'intégrale stochastique)

- (1) *L'application $(H, X) \mapsto H \cdot X$ est bilinéaire.*
- (2) *$H \cdot (K \cdot X) = (HK) \cdot X$, si H et K sont localement bornés.*
- (3) *Pour tout temps d'arrêt T , $(H \cdot X)^T = (H \mathbf{1}_{[0, T]}) \cdot X = H \cdot X^T$.*
- (4) *Si X est une martingale locale (resp. si X est un processus à variation bornée) alors il en est de même pour $H \cdot X$.*

(5) Si H est un processus progressif de la forme $H_s = \sum_{i=0}^{p-1} H_{(i)} \mathbf{1}_{[t_i, t_{i+1}]}(s)$ où, pour chaque i , $H_{(i)}$ est \mathcal{F}_{t_i} -mesurable, alors

$$(H \cdot X)_t = \sum_{i=0}^{p-1} H_{(i)} (X_{t_{i+1} \wedge t} - X_{t_i \wedge t}).$$

(6) (Riemann) Soit X une semimartingale continue et soit H un processus continu adapté. Alors, pour tout $t > 0$, pour toute suite $0 = t_0^n < \dots < t_{p_n}^n = t$ de subdivisions de $[0, t]$ de pas tendant vers 0, on a, au sens de la convergence en probabilité :

$$\mathbb{P}\text{-}\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=0}^{n-1} H_{t_i^n} (X_{t_{i+1}^n} - X_{t_i^n}) = \int_0^t H_s dX_s.$$

Démonstration : Toutes les propriétés viennent de celles vues en Section 5.1 pour la partie variation bornée et en Section 6.2 pour la partie martingale locale. Par exemple, 6) vient de la Prop. 5.7 et de la Prop. 6.17. \square

Remarque 6.20

- Remarquer que dans la propriété 5), on ne suppose pas que les variables aléatoires $H_{(i)}$ sont bornées.
- Le résultat d'approximation dans 6) généralise dans le cas de l'intégration stochastique l'approximation des intégrales de Riemann. Ce résultat sera utile dans la suite, notamment pour prouver la formule d'Itô.
- Dans ce résultat, il est essentiel de considérer $H_{t_i^n}$ dans l'approximation de Riemann. Un autre choix conduit à un autre type d'intégrale stochastique : par exemple $H_{t_{i+1}^n}$ mène à une **intégrale** dite **anticipante**, et $H_{(t_{i+1}^n + t_i^n)/2}$ mène à l'**intégrale de Stratonovich** alors que pour le choix $H_{t_i^n}$, fait dans ce chapitre, on obtient l'intégrale d'Itô.

Le résultat suivant est une version du théorème de convergence dominée pour les intégrales stochastiques :

Théorème 6.21 (Convergence dominée pour l'intégrale stochastique) Soit X une semimartingale à trajectoires continues et $(H^n)_{n \geq 1}$ une suite de processus progressifs localement bornés telle que, pour tout $t \geq 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} H_t^n = 0$ et telle qu'il existe un processus K borné satisfaisant $|H^n| \leq K$ pour tout $n \geq 1$. Alors $(H^n \cdot X)_t \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$, $n \rightarrow +\infty$, uniformément sur tout compact.

Démonstration : Il s'agit de voir

$$\mathbb{P}\text{-}\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{s \leq t} |(H^n \cdot X)_s| = 0.$$

Lorsque X est un processus à variation bornée, c'est clair d'après les propriétés de l'intégrale de Stieltjes (convergence dominée pour l'intégrale de Stieltjes).

Lorsque X est une martingale locale : on la suppose réduite par la suite de temps d'arrêt $(T_p)_{p \geq 1}$ donnée comme en (6.19) par

$$T_p = \inf (s \geq 0 : |H_s| + \langle X, X \rangle_s \geq p), \quad p \geq 1,$$

alors $(H^n)^{T_p}$ converge vers 0 dans $L^2(X^{T_p})$ car

$$\|(H^n)^{T_p}\|_{L^2(X^{T_p})}^2 = \mathbb{E} \left[\int_0^{+\infty} ((H_s^n)^{T_p})^2 d\langle X^{T_p}, X^{T_p} \rangle_s \right] = \mathbb{E} \left[\int_0^{T_p} (H_s^n)^2 d\langle X, X \rangle_s \right].$$

Comme avec $H_s^n \rightarrow 0$ pour tout s et $|H_s^n| \leq p$ pour $s \in [0, T_p]$, par convergence dominée pour l'intégrale de Stieltjes, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{T_p} (H_s^n)^2 d\langle X, X \rangle_s = 0.$$

De plus,

$$\left| \int_0^{T_p} (H_s^n)^2 d\langle X, X \rangle_s \right| \leq \left| \int_0^{T_p} p^2 d\langle X, X \rangle_s \right| \leq p^3,$$

donc par convergence dominée pour l'espérance \mathbb{E} , on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|(H^n)^{T_p}\|_{L^2(X^{T_p})} = 0.$$

D'après l'isométrie du Théorème 6.9, pour chaque $p \geq 1$, on a $(H^n \cdot X)^{T_p} \xrightarrow{H_c^2} 0$ quand $n \rightarrow +\infty$. Finalement, comme $\lim_{p \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(T_p \geq t) = 1$, on obtient la convergence en probabilité cherchée. \square

6.4 Cas non continu

La théorie d'intégration stochastique présentée dans ce chapitre s'applique pour des semimartingales à trajectoires continues. On pourrait s'intéresser à des semimartingales à trajectoires *càdlàg* (continues à droite et avec des limites à gauche) ou *càglàd* (continues à gauche avec des limites à droite). On intègre alors des processus dits **prévisibles** ($(\mathcal{F}_{t-})_{t \geq 0}$ -adaptés et continus à gauche) ou **optionnels** ($(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ -adaptés et continus à droite). Dans le cadre *càdlàg*, la décomposition d'une semimartingale en martingale locale + processus à variation bornée n'est plus unique (heuristiquement : on peut jouer sur les sauts) à moins d'imposer par exemple que le processus à variation bornée soit prévisible (dans ce cas, on "fixe" les sauts).

Il faut cependant introduire deux crochets $[M, M]_t$ et $\langle M, M \rangle_t$ (qui est la projection prévisible de $[M, M]_t$). Chacun de ces deux crochets hérite d'une des propriétés fondamentales (5.2), (5.3) de l'unique crochet défini dans le cadre continu (cf. Théorème 5.27), on retrouve ainsi que

- $[M, M]_t = \lim_{|\Delta| \rightarrow 0} \sum_{t_i \in \Delta} (M_{t_{i+1}} - M_{t_i})^2$ est la variation quadratique de M où Δ est une subdivision de $[0, t]$ et $|\Delta|$ désigne son pas.
- $\langle M, M \rangle = (\langle M, M \rangle_t)_{t \geq 0}$ est l'unique processus prévisible tel que $M^2 - \langle M, M \rangle$ est une martingale locale.

Dans ce contexte, il faut alors porter une attention particulière aux sauts $\Delta X_t = X_t - X_{t-}$ du processus. On consultera [\[Pro\]](#) pour une introduction au calcul stochastique avec saut ou, pour le cas spécifique des processus de Lévy, [\[CT\]](#) ou [\[App\]](#).

Chapitre 7

Formule d'Itô et conséquences

Dans ce chapitre, on prouve la formule d'Itô, véritable clef de voûte du calcul stochastique. Celle-ci montre que lorsqu'on applique une application C^2 à une semimartingale, on conserve une semimartingale; elle en donne en plus la décomposition (martingale locale + processus à variation bornée). La formule d'Itô est prouvée en Section 7.1. Des conséquences importantes en sont présentées dans les sections suivantes : théorème de Lévy (caractérisation du mouvement brownien par son crochet, Section 7.2), théorème de Dubins-Schwarz (Section 7.3), inégalités de Burkholder-Davis-Gundy (BDG, Section 7.4), théorème de représentation des martingales (Section 7.5), formule de Tanaka (Section 7.6).

7.1 Formule d'Itô

La formule d'Itô est l'outil de base du calcul stochastique : elle montre qu'une fonction de classe C^2 de p semimartingales continues est encore une semimartingale continue, et elle exprime explicitement la décomposition de cette semimartingale.

Rappelons la formule de changement de variable classique : si F, g sont de classe C^1 alors $(F \circ g)'(t) = F'(g(t)) g'(t)$ s'écrit

$$F(g(t)) = F(g(0)) + \int_0^t F'(g(s))g'(s) ds.$$

Si F est C^1 et g est seulement absolument continue (c'est à dire à variation bornée) alors on a encore avec l'intégrale de Stieltjes :

$$F(g(t)) = F(g(0)) + \int_0^t F'(g(s)) dg(s).$$

La même formule reste vraie pour un processus X à variation bornée en faisant un calcul trajectorien (pour chaque ω fixé, la trajectoire $t \mapsto X_t(\omega)$ est à variation bornée et le cas précédent s'applique) : pour F une fonction de classe C^1 , on a alors

$$F(X_t) = F(X_0) + \int_0^t F'(X_s) dX_s.$$

La formule d'Itô généralise cette propriété pour des semimartingales lorsque F est C^2 ; la formule fait alors apparaître un terme supplémentaire dû au fait que ces processus ne sont pas à variation bornée, cf. (7.1) ci-dessous.

Théorème 7.1 (Formule d'Itô) *Soit X une semimartingale et $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 . Alors*

$$F(X_t) = F(X_0) + \int_0^t F'(X_s) dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t F''(X_s) d\langle X, X \rangle_s. \quad (7.1)$$

Si on considère p semimartingales continues $X^{(1)}, \dots, X^{(p)}$ et $F : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 alors,

$$\begin{aligned} F(X_t^{(1)}, \dots, X_t^{(p)}) &= F(X_0^{(1)}, \dots, X_0^{(p)}) + \sum_{i=1}^p \int_0^t \frac{\partial F}{\partial x_i}(X_s^{(1)}, \dots, X_s^{(p)}) dX_s^{(i)} \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^p \int_0^t \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(X_s^{(1)}, \dots, X_s^{(p)}) d\langle X^{(i)}, X^{(j)} \rangle_s. \end{aligned} \quad (7.2)$$

Démonstration : On traite d'abord le cas (7.1) c'est à dire $p = 1$. Considérons une suite $\{0 = t_0^n < \dots < t_{p_n}^n = t\}_{n \geq 1}$ de subdivisions emboîtées de $[0, t]$ de pas tendant vers 0. Alors en télescopant la somme, on a

$$F(X_t) = F(X_0) + \sum_{i=0}^{p_n-1} (F(X_{t_{i+1}^n}) - F(X_{t_i^n})).$$

La formule de Taylor (Lagrange) à l'ordre 2 sur l'intervalle (non ordonné) $(X_{t_i^n}, X_{t_{i+1}^n})$ donne pour chaque $\omega \in \Omega$:

$$F(X_{t_{i+1}^n}) - F(X_{t_i^n}) = F'(X_{t_i^n})(X_{t_{i+1}^n} - X_{t_i^n}) + \frac{f_{n,i}(\omega)}{2} (X_{t_{i+1}^n} - X_{t_i^n})^2$$

où

$$f_{n,i} \in \left[\inf_{\theta \in [0,1]} F''(X_{t_i^n} + \theta(X_{t_{i+1}^n} - X_{t_i^n})), \sup_{\theta \in [0,1]} F''(X_{t_i^n} + \theta(X_{t_{i+1}^n} - X_{t_i^n})) \right].$$

Noter qu'avec la formule de Taylor à reste intégral, on a

$$\frac{f_{n,i}(\omega)}{2} (X_{t_{i+1}^n} - X_{t_i^n})^2 = (X_{t_{i+1}^n} - X_{t_i^n})^2 \int_0^1 (1-u) F''(X_{t_i^n} + u(X_{t_{i+1}^n} - X_{t_i^n})) du$$

et donc

$$f_{n,i}(\omega) = \int_0^1 2(1-u) F''(X_{t_i^n} + u(X_{t_{i+1}^n} - X_{t_i^n})) du$$

est bien mesurable (ce qui n'est pas directement clair par Taylor-Lagrange). D'après 6) dans la Proposition 6.19 (approximation à la Riemann des intégrales stochastiques) avec $H_s = F'(X_s)$, on a au sens de la convergence en probabilité :

$$\sum_{i=0}^{p_n-1} F'(X_{t_i^n})(X_{t_{i+1}^n} - X_{t_i^n}) \xrightarrow{\mathbb{P}} \int_0^t F'(X_s) dX_s, \quad n \rightarrow +\infty.$$

Pour prouver la formule d'Itô (7.1), il reste à établir la convergence en probabilité :

$$\sum_{i=0}^{p_n-1} f_{n,i}(\omega)(X_{t_{i+1}^n} - X_{t_i^n})^2 \xrightarrow{\mathbb{P}} \int_0^t F''(X_s) d\langle X, X \rangle_s, \quad n \rightarrow +\infty, \quad (7.3)$$

car alors, par unicité presque sûre de la limite en probabilité, on aura pour tout $t \geq 0$:

$$F(X_t) = F(X_0) + \int_0^t F'(X_s) dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t F''(X_s) d\langle X, X \rangle_s \quad \text{ps.}$$

Les deux termes de l'égalité ci-dessus étant continus en t , les deux processus seront en fait indistinguables, ce qui donnera (7.1).

Il reste donc à établir (7.3) ; pour cela, on note pour $n < m$:

$$\begin{aligned} T_m &= \sum_{j=0}^{p_m-1} f_{m,j}(\omega)(X_{t_{j+1}^m} - X_{t_j^m})^2 \\ T_{n,m} &= \sum_{i=0}^{p_n-1} f_{n,i}(\omega) \sum_{\{j: t_i^n \leq t_j^m < t_{i+1}^n\}} (X_{t_{j+1}^m} - X_{t_j^m})^2. \end{aligned}$$

Comme $\sum_{j=0}^{p_m-1} = \sum_{i=0}^{p_n-1} \sum_{\{j: t_i^n \leq t_j^m < t_{i+1}^n\}}$ (subdivisions emboîtées), on a

$$T_m = \sum_{i=0}^{p_n-1} \sum_{\{j: t_i^n \leq t_j^m < t_{i+1}^n\}} f_{m,j}(\omega)(X_{t_{j+1}^m} - X_{t_j^m})^2$$

et on peut écrire

$$\begin{aligned} &|T_m - T_{n,m}| \\ &= \left| \sum_{i=0}^{p_n-1} \sum_{\{j: t_i^n \leq t_j^m < t_{i+1}^n\}} f_{m,j}(\omega)(X_{t_{j+1}^m} - X_{t_j^m})^2 - \sum_{i=0}^{p_n-1} \sum_{\{j: t_i^n \leq t_j^m < t_{i+1}^n\}} f_{n,i}(\omega)(X_{t_{j+1}^m} - X_{t_j^m})^2 \right| \\ &= \left| \sum_{i=0}^{p_n-1} \sum_{\{j: t_i^n \leq t_j^m < t_{i+1}^n\}} (f_{m,j}(\omega) - f_{n,i}(\omega))(X_{t_{j+1}^m} - X_{t_j^m})^2 \right| \end{aligned}$$

$$\leq Z_{n,m} \sum_{i=0}^{p_n-1} \sum_{\{j: t_i^n \leq t_j^m < t_{i+1}^n\}} (X_{t_{j+1}^m} - X_{t_j^m})^2 = Z_{n,m} \sum_{j=0}^{p_m-1} (X_{t_{j+1}^m} - X_{t_j^m})^2$$

avec

$$Z_{n,m} = \sup_{0 \leq i \leq p_n-1} \left(\sup_{\{j: t_i^n \leq t_j^m < t_{i+1}^n\}} |f_{m,j} - f_{n,i}| \right).$$

Comme F'' est continue, $s \in [0, t] \mapsto F''(X_s)$ est uniformément continue (Heine) et cela assure que $Z_{n,m} \xrightarrow{ps} 0$ quand $n, m \rightarrow +\infty$. D'après l'interprétation « variation quadratique » du crochet (Proposition 5.39), on a $\sum_{j=0}^{p_m-1} (X_{t_{j+1}^m} - X_{t_j^m})^2 \xrightarrow{\mathbb{P}} \langle X, X \rangle_t$. Et donc pour $\varepsilon > 0$ donné, il existe $N_1 \geq 1$ tel que pour tout $m > n \geq N_1$,

$$\mathbb{P}(|T_m - T_{n,m}| \geq \varepsilon/3) \leq \mathbb{P}\left(Z_{n,m} \sum_{j=0}^{p_m-1} (X_{t_{j+1}^m} - X_{t_j^m})^2 \geq \varepsilon/3\right) \leq \varepsilon/3. \quad (7.4)$$

(Comme $Z_{n,m} \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$ et $\sum_{j=0}^{p_m-1} (X_{t_{j+1}^m} - X_{t_j^m})^2 \xrightarrow{\mathbb{P}} \langle X, X \rangle_t$, le lemme de Slutsky assure $Z_{n,m} \sum_{j=0}^{p_m-1} (X_{t_{j+1}^m} - X_{t_j^m})^2 \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$.)

Ensuite, comme les $(t_j^m)_{j: t_i^n \leq t_j^m < t_{i+1}^n}$ forment une subdivision de $[t_i^n, t_{i+1}^n]$, la Proposition 5.39 montre aussi qu'en probabilité :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\text{-}\lim_{m \rightarrow +\infty} T_{n,m} &= \mathbb{P}\text{-}\lim_{m \rightarrow +\infty} \sum_{i=0}^{p_n-1} f_{n,i} \sum_{\{j: t_i^n \leq t_j^m < t_{i+1}^n\}} (X_{t_{j+1}^m} - X_{t_j^m})^2 \\ &= \sum_{i=0}^{p_n-1} f_{n,i} \left(\langle X, X \rangle_{t_{i+1}^n} - \langle X, X \rangle_{t_i^n} \right) \\ &= \int_0^t h_n(s) d\langle X, X \rangle_s, \end{aligned}$$

où $h_n = \sum_{i=0}^{p_n-1} f_{n,i} \mathbf{1}_{[t_i^n, t_{i+1}^n[}$. Ainsi pour chaque $n \geq 0$, il existe $N_2(n) \geq 1$ tel que pour $m \geq N_2(n)$:

$$\mathbb{P}\left(\left|T_{n,m} - \int_0^t h_n(s) d\langle X, X \rangle_s\right| \geq \varepsilon/3\right) \leq \varepsilon/3. \quad (7.5)$$

Puis comme F est C^2 , on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} h_n(s) = F''(X_s)$ ps. De plus, on a pour tout $s \in [t_i^n, t_{i+1}^n[$

$$|h_n(s) - F''(X_s)| = |f_{n,i} - \lim_{m \rightarrow +\infty} f_{m,j(m)}| = \lim_{m \rightarrow +\infty} |f_{n,i} - f_{m,j(m)}| \leq \lim_{m \rightarrow +\infty} Z_{n,m},$$

et donc

$$\sup_{s \in [0, t]} |h_n(s) - F''(X_s)| \xrightarrow{\mathbb{P}} 0, \quad n \rightarrow +\infty,$$

puis

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^t h_n(s) d\langle X, X \rangle_s - \int_0^t F''(X_s) d\langle X, X \rangle_s \right| \\ & \leq \left(\sup_{s \in [0, t]} |h_n(s) - F''(X_s)| \right) \langle X, X \rangle_t \xrightarrow{\mathbb{P}} 0, \quad n \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

Il existe donc aussi $N_3 \geq 1$ tel que pour $n \geq N_3$

$$\mathbb{P} \left(\left| \int_0^t h_n(s) d\langle X, X \rangle_s - \int_0^t F''(X_s) d\langle X, X \rangle_s \right| \geq \varepsilon/3 \right) \leq \varepsilon/3. \quad (7.6)$$

Comme

$$\begin{aligned} & \left\{ \left| \sum_{j=0}^{p_m-1} f_{m,j}(X_{t_{j+1}^m} - X_{t_j^m})^2 - \int_0^t F''(X_s) d\langle X, X \rangle_s \right| \geq \varepsilon \right\} \\ & \subset \{ |T_m - T_{n,m}| \geq \varepsilon/3 \} \\ & \quad \cup \left\{ \left| T_{n,m} - \int_0^t h_n(s) d\langle X, X \rangle_s \right| \geq \varepsilon/3 \right\} \\ & \quad \cup \left\{ \left| \int_0^t h_n(s) d\langle X, X \rangle_s - \int_0^t F''(X_s) d\langle X, X \rangle_s \right| \geq \varepsilon/3 \right\} \end{aligned}$$

en combinant (7.4), (7.5), (7.6), et en prenant $n > \max(N_1, N_3)$ et $m > N_2(n)$, on a :

$$\mathbb{P} \left(\left| \sum_{j=0}^{p_m-1} f_{m,j}(X_{t_{j+1}^m} - X_{t_j^m})^2 - \int_0^t F''(X_s) d\langle X, X \rangle_s \right| \geq \varepsilon \right) \leq \varepsilon,$$

ce qui prouve (7.3) puisque $\varepsilon > 0$ est arbitraire. Finalement, la formule d'Itô (7.1) est prouvée pour $p = 1$.

Dans le cas où p est quelconque, la formule de Taylor toujours à l'ordre 2 donne

$$\begin{aligned} & F(X_{t_{i+1}^n}^{(1)}, \dots, X_{t_{i+1}^n}^{(p)}) - F(X_{t_i^n}^{(1)}, \dots, X_{t_i^n}^{(p)}) \\ & = \sum_{k=1}^p \frac{\partial F}{\partial x_k}(X_{t_i^n}^{(1)}, \dots, X_{t_i^n}^{(p)})(X_{t_{i+1}^n}^{(k)} - X_{t_i^n}^{(k)}) + \sum_{k,l=1}^p \frac{f_{n,i}^{k,l}}{2}(X_{t_{i+1}^n}^{(k)} - X_{t_i^n}^{(k)})(X_{t_{i+1}^n}^{(l)} - X_{t_i^n}^{(l)}) \end{aligned}$$

avec

$$f_{n,i}^{k,l} \in \left[\inf_{\theta \in [0,1]} \frac{\partial^2 F}{\partial x_k \partial x_l}(X_{t_i^n}^{(1)} + \theta(X_{t_{i+1}^n}^{(1)} - X_{t_i^n}^{(1)}), \dots), \sup_{\theta \in [0,1]} \frac{\partial^2 F}{\partial x_k \partial x_l}(X_{t_i^n}^{(1)} + \theta(X_{t_{i+1}^n}^{(1)} - X_{t_i^n}^{(1)}), \dots) \right].$$

Le 6) dans la Proposition 6.19 donne à nouveau la limite cherchée pour les termes faisant intervenir les dérivées premières :

$$\sum_{i=1}^{p_i-1} \frac{\partial F}{\partial x_k}(X_{t_i^n}^{(1)}, \dots, X_{t_i^n}^{(p)})(X_{t_{i+1}^n}^{(k)} - X_{t_i^n}^{(k)}) \xrightarrow{\mathbb{P}} \sum_{k=1}^p \int_0^t \frac{\partial F}{\partial x_k}(X_s^{(1)}, \dots, X_s^{(p)}) dX_s^{(k)}.$$

En adaptant légèrement les arguments du cas $p = 1$, on montre que pour tous $k, l \in \{1, \dots, p\}$:

$$\sum_{i=0}^{p_n-1} f_{n,i}^{k,l} (X_{t_{i+1}^n}^{(k)} - X_{t_i^n}^{(k)}) (X_{t_{i+1}^n}^{(l)} - X_{t_i^n}^{(l)}) \xrightarrow{\mathbb{P}} \int_0^t \frac{\partial^2 F}{\partial x_k \partial x_l} (X_s^{(1)}, \dots, X_s^{(p)}) d\langle X^{(k)}, X^{(l)} \rangle_s, \quad n \rightarrow +\infty.$$

Cela achève la preuve de la formule d'Itô dans le cas général (7.2). \square

Un cas particulier important de la formule d'Itô est la formule d'intégration par parties.

Corollaire 7.2 (IPP) *Si X et Y sont deux semimartingales continues, on a*

$$X_t Y_t = X_0 Y_0 + \int_0^t X_s dY_s + \int_0^t Y_s dX_s + \langle X, Y \rangle_t. \quad (7.7)$$

Le terme $\langle X, Y \rangle$ est nul si X ou Y est à variation bornée. Il est présent quand on considère de (vraies) semimartingales et ce terme supplémentaire témoigne de la différence entre le calcul stochastique et le calcul différentiel déterministe.

Démonstration : Appliquer la formule d'Itô à $F(x, y) = xy$ qui est bien de classe C^2 en x, y et noter que

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x, y) = 1, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x, y) = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x, y) = 0.$$

\square

En particulier, si $Y = X$ on obtient

$$X_t^2 = X_0^2 + 2 \int_0^t X_s dX_s + \langle X, X \rangle_t.$$

Remarque 7.3 — Lorsque $X = M$ est une martingale locale, on sait que $M^2 - \langle M, M \rangle$ est une martingale locale (définition du crochet du Théorème 5.27). La formule précédente montre que cette martingale locale est en fait

$$M_0^2 + 2 \int_0^t M_s dM_s,$$

ce qu'on aurait pu voir directement dans la démonstration donnée en Section 5.2 puisqu'une lecture attentive de la démonstration indique que la construction de $\langle M, M \rangle_t$ fait intervenir $\sum_{i=0}^{p_n} M_{t_i^n} (M_{t_{i+1}^n} - M_{t_i^n})$ qui sont des approximations (de type Riemann) de l'intégrale stochastique $\int_0^t M_s dM_s$.

- En prenant $X_t^{(1)} = t$ et $X_t^{(2)} = X_t$, on a aussi pour toute fonction F de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$

$$F(t, X_t) = F(0, X_0) + \underbrace{\int_0^t \frac{\partial F}{\partial x}(s, X_s) dX_s}_{\text{martingale locale}} + \underbrace{\int_0^t \frac{\partial F}{\partial t}(s, X_s) ds + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(s, X_s) d\langle X, X \rangle_s}_{\text{variation bornée}}. \quad (7.8)$$

En fait, il suffit de prendre $F \in C^{1,2}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$, ie. F est C^1 en $t \in \mathbb{R}_+$ et C^2 en $x \in \mathbb{R}$.

Retour au mouvement brownien

Pour un (\mathcal{F}_t) -mouvement brownien B , la formule d'Itô s'écrit

$$F(B_t) = F(B_0) + \int_0^t F'(B_s) dB_s + \frac{1}{2} \int_0^t F''(B_s) ds.$$

En prenant $X_t^{(1)} = t$ et $X_t^{(2)} = B_t$, (7.8) devient : pour toute fonction F de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$, on a :

$$F(t, B_t) = F(0, B_0) + \int_0^t \frac{\partial F}{\partial x}(s, B_s) dB_s + \int_0^t \left(\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right)(s, B_s) ds.$$

Si $B_t = (B_t^{(1)}, \dots, B_t^{(p)})$ est un (\mathcal{F}_t) -mouvement brownien en dimension d alors les $B^{(i)}$ sont des mouvements browniens indépendants. On a vu au chapitre précédent que dans ce cas $\langle B^{(i)}, B^{(j)} \rangle = 0$ lorsque $i \neq j$ et $d\langle B^{(i)}, B^{(i)} \rangle_s = ds$. La formule d'Itô montre alors que, pour toute fonction F de classe C^2 sur \mathbb{R}^p ,

$$\begin{aligned} F(B_t^{(1)}, \dots, B_t^{(p)}) &= F(B_0^{(1)}, \dots, B_0^{(p)}) + \sum_{i=1}^p \int_0^t \frac{\partial F}{\partial x_i}(B_s^{(1)}, \dots, B_s^{(p)}) dB_s^{(i)} \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^t \Delta F(B_s^{(1)}, \dots, B_s^{(p)}) ds \end{aligned} \quad (7.9)$$

où $\Delta F = \sum_{i=1}^d \frac{\partial^2 F}{\partial x_i^2}$ est le laplacien de F . On a aussi une formule analogue pour $F(t, B_t^{(1)}, \dots, B_t^{(p)})$.

En particulier si F est harmonique (ie. $\Delta F = 0$) alors $F(B_t^{(1)}, \dots, B_t^{(p)})$ est une martingale locale.

Exponentielles stochastiques

On définit maintenant l'exponentielle stochastique $\mathcal{E}(M)$ d'une martingale locale M quelconque. La formule d'Itô justifie qu'il s'agit d'une martingale locale et explique la terminologie, cf. la Remarque 7.5 ci-dessous. Pour commencer, on dit qu'un processus à valeurs dans \mathbb{C} est une martingale locale si ses parties réelle et imaginaire en sont.

Proposition 7.4 Soit M une martingale locale. On pose pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$:

$$\mathcal{E}(\lambda M)_t = \exp \left(\lambda M_t - \frac{\lambda^2}{2} \langle M, M \rangle_t \right).$$

Le processus $\mathcal{E}(\lambda M) = (\mathcal{E}(\lambda M)_t)_{t \geq 0}$ est une martingale locale.

Démonstration : Si $F(x, r)$ est une fonction de classe C^2 sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$, la formule d'Itô assure

$$\begin{aligned} F(M_t, \langle M, M \rangle_t) &= F(M_0, 0) + \int_0^t \frac{\partial F}{\partial x}(M_s, \langle M, M \rangle_s) dM_s \\ &\quad + \int_0^t \left(\frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right) (M_s, \langle M, M \rangle_s) d\langle M, M \rangle_s. \end{aligned}$$

Le processus $F(M_t, \langle M, M \rangle_t)$ est une martingale locale dès que sa partie à variation bornée s'annule, ie. lorsque F vérifie la condition :

$$\frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 0.$$

La preuve s'achève en observant que cette condition est satisfaite par la fonction $F(x, r) = \exp \left(\lambda x - \frac{\lambda^2}{2} r \right)$ (plus précisément par les parties réelle et imaginaire de cette fonction). \square

Remarque 7.5 Avec $F(x, r) = \exp(x - r/2)$ (prendre $\lambda = 1$ précédemment), $\frac{\partial F}{\partial x}(x, r) = F(x, r)$, si bien que l'identité

$$F(M_t, \langle M, M \rangle_t) = F(M_0, 0) + \int_0^t \frac{\partial F}{\partial x}(M_s, \langle M, M \rangle_s) dM_s$$

s'écrit

$$\mathcal{E}(M)_t = \mathcal{E}(M)_0 + \int_0^t \mathcal{E}(M)_s dM_s \quad (7.10)$$

ou en écriture symbolique d'EDS (cf. Chapitre ??) : $d\mathcal{E}(M) = \mathcal{E}(M)dM$, ce qui généralise l'équation $dy = ydx$ de solution $y(x) = e^x$ avec la condition $y(0) = 1$ ou l'équation $dy_t = y_t dg_t$ de solution $y_t = \exp(g_t)$ si g est à variation bornée nulle en 0 et avec la condition initiale $y_0 = 1$. Cette propriété justifie l'appellation exponentielle stochastique de M pour $\mathcal{E}(M)$.

Proposition 7.6 (1) Soit $f \in L^2_{loc}(B)$ avec $\int_0^t f(s)^2 ds \leq C$ ps pour une constante C finie alors $\mathcal{E}(\int_0^\cdot f_s dB_s)$ est une vraie martingale de carré intégrable. En particulier pour tout $t \geq 0$, on a $\mathbb{E}[\mathcal{E}(\int_0^\cdot f_s dB_s)_t] = 1$.

(2) Si $f \in L^2_{loc}(B)$ est à valeurs complexes, on a

$$\int_0^t |f(s)|^2 ds \leq C \implies \mathbb{E} \left[\left| \mathcal{E} \left(\int_0^\cdot f_s dB_s \right)_t \right|^2 \right] < +\infty \text{ et } \mathbb{E} \left[\mathcal{E} \left(\int_0^\cdot f_s dB_s \right)_t \right] = 1.$$

Démonstration : 1) On fixe $t \geq 0$ et on pose $Z_t = \mathcal{E}(\int_0^t f(s)dB_s)_t$. On commence par supposer que $|f(s)| \leq k$ pour tout $s \in [0, t]$. Pour l'exponentielle stochastique, la formule d'Itô s'écrit

$$Z_t = 1 + \int_0^t Z_s f(s) dB_s. \quad (7.11)$$

On montre alors que

$$fZ \in L^2_{[0,t]}(B) = \left\{ H : \Omega \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R} : \text{progressif avec } \mathbb{E} \left[\int_0^t H_s^2 ds \right] < +\infty \right\}$$

pour assurer que $\int_0^t Z_s f(s) dB_s$ est une (vraie) martingale et que $\mathbb{E}[Z_t] = 1$. De $(a+b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$, on déduit

$$Z_u^2 \leq 2 \left(1 + \left(\int_0^u Z_s f_s dB_s \right)^2 \right), \quad u \leq t.$$

Pour le calcul du moment d'ordre 2 de $\int_0^u Z_s f_s dB_s$, on utilise l'isométrie d'Itô pour déduire pour $u \leq t$:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Z_u^2] &\leq 2 \left(1 + \int_0^u \mathbb{E}[Z_s^2 f_s^2] ds \right) \\ &\leq 2 \left(1 + k^2 \int_0^u \mathbb{E}[Z_s^2] ds \right). \end{aligned} \quad (7.12)$$

A priori comme $\mathbb{E}[Z_s^2]$ n'est pas finie, on utilise les temps d'arrêt $T_n = \inf(t \geq 0 : Z_t \geq n)$, $n \geq 1$, qui réduisent la martingale locale Z . En faisant comme précédemment, on peut remplacer (7.12) par

$$\mathbb{E}[Z_u^2 \mathbf{1}_{\{u \leq T_n\}}] \leq \mathbb{E}[Z_{u \wedge T_n}^2] \leq 2 \left(1 + k^2 \int_0^u \mathbb{E}[Z_s^2 \mathbf{1}_{\{s \leq T_n\}}] ds \right). \quad (7.13)$$

On peut alors appliquer le résultat classique suivant à $\mathbb{E}[Z_u^2 \mathbf{1}_{\{u \leq T_n\}}]$:

Lemme 7.7 (Grönwall) Soit g une fonction positive localement intégrable définie sur \mathbb{R}_+ telle que pour $a, b \geq 0$

$$g(t) \leq a + b \int_0^t g(s) ds. \quad (7.14)$$

Alors $g(t) \leq a \exp(bt)$ pour tout $t \geq 0$.

Preuve (Grönwall). En multipliant par e^{-bt} , l'hypothèse (7.14) s'écrit

$$\frac{d}{dt} \left[\exp(-bt) \int_0^t g(s) ds \right] \leq a \exp(-bt)$$

ce qui, en intégrant, donne

$$\exp(-bt) \int_0^t g(s) ds \leq \frac{a}{b} (1 - \exp(-bt)).$$

On obtient le résultat en reportant l'inégalité ci-dessus dans l'hypothèse (7.14) :

$$g(t) \leq a + b \frac{a}{b} e^{bt} (1 - \exp(-bt)) = a e^{bt}.$$

□

Le lemme de Grönwall (Lemme 7.7) assure alors $\mathbb{E}[Z_s^2 \mathbf{1}_{\{s \leq T_n\}}] \leq 2 \exp(2k^2 s)$ et par convergence monotone on obtient $\mathbb{E}[Z_s^2] \leq 2 \exp(2k^2 s)$ lorsque $n \rightarrow +\infty$. Pour $s \in [0, t]$, on a donc Z_s de carré intégrable et borné dans L^2 . Cela garantit $fZ \in L^2_{[0,t]}(B)$ et à partir de (7.11) : $\mathbb{E}[Z_t] = 1$. De plus, comme f est bornée et Z est bornée dans L^2 , on a

$$\mathbb{E}[\langle Z, Z \rangle_t] = \mathbb{E}\left[\int_0^t Z_s^2 f_s^2 ds\right] < +\infty,$$

ce qui assure que Z est une martingale L^2 par le Th. 5.32.

Dans le cas général, on pose $f_n = (f \wedge n) \vee (-n)$ et on applique le cas précédent à f_n (fonction bornée par n). Par convergence monotone, on a $\int_0^t f_n(u)^2 du \nearrow \int_0^t f(u)^2 du$, $n \rightarrow +\infty$, presque sûrement et par isométrie d'Itô et convergence dominée $\int_0^t f_n(u) dB_u \xrightarrow{L^2} \int_0^t f(u) dB_u$ car

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t f_n(u) dB_u - \int_0^t f(u) dB_u\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^t (f_n(u) - f(u))^2 du\right] \rightarrow 0.$$

On a donc

$$\int_0^t f_n(s) dB_s - \frac{1}{2} \int_0^t f_n(s)^2 ds \xrightarrow{\mathbb{P}} \int_0^t f(s) dB_s - \frac{1}{2} \int_0^t f(s)^2 ds$$

et, comme la convergence en probabilité se conserve en appliquant une application continue, avec des notations évidentes, on a : $Z_n(t) \xrightarrow{\mathbb{P}} Z(t)$, $n \rightarrow +\infty$. Puis

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Z_n(t)^2] &= \mathbb{E}\left[\exp\left(2 \int_0^t f_n(s) dB_s - (4-3) \int_0^t f_n(s)^2 ds\right)\right] \\ &\leq \mathbb{E}\left[\exp\left(4 \int_0^t f_n(s) dB_s - 8 \int_0^t f_n(s)^2 ds\right)\right]^{1/2} \\ &\quad \times \mathbb{E}\left[\exp\left(6 \int_0^t f_n(s)^2 ds\right)\right]^{1/2} \end{aligned}$$

$$\leq 1 \times \exp(3C) \quad (7.15)$$

en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz et le cas précédent pour avoir

$$\mathbb{E} \left[\exp \left(4 \int_0^t f_n(s) dB_s - 8 \int_0^t f_n(s)^2 ds \right) \right] = \mathbb{E} \left[\mathcal{E} \left(\int_0^t 4f_n(s) dB_s \right) \right] = 1.$$

La borne (7.15) assure que $(Z_n(t))_{n \geq 1}$ est uniformément intégrable. D'après le Théorème de Vitali, la convergence $Z_n(t) \xrightarrow{\mathbb{P}} Z(t)$ se renforce en $Z_n(t) \xrightarrow{L^1} Z(t)$ et on a en particulier $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}[Z_n(t)] = \mathbb{E}[Z(t)]$, ce qui assure $\mathbb{E}[Z(t)] = 1$. Pour $s \leq t$, on a aussi $\mathbb{E}[Z_n(t)|\mathcal{F}_s] \xrightarrow{L^1} \mathbb{E}[Z(t)|\mathcal{F}_s]$. En passant à la limite dans $\mathbb{E}[Z_n(t)|\mathcal{F}_s] = Z_n(s)$ ps, il vient donc $\mathbb{E}[Z(t)|\mathcal{F}_s] = Z(s)$ ps pour $s \leq t$ (unicité ps de la limite en probabilité), ce qui établit que Z est une martingale.

Il reste à voir que cette martingale est L^2 . Pour cela, on observe qu'on a mieux que l'unique intégrabilité dans L^1 avec une meilleure propriété que (7.15), en effet :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Z_n(t)^3] &= \mathbb{E} \left[\exp \left(3 \int_0^t f_n(s) dB_s - \frac{3}{2} \int_0^t f_n(s)^2 ds \right) \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\exp \left(3 \int_0^t f_n(s) dB_s - \frac{18-15}{2} \int_0^t f_n(s)^2 ds \right) \right] \\ &\leq \mathbb{E} \left[\exp \left(6 \int_0^t f_n(s) dB_s - 18 \int_0^t f_n(s)^2 ds \right) \right]^{1/2} \\ &\quad \times \mathbb{E} \left[\exp \left(15 \int_0^t f_n(s)^2 ds \right) \right]^{1/2} \\ &\leq \mathbb{E} \left[\mathcal{E} \left(\int_0^t 6f_n(s) dB_s \right)_t \right] \exp(15C/2) = \exp(15C/2), \end{aligned}$$

ce qui justifie que $(Z_n(t))_{n \geq 1}$ est uniformément intégrable dans L^2 . On en déduit alors que $Z_n(t) \xrightarrow{L^2} Z(t)$ et donc $Z(t) \in L^2$.

2) Pour le cas complexe, on écrit $f = \operatorname{Re}(f) + i\operatorname{Im}(f)$ et on se ramène assez facilement au cas réel. \square

7.2 Théorème de Lévy

Le résultat suivant permet de caractériser le mouvement brownien par son crochet parmi les martingales locales à trajectoires continues.

Théorème 7.8 (Caractérisation du mouvement brownien par son crochet)

Soit $X = (X^{(1)}, \dots, X^{(d)})$ un processus à trajectoires continues (\mathcal{F}_t) -adapté issu de 0. Il y a équivalence entre

- (1) X est un (\mathcal{F}_t) -mouvement brownien en dimension d .
 (2) Les processus $X^{(1)}, \dots, X^{(d)}$ sont des (\mathcal{F}_t) -martingales locales continues et de plus

$$\langle X^{(i)}, X^{(j)} \rangle_t = \delta_{i,j} t$$

où $\delta_{i,j}$ désigne le symbole de Kronecker.

En particulier, une (\mathcal{F}_t) -martingale locale continue M issue de 0 est un (\mathcal{F}_t) -mouvement brownien si et seulement si $\langle M, M \rangle_t = t$.

Remarque 7.9 Il est crucial que le processus soit à trajectoires continues. Par exemple le processus de Poisson (standard) vérifie la même propriété de crochet mais il est à trajectoires càdlàg (continues à droite avec des limites à gauche).

Démonstration : Le sens 1) \Rightarrow 2) est connu, cf. Remarques 5.28 et ?? . On montre la réciproque. Pour $u, v \in \mathbb{R}^d$, on note $u \cdot v = \sum_{j=1}^d u_j v_j$ le produit scalaire euclidien de \mathbb{R}^d . Étant donné $u \in \mathbb{R}^d$, $u \cdot X = (u \cdot X_t)_{t \geq 0}$ est une martingale locale de processus croissant

$$\sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d u_j u_k \langle X^{(j)}, X^{(k)} \rangle_t = \sum_{j=1}^d u_j^2 t = \|u\|^2 t.$$

D'après la Proposition 7.4 sur les exponentielles stochastiques, $\mathcal{E}(iu \cdot X) = \exp(iu \cdot X_t + \frac{1}{2}\|u\|^2 t)$ est une martingale locale. Comme cette martingale locale est bornée sur les intervalles $[0, T]$, $T > 0$, il s'agit en fait d'une vraie martingale. La propriété de martingale donne alors pour $s < t$

$$\mathbb{E} \left[\exp \left(iu \cdot X_t + \frac{1}{2}\|u\|^2 t \right) \middle| \mathcal{F}_s \right] = \exp \left(iu \cdot X_s + \frac{1}{2}\|u\|^2 s \right).$$

En particulier, pour $A \in \mathcal{F}_s$, on a :

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[\mathbf{1}_A \exp(iu \cdot (X_t - X_s)) \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\mathbb{E} \left[\mathbf{1}_A \exp(iu \cdot (X_t - X_s)) \middle| \mathcal{F}_s \right] \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\mathbf{1}_A \exp \left(-iu \cdot X_s - \frac{1}{2}\|u\|^2 t \right) \mathbb{E} \left[\exp \left(iu \cdot X_t + \frac{1}{2}\|u\|^2 t \right) \middle| \mathcal{F}_s \right] \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\mathbf{1}_A \exp \left(-iu \cdot X_s - \frac{1}{2}\|u\|^2 t \right) \exp \left(iu \cdot X_s + \frac{1}{2}\|u\|^2 s \right) \right] \\ &= \mathbb{P}(A) \exp \left(-\frac{1}{2}\|u\|^2 (t - s) \right). \end{aligned} \tag{7.16}$$

Avec $A = \Omega$, l'identité (7.16) montre que $X_t - X_s \sim \mathcal{N}(0, (t - s)I_d)$. Ensuite pour $A \in \mathcal{F}_s$ de probabilité $\mathbb{P}(A) > 0$, en notant $\mathbb{P}_A(\cdot) = \mathbb{P}(\cdot|A)$, l'identité (7.16) s'écrit

$$\mathbb{E}_A \left[\exp(iu \cdot (X_t - X_s)) \right] = \exp \left(-\frac{1}{2}\|u\|^2 (t - s) \right)$$

ie. $\mathcal{L}(X_t - X_s | A) = \mathcal{N}(0, (t - s)I_d)$. Pour toute fonction mesurable positive f sur \mathbb{R}^d , on a

$$\mathbb{E}_A[f(X_t - X_s)] = \mathbb{E}[f(X_t - X_s)]$$

soit

$$\mathbb{E}[\mathbf{1}_A f(X_t - X_s)] = \mathbb{P}(A) \mathbb{E}[f(X_t - X_s)].$$

Comme c'est vrai pour tout $A \in \mathcal{F}_s$, par un argument de classes monotones, on a $X_t - X_s \perp \mathcal{F}_s$.

Finalement, pour tout $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_p$, le vecteur $(X_{t_j}^{(i)} - X_{t_{j-1}}^{(i)})_{\substack{1 \leq i \leq d \\ 1 \leq j \leq p}}$ est un vecteur gaussien (car obtenu en regroupant p vecteurs gaussiens indépendants). Par transformation linéaire, $(X_{t_i})_{1 \leq i \leq p}$ est encore un vecteur gaussien pour tout $(t_i)_{1 \leq i \leq p}$ et donc X est un processus gaussien. Comme le vecteur $(X_{t_j}^{(i)} - X_{t_{j-1}}^{(i)})_{\substack{1 \leq i \leq d \\ 1 \leq j \leq p}}$ a ses composantes indépendantes, le processus X est finalement gaussien, à accroissements indépendants et stationnaires et (par hypothèse) à trajectoires continues, achevant de prouver que $X^{(1)}, \dots, X^{(d)}$ sont d mouvements browniens indépendants. \square

7.3 Dubins-Schwarz

Le résultat suivant montre que pour les martingales locales continues, le crochet est une horloge interne qui permet de retrouver le processus quand on évalue un mouvement brownien standard avec cette horloge. C'est une preuve supplémentaire du rôle central du mouvement brownien dans la classe des martingales locales continues.

Théorème 7.10 (Dubins-Schwarz) *Soit M une martingale locale continue issue de 0 et telle que $\langle M, M \rangle_\infty = +\infty$ ps. Alors, il existe un mouvement brownien standard β tel que*

$$ps \quad \forall t \geq 0, \quad M_t = \beta_{\langle M, M \rangle_t}.$$

Remarque 7.11 — En grossissant l'espace de probabilité on peut se débarrasser de la condition $\langle M, M \rangle_\infty = +\infty$ ps.

- Le mouvement brownien β n'est pas adapté par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ initiale de M , mais par rapport à une filtration « changée de temps ».
- Il s'agit d'un résultat existentiel : le résultat est valable pour un certain mouvement brownien (construit par la preuve du théorème) et pas pour un mouvement brownien quelconque.

Démonstration : Pour tout $r \geq 0$, on définit $\tau_r = \inf(t \geq 0 : \langle M, M \rangle_t > r)$. Il s'agit d'un temps d'arrêt car $\{\tau_r > s\} = \{\langle M, M \rangle_s \leq r\} \in \mathcal{F}_s$ et donc $\{\tau_r \leq s\} = \{\tau_r > s\}^c \in \mathcal{F}_s$. De plus, l'hypothèse $\langle M, M \rangle_\infty = +\infty$ assure que, pour chaque $r \geq 0$, $\tau_r < +\infty$ ps.

Ensuite, on observe que la fonction $r \in \mathbb{R}_+ \mapsto \tau_r$ est croissante et càdlàg :

— croissante car si $r \leq s$ alors

$$\{t \geq 0 : \langle M, M \rangle_t > s\} \subset \{t \geq 0 : \langle M, M \rangle_t > r\}$$

et en passant aux inf : $\tau_r \leq \tau_s$;

— continue à droite car si on note $\alpha = \lim_{s \searrow r} \tau_s$, on a d'abord $\alpha \geq \tau_r$ par croissance, puis si l'inégalité est stricte, on aurait $\tau_r < \beta < \alpha \leq \tau_s$ pour tout $s > r$ et nécessairement $r < \langle M, M \rangle_\beta \leq s$ pour tout $s > r$ ce qui est absurde (car on peut prendre s arbitrairement proche de r) ;

— avec des limites à gauche en $r > 0$ qui existent par monotonie et elle sont données par

$$\lim_{s \nearrow r} \tau_s = \tau_{r-} = \inf (t \geq 0 : \langle M, M \rangle_t = r).$$

Pour $r \geq 0$, on pose alors $\beta_r = M_{\tau_r}$.

Le processus β est adapté par rapport à la filtration donnée par $\mathcal{G}_r = \mathcal{F}_{\tau_r}$, $r \geq 0$. Remarquons que cette filtration satisfait les conditions habituelles (puisque lorsque $(T_n)_{n \geq 1}$ est une suite de temps d'arrêt décroissant vers T on a $\mathcal{F}_T = \bigcap_{n \geq 1} \mathcal{F}_{T_n}$, cf. Prop. 4.9).

Lemme 7.12 *Les intervalles de constance de M et de $\langle M, M \rangle$ sont ps les mêmes. En d'autres termes, on a ps pour tous $a < b$,*

$$M_t = M_a, \forall t \in [a, b] \iff \langle M, M \rangle_t = \langle M, M \rangle_a, \forall t \in [a, b].$$

Démonstration : De la gauche vers la droite, utiliser l'approximation habituelle de $\langle M, M \rangle_t$. De la droite vers la gauche, appliquer le Corollaire 5.34 ($\langle M, M \rangle = 0 : M$ est indistinguable de M_0) au processus $M_{a+t} - M_a$, $t \in [0, b - a]$. \square

Revenons à la preuve du Théorème 7.10. On a ps pour tout $r > 0$,

$$\lim_{s \nearrow r} \beta_s = \lim_{s \nearrow r} M_{\tau_s} = M_{\tau_{r-}} = M_{\tau_r} = \beta_r,$$

où l'avant dernière égalité vient du Lemme 7.12 et du fait que pour $t \in [\tau_{r-}, \tau_r]$, on a $\langle M, M \rangle_t = r$. Par ailleurs, par composition de telles fonctions, les trajectoires de β sont clairement continues à droite ; on conclut que le processus β est à trajectoires continues.

Nous montrons ensuite que β_s et $\beta_s^2 - s$ sont des martingales relativement à la filtration $(\mathcal{G}_s)_{s \geq 0}$. Pour tout $n \geq 1$, les martingales locales arrêtées M^{τ_n} et $(M^{\tau_n})^2 - \langle M, M \rangle^{\tau_n}$ sont des vraies martingales uniformément intégrables (d'après le Théorème 5.32 puisque $\langle M^{\tau_n}, M^{\tau_n} \rangle_\infty = \langle M, M \rangle_{\tau_n} = n$). Le théorème d'arrêt s'applique pour ces martingales uniformément intégrables et donne alors pour $r \leq s \leq n$:

$$\mathbb{E}[\beta_s | \mathcal{G}_r] = \mathbb{E}[M_{\tau_s}^{\tau_n} | \mathcal{F}_{\tau_r}] = M_{\tau_r}^{\tau_n} = \beta_r$$

et

$$\mathbb{E}[\beta_s^2 - s | \mathcal{G}_r] = \mathbb{E}[(M_{\tau_s}^{\tau_n})^2 - \langle M^{\tau_n}, M^{\tau_n} \rangle_{\tau_s} | \mathcal{F}_{\tau_r}]$$

$$\begin{aligned}
&= (M_{\tau_r}^{\tau_n})^2 - \langle M^{\tau_n}, M^{\tau_n} \rangle_{\tau_r} \\
&= \beta_r^2 - r.
\end{aligned}$$

On a donc $\langle \beta, \beta \rangle_s = s$. Le Théorème 7.8 (Théorème de Lévy avec $d = 1$) assure alors que β est un $(\mathcal{G}_r)_{r \geq 0}$ -mouvement brownien. Finalement, par définition de β , on a ps pour tout $t \geq 0$,

$$\beta_{\langle M, M \rangle_t} = M_{\tau_{\langle M, M \rangle_t}}.$$

On a

$$\tau_{\langle M, M \rangle_t} = \inf \{s \geq 0 : \langle M, M \rangle_s > \langle M, M \rangle_t\} \geq t,$$

si l'inégalité est stricte alors $\langle M, M \rangle$ est constante sur $[t, \tau_{\langle M, M \rangle_t}]$, et d'après le Lemme 7.12 M l'est aussi, ce qui assure $M_{\tau_{\langle M, M \rangle_t}} = M_t$ et conclut que ps pour tout $t \geq 0$ on a $M_t = \beta_{\langle M, M \rangle_t}$. Par continuité des trajectoires, les deux processus sont indistinguables. \square

7.4 Inégalités de Burkholder-Davis-Gundy

Dans cette section, on prouve les inégalités Burkholder-Davis-Gundy (BDG) qui montrent que pour une martingale locale M

$$\mathbb{E}[\langle M, M \rangle_t^m] \quad \text{et} \quad \mathbb{E}[|M_t^*|^{2m}]$$

où $M_t^* = \max_{0 \leq s \leq t} |M_s|$ sont de même ordre de grandeur sur $[0, +\infty[$ pour tout $m > 0$.

Théorème 7.13 (Inégalités de Burkholder-Davis-Gundy) *Pour tout réel $p \geq 0$, il existe des constantes c_p, C_p telles que pour toute martingale locale M continue issue de 0,*

$$c_p \mathbb{E}[\langle M, M \rangle_\infty^{p/2}] \leq \mathbb{E}[(M_\infty^*)^p] \leq C_p \mathbb{E}[\langle M, M \rangle_\infty^{p/2}] \quad (7.17)$$

où $M_t^* = \sup_{0 \leq s \leq t} |M_s|$.

Remarque 7.14 Si T est un temps d'arrêt quelconque, en remplaçant M par la martingale locale arrêtée M^T , on obtient les mêmes inégalités avec T à la place de $+\infty$; en particulier, on a aussi les mêmes inégalités avec t à la place de $+\infty$.

On commence par les résultats préliminaires suivants :

Proposition 7.15 (Inégalités de martingales) *Soit M une martingale continue bornée et de variation quadratique bornée. Mais pour tout temps d'arrêt T , on a*

$$\mathbb{E}[|M_T|^{2m}] \leq C_m \mathbb{E}[\langle M, M \rangle_T^m], \quad m > 0 \quad (7.18)$$

$$B_m \mathbb{E}[\langle M, M \rangle_T^m] \leq \mathbb{E}[|M_T|^{2m}], \quad m > 1/2 \quad (7.19)$$

$$B_m \mathbb{E}[\langle M, M \rangle_T^m] \leq \mathbb{E}[(M_T^*)^{2m}] \leq C'_m \mathbb{E}[\langle M, M \rangle_T^m], \quad m > 1/2 \quad (7.20)$$

où B_m, C_m, C'_m sont des constantes universelles (qui dépendent seulement de m mais pas de la martingale M ni du temps d'arrêt T).

Remarque 7.16 En localisant correctement, on montre que (7.18) et (7.20) restent valables pour M martingale locale continue. Pour que (7.19) reste valable, il faut supposer en plus que $\mathbb{E}[\langle M, M \rangle_T^m] < +\infty$.

Démonstration :[Inégalités de martingales] On considère le processus

$$\begin{aligned} Y_t &= \delta + \varepsilon \langle M, M \rangle_t + M_t^2 \\ &= \delta + (1 + \varepsilon) \langle M, M \rangle_t + 2 \int_0^t M_s dM_s, \quad t \geq 0, \end{aligned}$$

où $\delta > 0$ et $\varepsilon > 0$ sont des constantes qui seront choisies plus tard et la deuxième expression vient de la formule d'Itô. En appliquant la formule d'Itô pour $f(x) = x^m$, on a pour $t \geq 0$:

$$\begin{aligned} Y_t^m &= \delta^m + m(1 + \varepsilon) \int_0^t Y_s^{m-1} d\langle M, M \rangle_s + 2m(m-1) \int_0^t Y_s^{m-2} M_s^2 d\langle M, M \rangle_s \\ &\quad + 2m \int_0^t Y_s^{m-1} M_s dM_s. \end{aligned}$$

Comme par hypothèse M , Y et $\langle M, M \rangle$ sont bornées et Y est bornée de 0, l'intégrale $\int_0^t Y_s^{m-1} M_s dM_s$ est une (vraie) martingale uniformément intégrable. Le théorème d'arrêt (Théorème 4.32) s'applique et donne

$$\mathbb{E} \left[\int_0^T Y_s^{m-1} M_s dM_s \right] = 0.$$

En prenant les espérances dans la formule d'Itô, on a donc

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Y_T^m] &= \delta^m + m(1 + \varepsilon) \mathbb{E} \left[\int_0^T Y_s^{m-1} d\langle M, M \rangle_s \right] \\ &\quad + 2m(m-1) \mathbb{E} \left[\int_0^T Y_s^{m-2} M_s^2 d\langle M, M \rangle_s \right]. \end{aligned} \quad (7.21)$$

Ci dessous, on passe à la limite dans les espérances avec le théorème de convergence dominée en utilisant que M et son crochet $\langle M, M \rangle$ sont bornés.

Cas 1 : borne sup (7.18) pour $0 < m \leq 1$. Comme le dernier terme à droite de (7.21) est négatif pour $m \leq 1$, en faisant $\delta \rightarrow 0$, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(\varepsilon \langle M, M \rangle_T + M_T^2)^m] &\leq m(1 + \varepsilon) \mathbb{E} \left[\int_0^T (\varepsilon \langle M, M \rangle_s + M_s^2)^{m-1} d\langle M, M \rangle_s \right] \\ &\leq m(1 + \varepsilon) \varepsilon^{m-1} \mathbb{E} \left[\int_0^T \langle M, M \rangle_s^{m-1} d\langle M, M \rangle_s \right] \\ &= (1 + \varepsilon) \varepsilon^{m-1} \mathbb{E}[\langle M, M \rangle_T^m] \end{aligned} \quad (7.22)$$

en utilisant la décroissance de x^{m-1} pour $0 < m \leq 1$. Comme pour ces valeurs de m , $x \mapsto x^m$ est concave, on a

$$2^{m-1}(x^m + y^m) \leq (x + y)^m, \quad x \geq 0, y \geq 0, \quad (7.23)$$

et (7.22) donne

$$\varepsilon^m \mathbb{E}[\langle M, M \rangle_T^m] + \mathbb{E}[|M_T|^{2m}] \leq (1 + \varepsilon)(\varepsilon/2)^{m-1} \mathbb{E}[\langle M, M \rangle_T^m]. \quad (7.24)$$

On déduit alors

$$\mathbb{E}[|M_T|^{2m}] \leq ((1 + \varepsilon)(2/\varepsilon)^{1-m} - \varepsilon^m) \mathbb{E}[\langle M, M \rangle_T^m]. \quad (7.25)$$

Cas 2 : borne inf (7.19) pour $m > 1$. Dans ce cas, le dernier terme à droite de (7.21) est positif, $x \mapsto x^{m-1}$ est croissante et $x \mapsto x^m$ est convexe. Les inégalités dans (7.22), (7.24), (7.25) se renversent pour mener à

$$\mathbb{E}[|M_T|^{2m}] \geq ((1 + \varepsilon)(2/\varepsilon)^{1-m} - \varepsilon^m) \mathbb{E}[\langle M, M \rangle_T^m].$$

Cas 3 : borne inf (7.19) pour $\frac{1}{2} < m \leq 1$. En faisant $\varepsilon = 0$ et $\delta \rightarrow 0$ dans (7.21), on a

$$\mathbb{E}[|M_T|^{2m}] = 2m \left(m - \frac{1}{2} \right) \mathbb{E} \left[\int_0^T |M_s|^{2(m-1)} d\langle M, M \rangle_s \right]. \quad (7.26)$$

De plus, on déduit de (7.23) et (7.21) et de la décroissance de x^{m-1}

$$\begin{aligned} 2^{m-1}(\varepsilon^m \mathbb{E}[\langle M, M \rangle_T^m] + \mathbb{E}[(\delta + M_T^2)^m]) &\leq \mathbb{E}[(\varepsilon \langle M, M \rangle_T + (\delta + M_T^2))^m] = \mathbb{E}[Y_T^m] \\ &\leq \delta^m + m(1 + \varepsilon) \mathbb{E} \left[\int_0^T (\delta + M_s^2)^{m-1} d\langle M, M \rangle_s \right]. \end{aligned}$$

En faisant $\delta \searrow 0$, on obtient alors

$$2^{m-1}(\varepsilon^m \mathbb{E}[\langle M, M \rangle_T^m] + \mathbb{E}[|M_T|^{2m}]) \leq m(1 + \varepsilon) \mathbb{E} \left[\int_0^T |M_s|^{2(m-1)} d\langle M, M \rangle_s \right]. \quad (7.27)$$

En combinant (7.26) et (7.27), on a la borne inférieure valable pour tout $\varepsilon > 0$:

$$\mathbb{E}[|M_T|^{2m}] \geq \varepsilon^m \left(\frac{(1 + \varepsilon)2^{1-m}}{2m - 1} - 1 \right)^{-1} \mathbb{E}[\langle M, M \rangle_T^m].$$

Cas 4 : borne sup (7.18) pour $m > 1$. Dans ce cas, l'inégalité (7.27) s'inverse et on a

$$\mathbb{E}[|M_T|^{2m}] \leq \varepsilon^m \left(\frac{(1 + \varepsilon)2^{1-m}}{2m - 1} - 1 \right)^{-1} \mathbb{E}[\langle M, M \rangle_T^m]$$

où ε doit vérifier $\varepsilon > (2m - 1)2^{m-1} - 1$.

Les cas 1–4 établissent (7.18) et (7.19). Pour prouver (7.20), on applique l'inégalité maximale de Doob à la (\mathcal{F}_t) -martingale $(M_{T \wedge t})_{t \geq 0}$. On a alors pour $m > 1/2$:

$$\begin{aligned} B_m \mathbb{E}[\langle M, M \rangle_{T \wedge t}^m] &\leq \mathbb{E}[|M_{T \wedge t}|^{2m}] \leq \mathbb{E}[(M_{T \wedge t}^*)^{2m}] \\ &\leq \left(\frac{2m}{2m-1} \right)^{2m} \mathbb{E}[|M_{T \wedge t}|^{2m}] \\ &\leq C_m \left(\frac{2m}{2m-1} \right)^{2m} \mathbb{E}[\langle M, M \rangle_{T \wedge t}^m], \quad t \geq 0, \end{aligned}$$

ce qui est (7.20) avec T remplacé par $T \wedge t$. On conclut alors à l'aide du théorème de convergence monotone en faisant $t \rightarrow +\infty$. \square

En plus des inégalités de martingales de la Prop. 7.15, la preuve des inégalités BDG du Th. 7.13 utilise également l'inégalité de Lenglart :

Proposition 7.17 (Inégalité de Lenglart) *Soit $(X_t)_{t \geq 0}$ un processus à trajectoires continues et positives partant de 0 et $(A_t)_{t \geq 0}$ un processus continu croissant tels que*

$$\text{pour tout temps d'arrêt } T \text{ borné : } \mathbb{E}[X_T] \leq \mathbb{E}[A_T]. \quad (7.28)$$

Alors pour tout temps d'arrêt } T :

$$\mathbb{P}\left(\max_{s \leq T} X_s \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\mathbb{E}[\delta \wedge A_T]}{\varepsilon} + \mathbb{P}(A_T \geq \delta), \quad \varepsilon, \delta > 0, \quad (7.29)$$

$$\mathbb{E}[(X_T^*)^p] \leq \frac{2-p}{1-p} \mathbb{E}[A_T^p], \quad 0 < p < 1. \quad (7.30)$$

Remarque 7.18 1. Noter que la condition (7.28) est remplie si $X = M^2$ où M est une martingale continue bornée dans L^2 car par définition du crochet de M , on a $X_t - A_t = M_t^2 - \langle M, M \rangle_t$ martingale locale et c'est une vraie martingale car $M \in L^2$. Le théorème d'arrêt (avec T borné et $0 \leq T$) donne en prenant l'espérance $\mathbb{E}[M_T^2 - A_T] = \mathbb{E}[M_0^2 - A_0]$, ie. $\mathbb{E}[X_T] = \mathbb{E}[A_T]$.

2. La condition (7.28) est encore remplie si M est une martingale locale réduite par T_n : on peut supposer que M^{T_n} est une martingale L^2 pour laquelle d'après 1) (7.28) est vraie, ie.

$$\mathbb{E}[X_{T \wedge T_n}] = \mathbb{E}[A_{T \wedge T_n}] \leq \mathbb{E}[A_T].$$

Mais comme $T_n \nearrow +\infty$ et T est borné, par le lemme de Fatou, il vient :

$$\mathbb{E}[X_T] = \mathbb{E}\left[\liminf_{n \rightarrow +\infty} X_{T \wedge T_n}\right] \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}[X_{T \wedge T_n}] \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}[A_{T \wedge T_n}] \leq \mathbb{E}[A_T].$$

Démonstration : [Lenglart] Soit d'abord T un temps d'arrêt borné et $\varepsilon > 0$. On note $R = \inf (t \geq 0 : X_t \geq \varepsilon)$. Sur $\{X_T^* \geq \varepsilon\}$, on a $R \leq T$ ou encore $R = R \wedge T$. Comme par continuité des trajectoires $X_R = \varepsilon$, on a alors :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_T^* \geq \varepsilon) &= \mathbb{E}[\mathbf{1}_{\{X_T^* \geq \varepsilon\}}] = \mathbb{E}\left[\frac{X_R}{\varepsilon} \mathbf{1}_{\{X_T^* \geq \varepsilon\}}\right] = \mathbb{E}\left[\frac{X_{R \wedge T}}{\varepsilon} \mathbf{1}_{\{X_T^* \geq \varepsilon\}}\right] \\ &\leq \frac{1}{\varepsilon} \mathbb{E}[X_{R \wedge T}] \leq \frac{1}{\varepsilon} \mathbb{E}[A_{R \wedge T}] \leq \frac{1}{\varepsilon} \mathbb{E}[A_T] \end{aligned} \quad (7.31)$$

où on utilise d'abord (7.28) avec $T \wedge R$ borné puis la croissance de A .

Si T est un temps d'arrêt quelconque, alors (7.31) s'applique au temps d'arrêt borné $T_n = T \wedge n : \mathbb{P}(X_{T_n}^* \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon} \mathbb{E}[A_{T_n}]$. Mais comme $T_n \rightarrow T$ ($n \rightarrow +\infty$), $\bigcup_{n \geq 1} \{X_{T_n}^* > \varepsilon\} = \{X_T^* > \varepsilon\}$ (réunion croissante), et en passant à la limite, on a :

$$\mathbb{P}(X_T^* > \varepsilon) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(X_{T_n}^* > \varepsilon) \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\varepsilon} \mathbb{E}[A_{T_n}] = \frac{1}{\varepsilon} \mathbb{E}[A_T].$$

On a donc encore $\mathbb{P}(X_T^* > \varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon} \mathbb{E}[A_T]$.

Finalement, soit $\varepsilon, \delta > 0$ et $S = \inf (t \geq 0 : A_t \geq \delta)$. On a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_T^* \geq \varepsilon) &= \mathbb{P}(X_T^* \geq \varepsilon, A_T < \delta) + \mathbb{P}(X_T^* \geq \varepsilon, A_T \geq \delta) \\ &\leq \mathbb{P}(X_T^* \geq \varepsilon, T < S) + \mathbb{P}(A_T \geq \delta) \\ &\leq \mathbb{P}(X_{T \wedge S}^* \geq \varepsilon) + \mathbb{P}(A_T \geq \delta) \\ &\leq \frac{1}{\varepsilon} \mathbb{E}[A_{T \wedge S}] + \mathbb{P}(A_T \geq \delta) \\ &\leq \frac{1}{\varepsilon} \mathbb{E}[A_T \wedge \delta] + \mathbb{P}(A_T \geq \delta) \end{aligned}$$

en utilisant (7.31) avec $T \wedge S$ puis la définition de S , qui assure $A_{T \wedge S} = A_T \wedge A_S = A_T \wedge \delta$.

Pour la dernière partie, on utilise $\mathbb{E}[Z] = \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(Z \geq x) dx$ valable pour toute variable aléatoire Z positive. En utilisant ci-dessous (7.29) avec $\varepsilon = \delta = x^{-1/p}$, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(X_T^*)^p] &\leq \int_0^{+\infty} \mathbb{P}((X_T^*)^p > x) dx \\ &\leq \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(X_T^* > x^{1/p}) dx \\ &\leq \int_0^{+\infty} x^{-1/p} \mathbb{E}[A_T \wedge x^{1/p}] + \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(A_T > x^{1/p}) dx \\ &\leq \mathbb{E}\left[\int_0^{A_T^p} dx\right] + \mathbb{E}\left[\int_{A_T^p}^{+\infty} A_T x^{-1/p} dx\right] + \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(A_T^p > x) dx \\ &\quad \text{(th. de Fubini)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \mathbb{E}[A_T^p] + \mathbb{E}\left[A_T \times \frac{p}{1-p} A_T^{p-1}\right] + \mathbb{E}[A_T^p] \\
&\leq \frac{2-p}{1-p} \mathbb{E}[A_T^p].
\end{aligned}$$

□

Corollaire 7.19 Soit $(M^{(n)})_{n \geq 1}$ une suite de martingales locales et T un temps d'arrêt tels que $\langle M^{(n)}, M^{(n)} \rangle_T \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$. Alors $\sup_{s \leq T} |M_s^{(n)}| \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$ quand $n \rightarrow +\infty$.

Démonstration : D'après la Remarque 7.18, la borne précédente reste vraie pour $X = (M^{(n)})^2$ et $A_t = \langle M^{(n)}, M^{(n)} \rangle_t$ où $M^{(n)}$ est une martingale locale. On a alors

$$\mathbb{P}\left(\sup_{s \leq T} |M_s^{(n)}|^2 > \varepsilon\right) \leq \frac{1}{\varepsilon} \mathbb{E}[\langle M^{(n)}, M^{(n)} \rangle_T \wedge \delta] + \mathbb{P}(\langle M^{(n)}, M^{(n)} \rangle_T \geq \delta).$$

Le deuxième terme tend vers 0 directement par l'hypothèse. Comme $\langle M^{(n)}, M^{(n)} \rangle_T \wedge \delta \leq \delta$ est borné et uniformément intégrable, le premier terme tend aussi vers 0 par le théorème de Vitali. Finalement, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}\left(\sup_{s \leq T} |M_s^{(n)}|^2 > \varepsilon\right) = 0$, ce qui assure en probabilité :

$$\sup_{s \leq T} |M_s^{(n)}| \xrightarrow{\mathbb{P}} 0, \quad n \rightarrow +\infty.$$

□

Avec les inégalités de martingales (Prop. 7.15) et l'inégalité de Lengart (Prop. 7.17), tout est en place pour prouver les inégalités BDG (Th. 7.13) :

Démonstration des inégalités BDG (Théorème 7.13). D'après les inégalités de martingales précédentes (Proposition 7.15) et la Remarque 7.16 qui les suit, (7.17) est valable pour $p = 2m > 1$. Il reste à voir le cas $0 < p = 2m \leq 1$. Quitte à localiser les processus, on suppose que M et $\langle M, M \rangle$ sont bornés et on utilise l'inégalité de Lengart (7.30).

D'après l'inégalité droite dans (7.20) avec $m = 1$, on peut appliquer l'inégalité de Lengart (7.30) avec

$$X = (M^*)^2, \quad A = C_1' \langle M, M \rangle$$

et on a pour tout $0 < m < 1$:

$$\mathbb{E}[(M_T^*)^{2m}] \leq \frac{2-m}{1-m} (C_1')^m \mathbb{E}[\langle M, M \rangle_T^m].$$

De la même façon, l'inégalité à gauche de (7.20) avec $m = 1$ permet d'appliquer l'inégalité de Lengart avec

$$X = B_1 \langle M, M \rangle, \quad A = (M^*)^2$$

ce qui donne pour $0 < m < 1$

$$\frac{1-m}{2-m} B_1^m \mathbb{E}[\langle M, M \rangle_T^m] \leq \mathbb{E}[(M_T^*)^{2m}].$$

Cela achève la preuve des inégalités BDG (7.17). \square

7.5 Représentation des martingales browniennes

Nous montrons que lorsque la filtration est engendrée par un mouvement brownien, toutes les martingales pour cette filtration peuvent être représentées comme intégrales stochastiques par rapport à ce mouvement brownien. Dans cette section, on considère sur Ω la filtration brownienne $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$, c'est à dire l'augmentation habituelle de la filtration canonique d'un mouvement brownien B issu de 0. On commence par un lemme de densité utile.

Lemme 7.20 (Densité dans $L_{\mathbb{C}}^2(\Omega, \mathcal{F}_{\infty})$) *On considère la filtration brownienne. L'espace vectoriel engendré par les variables aléatoires*

$$\exp\left(i \sum_{j=1}^n \lambda_j (B_{t_j} - B_{t_{j-1}})\right)$$

pour $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ est dense dans $L_{\mathbb{C}}^2(\Omega, \mathcal{F}_{\infty})$.

Démonstration : Il suffit de montrer que si $Z \in L_{\mathbb{C}}^2(\Omega, \mathcal{F}_{\infty})$ vérifie

$$\mathbb{E} \left[Z \exp \left(i \sum_{j=1}^n \lambda_j (B_{t_j} - B_{t_{j-1}}) \right) \right] = 0 \quad (7.32)$$

pour tout choix de $n \geq 1$ et $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n$, $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ alors $Z = 0$ ps.

On note $\phi_{m, \sigma^2}(x)$, $x \in \mathbb{R}$, la densité de la loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$, $m \in \mathbb{R}, \sigma^2 > 0$ et on rappelle sa fonction caractéristique $\mathcal{N}(m, \sigma^2) : \mathbb{E}[\exp(iuX)] = \exp(ium - (\sigma^2 u^2/2))$.

Soit $n \geq 1$ et $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n$ fixés. La condition (7.32) assure que pour tous $\sigma_1^2, \dots, \sigma_n^2 > 0$ et $m_1, \dots, m_n \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^n \phi_{m_j, \sigma_j^2}(\lambda_j) \mathbb{E} \left[Z \exp \left(i \sum_{j=1}^n \lambda_j (B_{t_j} - B_{t_{j-1}}) \right) \right] d\lambda_1 \dots d\lambda_n \\ &= \mathbb{E} \left[Z \prod_{j=1}^n \left(\int_{\mathbb{R}} \phi_{m_j, \sigma_j^2}(\lambda_j) \exp \left(i \lambda_j (B_{t_j} - B_{t_{j-1}}) \right) d\lambda_j \right) \right] \end{aligned}$$

$$= \mathbb{E} \left[Z \prod_{k=1}^n \exp \left(im_k(B_{t_k} - B_{t_{k-1}}) - \frac{\sigma_k^2(B_{t_k} - B_{t_{k-1}})^2}{2} \right) \right]$$

où la deuxième égalité vient du théorème de Fubini et la troisième de l'expression de la fonction caractéristique de $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$. On obtient pour tous $m_1, \dots, m_n \in \mathbb{R}$ et $\alpha_1, \dots, \alpha_n > 0$:

$$\mathbb{E} \left[Z \prod_{k=1}^n \exp \left(im_k(B_{t_k} - B_{t_{k-1}}) - \alpha_k(B_{t_k} - B_{t_{k-1}})^2 \right) \right] = 0.$$

Un théorème de type Stone-Weierstrass garantit que les combinaisons linéaires complexes de la fonction constante égale à 1 et des fonctions de la forme

$$(y_1, \dots, y_n) \mapsto \exp \left(\sum_{k=1}^n (im_k y_k - \alpha_k y_k^2) \right)$$

avec $\alpha_1, \dots, \alpha_m > 0$ et $m_1, \dots, m_n \in \mathbb{R}$ sont denses dans l'espace $C_\ell(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ des fonctions continues de \mathbb{R}^n dans \mathbb{C} qui ont une limite à l'infini, muni de la norme de la convergence uniforme. Par un passage à la limite, on obtient donc, pour toute fonction $\varphi \in C_\ell(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$,

$$\mathbb{E}[Z \varphi(B_{t_1}, B_{t_2} - B_{t_1}, \dots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}})] = 0.$$

On a donc, d'abord par approximation, pour tout ouvert borné U de \mathbb{R}^n puis, par un argument de classe monotone, pour tout borélien U de \mathbb{R}^n :

$$\mathbb{E}[Z \mathbf{1}_U(B_{t_1}, B_{t_2} - B_{t_1}, \dots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}})] = 0.$$

Finalement, on a obtenu l'égalité $\mathbb{E}[Z \mathbf{1}_A] = 0$ pour tout $A \in \sigma(B_{t_1}, \dots, B_{t_n})$. Avec un dernier argument de classe monotone, on montre que cette égalité reste vraie pour tout $A \in \sigma(B_t : t \geq 0)$; puis, par complétion, pour tout $A \in \mathcal{F}_\infty$.

En prenant $A = \{Z > 0\} \in \mathcal{F}_\infty$, on a $Z \mathbf{1}_A \geq 0$ et $\mathbb{E}[Z \mathbf{1}_A] = 0$ donc $Z \mathbf{1}_A = 0$ presque sûrement ce qui exige $Z \leq 0$ ps. De même avec $A = \{Z < 0\}$, on a $Z \geq 0$ ps et donc $Z = 0$ ps. On conclut finalement que $Z = 0$ ps ce qui établit le Lemme 7.20. \square

Théorème 7.21 (Représentation de variables L^2) *On considère la filtration brownienne. Alors, pour toute variable aléatoire $Z \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_\infty)$, il existe un (unique) processus $h \in L^2(B)$ (en particulier progressif donc adapté) tel que*

$$Z = \mathbb{E}[Z] + \int_0^{+\infty} h(s, \omega) dB_s. \quad (7.33)$$

Démonstration : D'abord, on établit l'unicité de $h \in L^2(B)$: si h et \tilde{h} correspondent à la même variable aléatoire $Z \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_\infty)$, par l'isométrie d'Itô on a :

$$\mathbb{E} \left[\int_0^{+\infty} (h(s, \omega) - \tilde{h}(s, \omega))^2 ds \right] = \mathbb{E} \left[\left(\int_0^{+\infty} h(s, \omega) dB_s - \int_0^{+\infty} \tilde{h}(s, \omega) dB_s \right)^2 \right] = 0,$$

puisque

$$Z = \mathbb{E}[Z] + \int_0^{+\infty} h(s, \omega) dB_s = \mathbb{E}[Z] + \int_0^{+\infty} \tilde{h}(s, \omega) dB_s.$$

On a donc $h = \tilde{h}$ dans $L^2(B)$ et l'unicité.

Pour l'**existence**, on note \mathcal{H} l'espace vectoriel des variables aléatoires $Z \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_\infty)$ qui ont la propriété (7.33). Le but est de voir que $\mathcal{H} = L^2(\Omega, \mathcal{F}_\infty)$.

Ensuite, on montre que \mathcal{H} est fermé : si $Z \in \mathcal{H}$ correspond à h ,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Z^2] &= \mathbb{E}[Z]^2 + 2\mathbb{E}[Z]\mathbb{E}\left[\int_0^{+\infty} h(s, \omega) dB_s\right] + \mathbb{E}\left[\left(\int_0^{+\infty} h(s, \omega) dB_s\right)^2\right] \\ &= \mathbb{E}[Z]^2 + \mathbb{E}\left[\int_0^{+\infty} h(s, \omega)^2 ds\right], \end{aligned}$$

par l'isométrie d'Itô et parce que $\int_0^{+\infty} h(s, \omega) dB_s$ est centrée. Il en découle facilement que si $(Z_n)_{n \geq 0}$ est une suite dans \mathcal{H} qui converge dans $L^2(\Omega, \mathcal{F}_\infty)$ vers Z , on a

$$\mathbb{E}[(Z_n - Z_m)^2] = \mathbb{E}[Z_n - Z_m]^2 + \mathbb{E}\left[\int_0^{+\infty} (h_n(s, \omega) - h_m(s, \omega))^2 ds\right],$$

et les processus h_n associés à Z_n forment une suite de Cauchy dans $L^2(B)$ donc convergent vers $h \in L^2(B)$. D'après la propriété d'isométrie de l'intégrale stochastique (Théorème 6.9), on a alors $Z = \mathbb{E}[Z] + \int_0^{+\infty} h(s, \omega) dB_s$ et donc \mathcal{H} est un espace fermé.

Ensuite, on montre que \mathcal{H} contient les variables aléatoires du Lemme 7.20 : pour $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, notons $f = \sum_{j=1}^n \lambda_j \mathbf{1}_{[t_{j-1}, t_j]}$ et \mathcal{E}^f la martingale exponentielle $\mathcal{E}(i \int_0^\cdot f(s) dB_s)$ (cf. Proposition 7.4). La formule d'Itô (7.10) pour l'exponentielle stochastique montre que

$$\exp\left(i \sum_{j=1}^n \lambda_j (B_{t_j} - B_{t_{j-1}}) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \lambda_j^2 (t_j - t_{j-1})\right) = \mathcal{E}_\infty^f = 1 + i \int_0^{+\infty} \mathcal{E}_s^f f(s) dB_s$$

soit

$$\begin{aligned} &\exp\left(i \sum_{j=1}^n \lambda_j (B_{t_j} - B_{t_{j-1}})\right) \\ &= \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \lambda_j^2 (t_j - t_{j-1})\right) + i \int_0^{+\infty} \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \lambda_j^2 (t_j - t_{j-1})\right) \mathcal{E}_s^f f(s) dB_s. \end{aligned}$$

On a donc

$$\left\{ \exp\left(i \sum_{j=1}^n \lambda_j (B_{t_j} - B_{t_{j-1}})\right) : \lambda_j \in \mathbb{R}, 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n, n \in \mathbb{N} \right\} \subset \mathcal{H}$$

Finalement, avec le Lemme 7.20 on a :

$$L^2(\Omega, \mathcal{F}_\infty) = \overline{\text{Vect} \left\{ \exp \left(i \sum_{j=1}^n \lambda_j (B_{t_j} - B_{t_{j-1}}) \right) : \lambda_j \in \mathbb{R}, 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n, n \in \mathbb{N} \right\}} \subset \overline{\mathcal{H}} = \mathcal{H}.$$

On a donc $\mathcal{H} = L^2(\Omega, \mathcal{F}_\infty)$ ce qui prouve le Théorème 7.21. \square

Théorème 7.22 (Représentation de martingales bornées dans L^2) *On considère la filtration brownienne. Alors, pour toute martingale M continue et bornée dans L^2 , il existe un (unique) processus $h \in L^2(B)$ et une constante C réelle tels que*

$$M_t = C + \int_0^t h(s, \omega) dB_s.$$

Démonstration : Soit M une martingale continue et bornée dans L^2 , alors elle converge vers $M_\infty \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_\infty)$. D'après le Théorème 7.21 appliqué à Z_∞ , il existe $h \in L^2(B)$ telle que $M_\infty \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_\infty)$ s'écrive

$$M_\infty = \mathbb{E}[M_\infty] + \int_0^{+\infty} h(s, \omega) dB_s.$$

Par conditionnement, il vient :

$$M_t = \mathbb{E}[M_\infty | \mathcal{F}_t] = \mathbb{E}[M_\infty] + \int_0^t h(s, \omega) dB_s.$$

L'unicité de $h \in L^2(B)$ s'obtient comme dans le Théorème 7.21. \square

Théorème 7.23 (Représentation de martingales locales) *On considère la filtration brownienne. Alors, pour toute martingale locale M continue, il existe un (unique) processus $h \in L^2_{loc}(B)$ et une constante C réelle tels que*

$$M_t = C + \int_0^t h(s, \omega) dB_s.$$

Démonstration : Pour une martingale locale continue, M , on a d'abord $M_0 = C \in \mathbb{R}$ parce que \mathcal{F}_0 est \mathbb{P} -triviale (ce qu'on peut déduire soit de la première partie de la preuve soit du Chapitre 3). Soit $T_n = \inf(t \geq 0 : |M_t| \geq n)$, M^{T_n} est une martingale locale arrêtée donc une martingale locale et bornée par définition de l'arrêt. Il s'agit donc d'une vraie martingale. Comme en particulier elle est bornée dans $L^2(\mathcal{F}_\infty)$, le Théorème 7.22 s'applique et donne $h_n \in L^2(B)$ tel que

$$M_t^{T_n} = C + \int_0^t h_n(s, \omega) dB_s.$$

Par unicité dans la deuxième partie, si $m < n$, on a $h_n(s, \omega) = h_m(s, \omega)$, ds -pp sur $[0, T_m]$ ps. Il est alors facile de construire $h \in L^2_{loc}(B)$ tel que, pour tout m , $h(s, \omega) = h_m(s, \omega)$ ds -pp sur $[0, T_m]$ ps. La formule annoncée découle ensuite de la construction de l'intégrale stochastique $\int_0^t h(s, \omega) dB_s$ et l'unicité de $h \in L^2_{loc}(B)$ s'obtient aussi facilement par un argument de localisation de l'unicité dans le Théorème 7.22. \square

Remarque 7.24 Sous les hypothèses du Théorème 7.22, notons \mathcal{N} la classe des \mathbb{P} -négligeables de $\sigma(B_t : t \geq 0)$ et pour tout $t \geq 0$, $\mathcal{G}_t = \sigma(B_s : 0 \leq s \leq t) \vee \mathcal{N}$. A priori, on a $\mathcal{F}_t = \mathcal{G}_{t+}$. En fait, le Théorème 7.22 entraîne que $\mathcal{G}_t = \mathcal{G}_{t+} = \mathcal{F}_t$ (le cas $t = 0$ est la loi de Blumenthal!). En effet, si Z est une variable aléatoire \mathcal{F}_t -mesurable bornée, on a

$$Z = \int_0^t h(s, \omega) dB_s = (L^2)\text{-}\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_0^{t-\varepsilon} h(s, \omega) dB_s$$

et quitte à prendre une sous-suite, on voit que Z est limite ps de variables $(\mathcal{G}_t)_t$ -mesurables (car si $\varepsilon > 0 : \mathcal{F}_{t-\varepsilon} \subset \mathcal{G}_t$).

7.6 Formules de Tanaka

La formule de Tanaka est une variation autour de la formule d'Itô pour des fonctions pour qui ne sont pas C^2 .

Théorème 7.25 (Formules de Tanaka) *Soit X une semimartingale continue. Il existe $(L_t^a)_{t \geq 0}$, $a \in \mathbb{R}$, processus croissant continu, appelé **temps local** en a de la semimartingale X , tel que*

$$(X_t - a)^+ = (X_0 - a)^+ + \int_0^t \mathbf{1}_{\{X_s > a\}} dX_s + \frac{1}{2} L_t^a \quad (7.34)$$

$$(X_t - a)^- = (X_0 - a)^- - \int_0^t \mathbf{1}_{\{X_s \leq a\}} dX_s + \frac{1}{2} L_t^a \quad (7.35)$$

$$|X_t - a| = |X_0 - a| + \int_0^t \text{sgn}(X_s - a) dX_s + L_t^a \quad (7.36)$$

où $\text{sgn}(x) = -1, 1$ selon que $x \leq 0, x > 0$. De plus, la mesure (de Stieltjes) dL_t^a associée à L_t^a est portée par $\{t \in \mathbb{R} : X_t = a\}$.

Démonstration : On considère d'abord φ une fonction convexe continue. Bien que φ ne soit pas C^2 , on tente d'écrire une formule d'Itô pour $\varphi(X_t)$.

Soit j une fonction positive de classe C^∞ à support compact inclus dans $[0, +\infty[$ telle que $\int_0^{+\infty} j(y) dy = 1$. On pose $e_n(y) = nj(ny)$ et $\varphi_n = \varphi * e_n$, soit

$$\varphi_n(x) = \int \varphi(x - y) e_n(y) dy = n \int_0^{+\infty} \varphi(x - y) j(ny) dy.$$

Comme φ convexe est localement bornée, φ_n est bien définie. De plus, φ_n est C^∞ et converge simplement vers φ et φ'_n croît vers φ'_- , dérivée à gauche de φ .

En appliquant la formule d'Itô à la fonction φ_n de classe C^2 , on a pour chaque $n \geq 1$:

$$\varphi_n(X_t) = \varphi_n(X_0) + \int_0^t \varphi'_n(X_s) dX_s + \frac{1}{2} A_t^n \quad (7.37)$$

où $A_t^n = \int_0^t \varphi''_n(X_s) d\langle X, X \rangle_s$.

On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi_n(X_t) = \varphi(X_t)$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi_n(X_0) = \varphi(X_0)$. En arrêtant X , on peut supposer que X et $\varphi'_n(X_s)$ sont bornées (uniformément en n car $\varphi'_1 \leq \varphi'_n \leq \varphi'_-$). Par le théorème de convergence dominée pour l'intégrale stochastique (Th. 6.21), on a alors

$$\int_0^t \varphi'_n(X_s) dX_s \xrightarrow{\mathbb{P}} \int_0^t \varphi'_-(X_s) dX_s$$

uniformément sur les compacts. Par conséquent, A^n converge vers un processus A^φ croissant car limite de processus croissants. En passant à la limite dans (7.37), il vient

$$\varphi(X_t) = \varphi(X_0) + \int_0^t \varphi'_-(X_s) dX_s + \frac{1}{2} A_t^\varphi \quad (7.38)$$

puis le processus A^φ peut être choisi continu (par indistinguabilité car il s'exprime comme différence de processus continus).

On applique (7.38) à $\varphi(x) = (x - a)^+$ fonction convexe de dérivée à gauche $\varphi'_- = \mathbf{1}_{]a, +\infty[}$: il existe un processus croissant A^+ tel que

$$(X_t - a)^+ = (X_0 - a)^+ + \int_0^t \mathbf{1}_{\{X_s > a\}} dX_s + \frac{1}{2} A_t^+. \quad (7.39)$$

De la même façon avec $\varphi(x) = (x - a)^-$ fonction convexe de dérivée à gauche $\varphi'_- = -\mathbf{1}_{]-\infty, a]}$: il existe un processus croissant A^- tel que

$$(X_t - a)^- = (X_0 - a)^- - \int_0^t \mathbf{1}_{\{X_s \leq a\}} dX_s + \frac{1}{2} A_t^-. \quad (7.40)$$

Par différence de (7.39) et (7.40), comme $x = x^+ - x^-$, on a

$$X_t = X_0 + \int_0^t dX_s + \frac{1}{2} (A_t^+ - A_t^-). \quad (7.41)$$

Il vient $A^+ = A^-$ et on pose alors $L_t^a := A_t^+$. En sommant (7.39) et (7.40), comme $|x| = x^+ + x^-$, on a

$$|X_t - a| = |X_0 - a| + \int_0^t \operatorname{sgn}(X_s - a) dX_s + L_t^a.$$

Pour la dernière partie, en appliquant la formule d'Itô à la semimartingale $|X_t - a|$ avec $f(x) = x^2$, on a en utilisant aussi (7.41)

$$\begin{aligned} |X_t - a|^2 &= |X_0 - a|^2 + 2 \int_0^t |X_s - a| d(|X_s - a|)_s + \langle |X - a|, |X - a| \rangle_t \\ &= (X_0 - a)^2 + 2 \int_0^t |X_s - a| \operatorname{sgn}(X_s - a) dX_s + 2 \int_0^t |X_s - a| dL_s^a + \langle X, X \rangle_t. \end{aligned}$$

En comparant avec la formule d'Itô pour X avec $f(x) = (x - a)^2$,

$$(X_t - a)^2 = (X_0 - a)^2 + 2 \int_0^t (X_s - a) dX_s + \langle X, X \rangle_t,$$

il vient $\int_0^t |X_s - a| dL_s^a = 0$ ps, ce qui est le résultat. \square

Exemple 7.26 Pour le mouvement brownien B , la formule de Tanaka (Th. 7.25) s'écrit :

$$\begin{aligned} |B_t| &= \int_0^t \operatorname{sgn}(B_s) dB_s + L_t^B \\ &= \beta_t + L_t^B, \end{aligned} \tag{7.42}$$

où $L^B = (L_t^B)_{t \geq 0}$ est le temps local du mouvement brownien en 0. Par le théorème de Lévy (Th. 7.8), on observe $\beta_t = \int_0^t \operatorname{sgn}(B_s) dB_s$, $t \geq 0$, est un (autre) mouvement brownien. L'identité (7.42) ci-dessus correspond aussi la décomposition de Doob-Meyer de la semimartingale $(|B_t|)_{t \geq 0}$.

Lorsque $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction convexe, on peut préciser (7.38) en utilisant le temps local $(L_t^a)_{t \geq 0, a \in \mathbb{R}}$ et la mesure μ_φ associée à φ convexe par

$$\mu_\varphi([a, b]) = \varphi'_-(b) - \varphi'_-(a). \tag{7.43}$$

Théorème 7.27 (Formule d'Itô-Tanaka) Soit X une semimartingale continue et $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe. On a

$$\varphi(X_t) = \varphi(X_0) + \int_0^t \varphi'_-(X_s) dX_s + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} L_t^a \mu_\varphi(da). \tag{7.44}$$

Remarque 7.28 — Noter que lorsque $\varphi = |x|$, on a $\varphi'_-(x) = \operatorname{sgn}(x)$ et

$$\mu_\varphi([a, b]) = \varphi'_-(b) - \varphi'_-(a) = \operatorname{sgn}(b) - \operatorname{sgn}(a) = 2\delta_0([a, b]).$$

donc $\mu_\varphi = 2\delta_0$ et (7.44) retrouve bien (7.36).

- La formule (7.44) se généralise immédiatement à une combinaison linéaire de fonctions convexes $\varphi = \sum_{i=1}^p \alpha_i \varphi_i$. Dans ce cas, μ_φ devient une mesure signée.

Démonstration : On commence par localiser X en utilisant le temps d'arrêt T_n donné par

$$T_n = \min \left(t \geq 0 : |X_t| = n, \langle X, X \rangle_t = n, \text{Var}^{(1)}(A, [0, t]) = n \right)$$

où A est la partie à variation bornée de X et $\text{Var}^{(1)}(A, [0, t])$ sa variation totale sur $[0, t]$. Ainsi pour la semimartingale arrêtée X^{T_n} , on a

$$\sup_{t \geq 0} |X_t^{T_n}| \leq n, \quad \langle X^{T_n}, X^{T_n} \rangle_\infty \leq n, \quad \text{Var}^{(1)}(A^{T_n}, [0, t]) = n.$$

Quitte à utiliser un argument de localisation par un arrêt adéquat, on peut supposer

$$\sup_{t \geq 0} |X_t| \leq K, \quad \langle X, X \rangle_\infty \leq K,$$

variation bornée de la partie variation bornée de X bornée K ,

On peut supposer également que φ'_- est constante hors de $[-n, n]$ de sorte que μ_φ en (7.43) a pour support $[-n, n]$. Pour $x \in [-n, n]$ fixé, on pose alors

$$g_x(a) = \begin{cases} 0 & \text{pour } a \leq -n-1 \\ (x+n)(a+n+1) & \text{pour } -n-1 \leq a \leq -n \\ x-a & \text{pour } -n \leq a \leq x \\ 0 & \text{pour } x \leq a. \end{cases}$$

On observe que g_x est C^1 par morceaux et $g_x(a) = (x-a)^+$ sur le support $[-n, n]$ de μ_φ . Par intégration par parties dans une intégrale de Stieltjes avec g_x C^1 par morceaux, par définition de μ_φ en (7.43) on a

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} (x-a)^+ \mu_\varphi(da) &= \int_{-\infty}^{+\infty} g_x(a) \mu_\varphi(da) = - \int_{-\infty}^{+\infty} g'_x(a) \varphi'_-(a) da \\ &= -(x+n) \int_{-n-1}^{-n} \varphi'_-(a) da + \int_{-n}^x \varphi'_-(a) da \\ &= -(x+n) \varphi'_-(-n) + \varphi(x) - \varphi(-n), \end{aligned} \tag{7.45}$$

et par définition de la mesure μ_φ :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{1}_{]a, +\infty[}(x) \mu_\varphi(da) = \mu_\varphi([-n, x]) = \varphi'_-(x) - \varphi'_-(-n). \tag{7.46}$$

En intégrant la formule de Tanaka (7.34) pour $(x-a)^+$, on obtient

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (X_t^{T_n} - a)^+ \mu_\varphi(da) = \int_{-\infty}^{+\infty} (X_0^{T_n} - a)^+ \mu_\varphi(da) + \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_0^t \mathbf{1}_{\{X_s^{T_n} > a\}} dX_s^{T_n} \right) \mu_\varphi(da)$$

$$+\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} (L_t^a)^{T_n} \mu_\varphi(da).$$

En utilisant (7.45) pour $x = X_t^{T_n}$ et $x = X_0^{T_n}$ puis (7.46) combiné avec le théorème de Fubini ci-dessous :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^t \mathbf{1}_{\{X_s^{T_n} > a\}} dX_s^{T_n} \mu_\varphi(da) &= \int_0^t \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{1}_{]a, +\infty[}(X_s^{T_n}) \mu_\varphi(da) \right) dX_s^{T_n} \\ &= \int_0^t (\varphi'_-(X_s^{T_n}) - \varphi'_-(-n)) dX_s^{T_n} \\ &= \left(\int_0^t \varphi'_-(X_s^{T_n}) dX_s^{T_n} \right) - \varphi'_-(-n)(X_t^{T_n} - X_0^{T_n}), \end{aligned}$$

on obtient :

$$\begin{aligned} -(X_t^{T_n} + n)\varphi'_-(-n) + f(X_t^{T_n}) - f(-n) &= -(X_0^{T_n} + n)\varphi'_-(-n) + f(X_0^{T_n}) - f(-n) \\ &+ \left(\int_0^t \varphi'_-(X_s^{T_n}) dX_s^{T_n} \right) - \varphi'_-(-n)(X_t^{T_n} - X_0^{T_n}) + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} (L_t^a)^{T_n} \mu_\varphi(da). \end{aligned}$$

Après simplifications, on obtient

$$\varphi(X_t^{T_n}) = \varphi(X_0^{T_n}) + \int_0^t \varphi'_-(X_s^{T_n}) dX_s^{T_n} + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} (L_t^a)^{T_n} \mu_\varphi(da)$$

puis la formule de Itô-Tanaka (7.44) en faisant $T_n \nearrow +\infty$ avec $n \rightarrow +\infty$. □

Bibliographie

- [App] David Applebaum. *Lévy Processes and Stochastic Calculus*. Cambridge series in advanced mathematics, vol. 93, 2004.
- [BC] Bernard Bercu, Djalil Chafaï. *Modélisation stochastique et simulation*. Dunod, 2007.
- [JCB-mesure] Jean-Christophe Breton. *Intégrale de Lebesgue*. [Notes de cours](#), L3 Mathématiques, Université de Rennes 1, 2016.
- [JCB-proba] Jean-Christophe Breton. *Fondement des probabilités*. [Notes de cours](#), L3 Mathématiques, Université de Rennes 1, 2014.
- [JCB-martingale] Jean-Christophe Breton. *Probabilités avancées*. Notes de cours, M1 Mathématiques, Université de Rennes 1, 2022.
- [JCB-stoch] Jean-Christophe Breton. *Calcul stochastique*. [Notes de cours](#), M2 Mathématiques, Université de Rennes 1, 2021.
- [Bil2] Patrick Billingsley. *Convergence of Probability Measures*. 2nd Edition, Wiley series in probabilities and mathematical statistics, 1999.
- [Chung] Kai Lai Chung. *A Course in Probability Theory*. 3rd Edition, Academic Press, 2001.
- [CM] Francis Comets, Thierry Meyre. *Calcul stochastique et modèles de diffusions*. Dunod, 2006.
- [CT] Rama Cont, Peter Tankov. *Financial Modelling with Jump Processes*. Chapman & Hall, 2003.
- [Dav] Youri Davydov. *Cours de DEA "Processus stochastiques"*. Université Lille 1, 1999.
- [DM] Claude Dellacherie, Pierre-André Meyer. *Probabilités et potentiels*. Hermann, 1975.
- [EGK] Nicole El Karoui, Emmanuel Gobet, Etienne Pardoux. *Introduction au calcul stochastique*. École Polytechnique, 2001.
- [Fel] William Feller. *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*. Vol. 1. 3rd Edition, Wiley series in probabilities and mathematical statistics, 1968.
- [Gal] Léonard Gallardo. *Mouvement brownien et calcul d'Itô*. Coll. Méthodes mathématiques. Ed. Hermann. 2008.
- [Gué] Hélène Guérin. *Processus à temps continu*. Notes de cours, M2 Mathématiques, Université de Rennes 1, 2009.

- [Kal] Olav Kallenberg. *Foundations of Modern Probability*. 2nd Edition, Springer Series in Statistics. Probability and its Applications, 2002.
- [KS] Ioannis Karatzas, Steven E. Shreve. *Brownian Motion and Stochastic Calculus*. Springer, 1987.
- [Kin] John Kingman. *Poisson Processes*. Oxford University Press, 1993.
- [LG0] Jean-François Le Gall. *Introduction au mouvement brownien*. Gazette des Mathématiciens, vol. 40, 1989.
- [LG1] Jean-François Le Gall. *Mouvement brownien, martingales et calcul stochastique*. Springer, Coll. Mathématiques et applications, vol. 71, 2013.
- [Lif] Michel Lifshits. *Gaussian Random Functions*, Kluwer, 1995.
- [Mal] Florent Malrieu. *Processus de Markov et inégalités fonctionnelles*. Notes de cours de Master 2, 2006.
- [Pro] Philipp Protter. *Stochastic Integration and Differential Equations*. Springer, 1995.
- [RY] Daniel Revuz, Marc Yor. *Continuous Martingales and Brownian Motion*. Springer, 1991.en
- [Tud] Ciprian Tudor. *Cours de calcul stochastique*. Notes de cours M2 Mathématiques, Université Lille 1, 2011.