أجوبة امتحان الدورة الإستدراكية 2008

التمرين الأول :

1

لنحل في $\mathbb{C}$ المعادلة (E) التالية : $(E):\ z^2-8z+17=0$

لدينا : $\Delta=(-8)^2-4\times 17=-4=(2i)^2$

إذن المعادلة تقبل حلين عقديين z_1 و z_2 :

$$z_1=\frac{8-2i}{2}=4-i \quad \text{و} \quad z_2=\frac{8+2i}{2}=4+i$$

2 أ

لدينا حسب المعطيات :

$$\begin{cases} aff(A)=a=4+i \\ aff(B)=b=8+3i \\ aff(M)=z \\ aff(M')=z' \\ aff(\Omega)=\omega=1+2i \end{cases}$$

و لدينا كذلك الدوران $\mathcal{R}$ معرف بما يلي :

$$\mathcal{R}\left(\Omega,\frac{3\pi}{2}\right):\ (\mathcal{P}) \longmapsto (\mathcal{P})$$
$$M(z) \longmapsto M'(z')$$

و ننطلق من المعلومة التالية : $\mathcal{R}(M)=M'$

و منه حسب التعريف العقدي للدوران $\mathcal{R}$ نحصل على :

$$(z'-\omega)=e^{\frac{i3\pi}{2}}(z-\omega)$$

يعني : $z'-(1+2i)=\left(\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right)(z-(1+2i))$

يعني : $z'-1-2i=(0-1i)(z-1-2i)$

يعني : $z'-1-2i=-iz+i-2$

يعني : $z'=-iz+3i-1$

2 ب

ليكن العدد العقدي c لحق النقطة C .

لدينا حسب المعطيات : $\mathcal{R}(A)=C$

إذن حسب التعريف العقدي للدوران $\mathcal{R}$ نحصل على :

$$(c-\omega)=e^{\frac{i3\pi}{2}}(a-\omega)$$

و هذا يعني أن : $c-1-2i=-i(4+i-1-2i)$

أي : $c-1-2i=-i(3-i)$

إذن : $c=-3i-1+1+2i$ يعني : $c=-i$

2 ج

لدينا : $(b-c)=(8+3i)-(-i)=8+4i=2(4+2i)$

إذن : $\boxed{(b-c)=2(a-c)}$ $(*)$

نستغل إذن هذه المتساوية $(*)$ لكي نبرهن على أن النقط A و B و C نقط مستقيمية .

لدينا حسب النتيجة $(*)$: $(b-c)=2(a-c)$

نضرب طرفي هذه المتساوية في العدد العقدي الغير المنعدم $\frac{1}{a-c}$

نحصل على :

$$\left(\frac{b-c}{a-c}\right)=2\in\mathbb{R}$$

إذن : $\arg\left(\frac{b-c}{a-c}\right)\equiv 0\ [2\pi]$ يعني : $(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB})\equiv 0[2\pi]$

أي أن النقط A و B و C نقط مستقيمية .

و يمكنك الإجابة على هذا السؤال بطريقة أخرى و هي كالتالي :

نترجم الكتابة العقدية التالية $(b-c)=2(a-c)$

و ذلك باستعمال الكتابة المتجهية نجد : $\overrightarrow{CB}=2\,\overrightarrow{CA}$

إذن النقط A و B و C نقط مستقيمية .

التمرين الثاني :

1

لدينا $(\mathcal{S})$ فلكة معرفة بمعادلتها الديكارتية التالية :

$$(\mathcal{S}):\ x^2+y^2+z^2-4x-6y+2z+5=0$$

إذن : $(\mathcal{S}):\ (x^2-4x)+(y^2-6y)+(z^2+2z)+5=0$

يعني : $(\mathcal{S}):\ (x-2)^2+(y-3)^2+(z+1)^2+5=14$

يعني : $(\mathcal{S}):\ (x-2)^2+(y-3)^2+(z+1)^2=3^2$

و بالتالي $(\mathcal{S})$ فلكة مركزها $I(2;3;-1)$ و شعاعها $R=3$.

2 أ

حصلنا لحد الآن على الأشياء التالية :

$$\begin{cases} I(2;3;-1) \text{ مركزها } (\mathcal{S}) \\ (\mathcal{P}):x+2y+z-1=0 \end{cases}$$

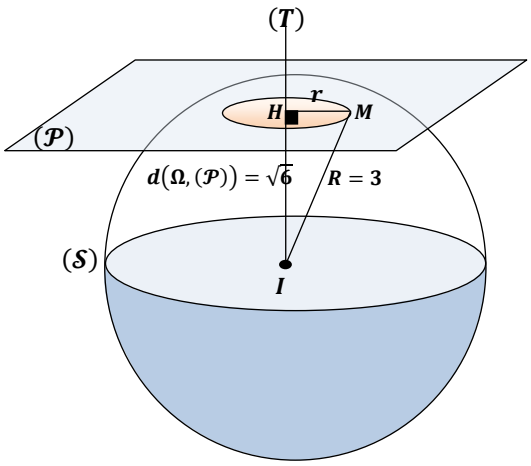
إذن : $d(I;(\mathcal{P}))=\frac{|2+2\times 3-1-1|}{\sqrt{1^2+2^2+1^2}}=\frac{6}{\sqrt{6}}=\sqrt{6}$

2 ب

لدينا $R=3$ هو شعاع الفلكة $(\mathcal{S})$.

و بما أن : $d(I,(\mathcal{P}))=\sqrt{6}<3$ فإن المستوى $(\mathcal{P})$ يقطع الفلكة $(\mathcal{S})$ وفق دائرة (Γ) مركزها H و شعاعها r .

لحساب الشعاع r نستعين بالشكل التالي :



نعلم أن $d(I,(\mathcal{P}))$ تُعبر عن أصغر مسافة تفصل بين النقطة I عن جميع نقط المستوى $(\mathcal{P})$

و نحصل على هذه المسافة عندما يكون $(HI)\perp(\mathcal{P})$.

إذن المثلث HMI قائم الزاوية في النقطة H .

و منه : حسب مبرهنة فيتاغورس : $IM^2=HI^2+HM^2$

يعني : $3^2=\sqrt{6}^2+r^2$ أي : $r^2=9-6=3$.

و بالتالي نستنتج أن المستوى $(\mathcal{P})$ يقطع الفلكة $(\mathcal{S})$ وفق دائرة (Γ) شعاعها $r=\sqrt{3}$.

www.baclive.blogspot.com

3 أ

لتكن $M(x,y,z)$ نقطة من المستقيم (D) .

بما أن (D) مستقيم مار من النقطة $I(2;3;-1)$.

فإن المتجهة $\overrightarrow{IM}$ متجهة موجهة للمستقيم (D).

و لدينا المستوى $(\mathcal{P})$ مُعَرَّفٌ بمعادلته الديكارتية التالية :

$$(\mathcal{P}) : x+2y=z-1=0$$

إذن المتجهة $\vec{n}(1,2,1)$ متجهة منظمية على المستوى $(\mathcal{P})$.

و بما أن المستقيم (D) عمودي على المستوى $(\mathcal{P})$.

فإن المتجهتان $\vec{n}$ و $\overrightarrow{IM}$ مستقيميتان .

يعني : $(\exists t\epsilon\mathbb{R}) \ : \ \overrightarrow{IM}=t\,\vec{n}$

يعني : $(D) : \begin{cases} x-2=t \\ y-3=2t \\ z+1=t \end{cases} ; \ (t\epsilon\mathbb{R})$

يعني : $(D) : \begin{cases} x=t+2 \\ y=2t+3 \\ z=t-1 \end{cases} ; \ (t\epsilon\mathbb{R})$

و هذه الكتابة الأخيرة عبارة عن تمثيل بارامتري للمستقيم (D) .

3 ب

بالرجوع إلى الشكل السابق .

و من خلال مفهوم $d(I,(\mathcal{P}))$ نستنتج أن $\boxed{(HM)\perp(HI)}$ **(1)**

و نعلم أن $(\mathcal{P})\perp(D)$ إذن : $\boxed{(HM)\perp(D)}$ **(2)**

من النتيجتين (**1**) و (**2**) نستنتج أن : $(D)\parallel(HI)$

و بما أن : $I\epsilon(D)$ فإن (D) و (HI) منطبقان .

يعني أن : $H\epsilon(D)$.

نضع : $H(\alpha,\beta,\gamma)$

لدينا حسب التمثيل البارامتري للمستقيم (D) : $\begin{cases} x=t+2 \\ y=2t+3 \\ z=t-1 \end{cases} ; \ (t\epsilon\mathbb{R})$

نعوض x و y و z على التوالي بـ α و β و γ لأن $H\epsilon(D)$ نجد :

$$\boxed{\begin{cases} \alpha=t+2 \\ \beta=2t+3 \\ \gamma=t-1 \end{cases}} \quad (3)$$

من جهة أخرى لدينا : $H\epsilon(\mathcal{P})$ بحيث : $(\mathcal{P}) : x+2y+z-1=0$

إذن : $\boxed{\alpha+2\beta+\gamma-1=0}$ **(4)**

نعوض α و β و γ بِقِيَمِها حسب (3) في النتيجة (4) فنحصل على :

$$(t+2)+2(2t+3)+(t-1)-1=0$$

نحل هذه المعادلة الظريفة من الدرجة الأولى بمجهول واحد t نجد :

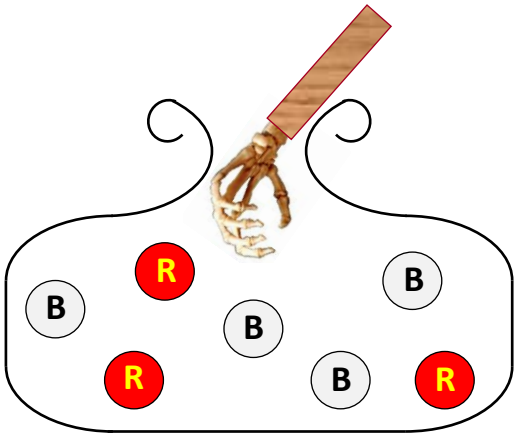
$$6t+6=0 \quad \text{أي} \quad t=-1$$

و بالعودة إلى العلاقة (3) نعوض t بقيمته (-1) نحصل على :

$$\begin{cases} \alpha=-1+2=1 \\ \beta=2(-1)+3=1 \\ \gamma=-1-1=-2 \end{cases}$$

و بالتالي : النقطة $H(1,1,-2)$ هي مركز الدائرة (Γ) .

التمرين الثالث :



عندما نسحب عشوائيا ثلاث كرات في آن واحد من صندوق يحتوي على 7 كرات فإنه توجد C_7^3 نتيجة ممكنة لهذه التجربة العشوائية .

يعني : $card(\Omega)=C_7^3=35$ بحيث : Ω هو كون الإمكانيات .

1

$$p\left(\begin{matrix}\text{ثلاث كرات}\\ \text{بيضاء}\end{matrix}\right)=\frac{card\left(\begin{matrix}\text{ثلاث كرات}\\ \text{بيضاء}\end{matrix}\right)}{card(\Omega)}=\frac{C_4^3}{card(\Omega)}=\frac{4}{35}$$

2

$$p\left(\begin{matrix}\text{الحصول على}\\ \text{ثلاث كرات من}\\ \text{نفس اللون}\end{matrix}\right)=p\left(\begin{matrix}\text{الحصول على}\\ \text{ثلاث كرات}\\ \text{حمراء}\end{matrix}\ \text{أو}\ \begin{matrix}\text{الحصول على}\\ \text{ثلاث كرات}\\ \text{بيضاء}\end{matrix}\right)$$

$$=p\left(\begin{matrix}\text{الحصول على}\\ \text{ثلاث كرات}\\ \text{حمراء}\end{matrix}\right)+p\left(\begin{matrix}\text{الحصول على}\\ \text{ثلاث كرات}\\ \text{بيضاء}\end{matrix}\right)$$

$$=\frac{card\left(\begin{matrix}\text{الحصول على}\\ \text{ثلاث كرات}\\ \text{حمراء}\end{matrix}\right)}{card(\Omega)}+\frac{card\left(\begin{matrix}\text{الحصول على}\\ \text{ثلاث كرات}\\ \text{بيضاء}\end{matrix}\right)}{card(\Omega)}$$

$$=\frac{C_3^3}{35}+\frac{C_4^3}{35}=\frac{1}{35}+\frac{4}{35}=\frac{5}{35}=\frac{1}{7}$$

3

للإجابة على هذا السؤال أقترح طريقتين :

الطريقة الأولى :

$$p\left(\begin{matrix}\text{الحصول على}\\ \text{كرة بيضاء على}\\ \text{الأقل}\end{matrix}\right)=p\left(\begin{matrix}\text{ثلاث}\\ \text{كرات}\\ \text{بيضاء}\end{matrix}\ \text{أو}\ \begin{matrix}\text{كرتين بيضاوين}\\ \text{و كرة حمراء}\\ \text{واحدة}\end{matrix}\ \text{أو}\ \begin{matrix}\text{كرة بيضاء}\\ \text{و كرتان}\\ \text{حمراوين}\end{matrix}\right)$$

$$=p\left(\begin{matrix}\text{ثلاث}\\ \text{كرات}\\ \text{بيضاء}\end{matrix}\right)+p\left(\begin{matrix}\text{كرتين بيضاوين}\\ \text{و كرة حمراء}\\ \text{واحدة}\end{matrix}\right)+p\left(\begin{matrix}\text{كرة بيضاء}\\ \text{و كرتان}\\ \text{حمراوين}\end{matrix}\right)$$

$$=\frac{C_4^1\times C_3^2}{35}+\frac{C_4^2\times C_3^1}{35}+\frac{C_4^3}{35}$$

$$=\frac{4\times 3}{35}+\frac{6\times 3}{35}+\frac{4}{35}=\frac{34}{35}$$

www.baclive.blogspot.com

الطريقة الثانية : (استعمال تقنية الحدث المضاد $p(A) = 1 - p(\bar{A})$)

لدينا : $\left(\text{الحصول على ثلاث كرات كلها حمراء}\right) = \left(\overline{\text{الحصول على كرة بيضاء على الأقل}}\right)$

لدينا : $p\left(\text{الحصول على كرة بيضاء على الأقل}\right) = 1 - p\left(\overline{\text{الحصول على كرة بيضاء على الأقل}}\right)$

$$= 1 - p\left(\text{الحصول على ثلاث كرات كلها حمراء}\right)$$

$$= 1 - \frac{C_3^3}{35} = 1 - \frac{1}{35} = \frac{34}{35}$$

التمرين الرابع :

1

نضع : $P(n) : (\forall n \epsilon \mathbb{N}) ; u_n > 1$

لنبرهن بالترجع على أن العبارة $P(n)$ صحيحة .

من أجل $n = 0$ لدينا : $u_0 = 2 > 1$

إذن العبارة $P(0)$ صحيحة .

ليكن n عنصرا من $\mathbb{N}$.

نفترض أن : $(\forall n \epsilon \mathbb{N}) ; u_n > 1$

إذن : $(\forall n \epsilon \mathbb{N}) ; 3u_n > 3$

يعني : $(\forall n \epsilon \mathbb{N}) ; 5u_n - 2u_n > 3$

يعني : $(\forall n \epsilon \mathbb{N}) ; 5u_n > 2u_n + 3$

نضرب طرفي هذه المتساوية في العدد الموجب $\left(\frac{1}{2u_n + 3}\right)$ نحصل على :

$$(\forall n \epsilon \mathbb{N}) ; \frac{5u_n}{2u_n + 3} > 1$$

و نلاحظ أن الترتيب لم يتغير لأن $u_n > 1$ حسب الافتراض السابق .

يعني : $\frac{5u_n}{2u_n + 3}$ كمية موجة قطعا .

حصلنا إذن على : $(\forall n \epsilon \mathbb{N}) ; u_{n+1} > 1$

و هذا يعني أن العبارة $P(n+1)$ صحيحة .

و خلاصة ما وجدناه نلخصه في النظمة التالية :

$$\begin{cases} P(0) \ est \ vraie \\ P(n) \implies P(n+1) \ ; \ (\forall n \epsilon \mathbb{N}) \end{cases}$$

و بالتالي حسب مبدأ الترجع : $(\forall n \epsilon \mathbb{N}) ; u_n > 1$

2 أ

ليكن n عنصرا من $\mathbb{N}$. لدينا :

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1}} = \frac{\frac{5u_n}{2u_n + 3} - 1}{\frac{5u_n}{2u_n + 3}} = \frac{3u_n - 3}{5u_n}$$

$$= \frac{3}{5}\left(\frac{u_n - 1}{u_n}\right) = \frac{3}{5} v_n$$

إذن : $(\forall n \epsilon \mathbb{N}) ; v_{n+1} = \frac{3}{5} v_n$

أي : $(v_n)_{n \epsilon \mathbb{N}}$ متتالية هندسية أساسها الكسر $\frac{3}{5}$.

إذن الحد العام للمتتالية $(v_n)_{n \epsilon \mathbb{N}}$ يكتب على الشكل :

$$v_n = v_0 \left(\frac{3}{5}\right)^{n-0} = \left(\frac{u_0 - 1}{u_0}\right)\left(\frac{3}{5}\right)^n = \left(\frac{2-1}{2}\right)\left(\frac{3}{5}\right)^n$$

و بالتالي : $(\forall n \epsilon \mathbb{N}) ; v_n = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{5}\right)^n$

2 ب

ليكن n عنصرا من $\mathbb{N}$.

لدينا : $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n}$ إذن : $\frac{1}{2}\left(\frac{3}{5}\right)^n = \frac{u_n - 1}{u_n}$

يعني : $\frac{1}{2}\left(\frac{3}{5}\right)^n u_n = u_n - 1$ يعني : $\left(\frac{1}{2}\left(\frac{3}{5}\right)^n u_n - 1\right) = u_n$

يعني : $u_n = \frac{-1}{\frac{1}{2}\left(\frac{3}{5}\right)^n - 1}$

نضرب البسط و المقام في العدد -2 نحصل على :

$$(\forall n \epsilon \mathbb{N}) ; u_n = \frac{2}{2 - \left(\frac{3}{5}\right)^n}$$

و بما أن : $\left(\frac{3}{5}\right)^n$ عبارة عن متتالية هندسية أساسها العدد الحقيقي الموجب و الأصغر من واحد $\frac{3}{5}$. فإن : $\lim_{n\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^n = 0$

و بالتالي : $\lim_{n\infty}(u_n) = \lim_{n\infty}\left(\frac{2}{2 - \left(\frac{3}{5}\right)^n}\right) = \frac{2}{2-1} = 1$

يعني : $\lim_{n\infty}(u_n) = 1$

التمرين الخامس :

1 I

ليكن x عددا حقيقيا . لدينا : $g(x) = e^{2x} - 2x$

إذن : $g'(x) = 2e^{2x} - 2 = 2(e^x - 1)$

نلاحظ أن إشارة $g'(x)$ تتعلق فقط بإشارة التعبير $(e^{2x} - 1)$.

- إذا كان $x = 0$ فإن $g'(x) =$
- إذا كان $x > 0$ فإن $g'(x) >$
- إذا كان $x < 0$ فإن $g'(x) <$

نستنتج إذن جدول تغيرات الدالة g كما يلي :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
g	$+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

نلاحظ من خلال هذا الجدول الجميل أن الدالة g تزايدية على المجال $[0;+\infty[$ و تناقصية على المجال $]-\infty;0]$.

www.baclive.blogspot.com

I 2

ليكن x عنصرا من $\mathbb{R}$. هذا يعني أن $x \geq 0$ أو $x \leq 0$.

في **الحالة الأولى** : إذا كان $x \geq 0$.

فإن : $g(x) \geq g(0)$ لأن g دالة تزايدية على $\mathbb{R}^+$.

و لدينا : $g(0) = e^{2\times 0} - 2\times 0 = 1$

إذن : $(\forall x \geq 0)\ ;\ g(x) \geq 1 > 0$

أي : $\boxed{(\forall x \geq 0)\ ;\ g(x) > 0}$ (1)

في **الحالة الثانية** : إذا كان $x \leq 0$.

فإن : $g(x) \geq g(0)$ لأن g دالة تناقصية على $\mathbb{R}^-$.

يعني : $(\forall x \leq 0)\ ;\ g(x) \geq 1 > 0$

يعني : $\boxed{(\forall x \leq 0)\ ;\ g(x) > 0}$ (2)

إذن : من النتيجتين (1) و (2) نحصل على : $(\forall x \in \mathbb{R})\ ;\ g(x) > 0$

II 1 أ

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \ln\left(\underbrace{e^{2x}}_{0^+} - \underbrace{2x}_{-\infty}\right)$$
$$= \ln(0-(-\infty)) = \ln(+\infty) = +\infty$$

II 1 ب

ليكن x عددا حقيقيا غير منعدم .

لدينا :
$$\frac{f(x)}{x} = \frac{\ln(e^{2x}-2x)}{x} = \frac{\ln(e^{x}-2x)}{(e^{x}-2x)} \times \frac{(e^{x}-2x)}{x}$$
$$= \left[\frac{\ln(e^{2x}-2x)}{(e^{2x}-2x)}\right] \times \left[\frac{e^{2x}}{x} - 2\right]$$

II 1 ج

لدينا :
$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{\ln(e^{2x}-2x)}{(e^{2x}-2x)}\right)\left(\frac{e^{2x}}{x} - 2\right)$$
$$= \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{\ln(e^{2x}-2x)}{(e^{2x}-2x)}\right) \times \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{e^{2x}}{x} - 2\right)$$
$$= \lim_{\substack{t\to+\infty \\ t=e^{2x}-2x}} \underbrace{\left(\frac{\ln t}{t}\right)}_{+\infty \to 0^+} \times \lim_{\substack{m\to-\infty \\ m=2x}} \left(2\underbrace{\left(\frac{e^{m}}{m}\right)}_{-\infty \to 0^-} - 2\right)$$
$$= 0^+ \times (0^- - 2) = 0^+ \times (-2) = 0^- = 0$$

إذن : $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$

II 1 د

حصلنا حسب السؤالين أ) و ج) على ما يلي :
$$\begin{cases} \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \\ \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = 0 \end{cases}$$

إذن : المنحنى يقبل فرعا شلجميا في اتجاه محور الأفاصيل بجوار $-\infty$.

II 2 أ

ليكن x عنصرا من $[0;+\infty[= \mathbb{R}^+$.

لدينا حسب نتيجة السؤال I) 2) : $(\forall x \in \mathbb{R}) : g(x) > 0$

إذن بالأخص : $\forall\, x \in [0;+\infty[\ ;\ g(x) > 0$

يعني : $\forall\, x \in [0;+\infty[\ ;\ e^{2x} - 2x > 0$

يعني : $\forall\, x \in [0;+\infty[\ ;\ e^{2x} > 2x$

نضرب طرفي هذه المتفاوتة في العدد الحقيقي الموجب قطعا $\frac{1}{e^{2x}}$ نجد :

$$\forall\, x \in [0;+\infty[\ ;\ 1 > \frac{2x}{e^{2x}}$$

و بالتالي : $\forall\, x \in [0;+\infty[\ ;\ 1 - \frac{2x}{e^{2x}} > 0$

من جهة ثانية لدينا :
$$f(x) = \ln(e^{2x} - 2x)$$
$$= \ln\left(e^{2x}\left(1 - \frac{2x}{e^{2x}}\right)\right)$$
$$= \ln(e^{2x}) + \ln\left(1 - \frac{2x}{e^{2x}}\right)\ ;\ avec\ \left(1 - \frac{2x}{e^{2x}}\right) > 0$$
$$= 2x + \ln\left(1 - \frac{2x}{e^{2x}}\right)\ ;\ avec\ \left(1 - \frac{2x}{e^{2x}}\right) > 0$$

و بالتالي : $\forall\, x \in [0;+\infty[\ ;\ f(x) = 2x + \ln\left(1 - \frac{2x}{e^{2x}}\right)$

II 2 ب

لدينا :
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(2x + \ln\left(1 - \frac{2x}{e^{2x}}\right)\right)$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \left(2x + \ln\left(1 - \frac{1}{\frac{e^{2x}}{2x}}\right)\right)$$
$$= 2(+\infty) + \ln\left(1 - \frac{1}{+\infty}\right)$$
$$= (+\infty) + \ln(1-0) = +\infty$$

و بالتالي : $\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$ (4)

II 2 ج

لدينا :
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left(2 + \frac{1}{x}\ln\left(1 - \frac{2x}{e^{2x}}\right)\right)$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \left(2 + \frac{1}{x}\ln\left(1 - \frac{1}{\frac{e^{2x}}{2x}}\right)\right)$$
$$= 2 + \left(\frac{1}{\infty}\right)\ln\left(1 - \frac{1}{\infty}\right)$$
$$= 2 + 0 \times \ln(1-0) = 2$$

و بالتالي : $\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 2}$ (5)

www.baclive.blogspot.com

و لدينا: $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-2x)=\lim_{x\to+\infty}\left(2x+\ln\left(1-\frac{2x}{e^{2x}}\right)-2x\right)$

$$=\lim_{x\to+\infty}\ln\left(1-\frac{1}{\frac{e^{2x}}{2x}}\right)=\ln\left(1-\frac{1}{\infty}\right)=\ln(1-0)=0$$

(6)

إذن: $\boxed{\lim_{x\to+\infty}(f(x)-2x)=0}$

من النهايات (4) و (5) و (6) نستنتج أن المستقيم ذو المعادلة : $y=2x+0$ مقارب مائل للمنحنى $(\mathscr{C})$ بجوار $+\infty$.

II 2 د

لدينا: $f(x)-2x=2x+\ln\left(1-\frac{2x}{e^{2x}}\right)-2x$

$$=\ln\left(1-\frac{2x}{e^{2x}}\right)$$

ليكن x عنصرا من المجال $[0;+\infty[$. إذن: $x\geq 0$

و منه: $(\forall x\geq 0)\ ;\ \frac{2x}{e^{2x}}\geq 0$

و ذلك لأن: $(\forall x\epsilon\mathbb{R})\ ;\ e^{2x}>0$

إذن: $(\forall x\geq 0)\ ;\ \frac{-2x}{e^{2x}}\leq 0$

يعني: $(\forall x\geq 0)\ ;\ 1-\frac{2x}{e^{2x}}\leq 1$

و نعلم حسب نتيجة السؤال II) 2) أن :

$$\forall\, x\,\epsilon\,[0;+\infty[\ ;\ 1-\frac{2x}{e^{2x}}>0$$

إذن: $\forall x\geq 0\ ;\ 0<1-\frac{2x}{e^{2x}}\leq 1$

يعني: $\forall x\geq 0\ ;\ \ln\left(1-\frac{2x}{e^{2x}}\right)\leq\ln 1$

يعني: $\forall x\geq 0\ ;\ \ln\left(1-\frac{2x}{e^{2x}}\right)\leq 0$

و بالتالي: $(\forall x\geq 0)\ ;\ f(x)-2x\leq 0$

و من هذه المتفاوتة نستنتج أن: $(\forall x\geq 0)\ ;\ f(x)\leq 2x$

يعني أن المنحنى $(\mathscr{C})$ يوجد أسفل المستقيم (D) ذو المعادلة $y=2$ على المجال $[0;+\infty[$.

II 3 أ

ليكن x عنصرا من $\mathbb{R}$.

لدينا: $f(x)=\ln(e^{2x}-2x)$

إذن: $f'(x)=\frac{(e^{2x}-2x)'}{(e^{2x}-2x)}=\frac{2e^{2x}-2}{e^{2x}-2x}=\frac{2(e^{2x}-1)}{g(x)}$

و بالتالي: $(\forall x\epsilon\mathbb{R})\ ;\ f'(x)=\frac{2(e^{2x}-1)}{g(x)}$

II 3 ب

لدينا حسب 3) أ) : $(\forall x\epsilon\mathbb{R})\ ;\ f'(x)=\frac{2(e^{2x}-1)}{g(x)}$

و نعلم حسب I) 2) أن : $(\forall x\epsilon\mathbb{R})\ ;\ g(x)>0$

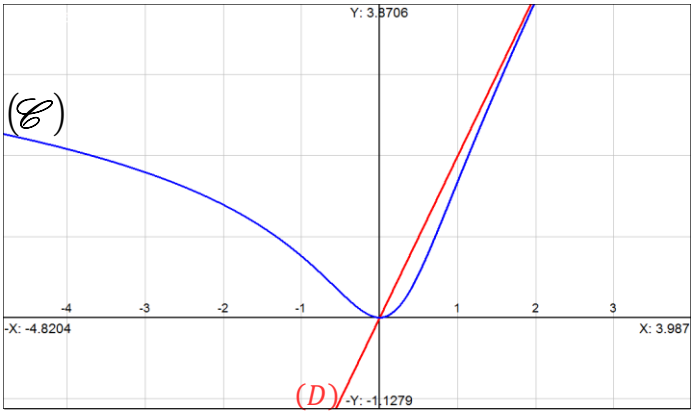
إذن إشارة $f'(x)$ تتعلق فقط بإشارة التعبير $(e^{2x}-1)$.

- إذا كان: $x=0$ فإن: $f'(x)=0$.
- إذا كان: $x>0$ فإن: $f'(x)>0$.
- إذا كان: $x<0$ فإن: $f'(x)<0$.

نستنتج إذن جدول تغيرات الدالة كما يلي :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

II 4



www.baclive.blogspot.com