

MỤC LỤC

Mở đầu	1
Chương 1 : Một số kiến thức chuẩn bị	
1.1 Ánh xạ chỉnh hình.....	3
1.2 Đa tạp phức.....	3
1.3 Giả khoảng cách Kobayashi trên không gian phức.....	6
1.4 Không gian phức hyperbolic	7
Chương 2 : Tính tự nhiên tôpô của định lý Noguchi về dãy các ánh xạ chỉnh hình giữa các không gian phức	
2.1 Mở đầu.....	19
2.2 Tổng quát tôpô các kết quả của Kiernan, Kobayashi, Kwack và Noguchi trong không gian phức.....	20
2.3 Một số đặc trưng của tính chất κ và ứng dụng.....	32
Kết luận	46
Tài liệu tham khảo	47

MỞ ĐẦU

Vào đầu những năm 70, S.Kobayashi đã đưa ra lý thuyết các không gian phức hyperbolic và trở thành một trong những hướng nghiên cứu quan trọng của giải tích phức. Trong những năm gần đây, lý thuyết này đã thu hút sự quan tâm nghiên cứu của nhiều nhà toán học trên thế giới. Bài toán thác triển các ánh xạ chỉnh hình giữa các không gian phức với các kết quả quan trọng đã gắn liền với tên tuổi các nhà toán học như Kiernan, Kobayashi, Kwack và Noguchi. Từ việc khái quát hóa định lý Picard lớn để được kết quả K^3 – định lý (định lý Kiernan, Kobayashi, Kwack), và tiếp sau là định lý thác triển hội tụ Noguchi. Sau kết quả của Noguchi, từ năm 1994 đến năm 2000, J.Joseph và M.Kwack đã chứng tỏ được tất cả các kết quả trên đều có thể chứng minh và mở rộng được bằng phương pháp thuần túy tôpô. Từ đó đã đưa ra một số đặc trưng của tính nhúng hyperbolic của các không gian phức. Các nghiên cứu này đã góp phần thúc đẩy sự phát triển của lý thuyết các không gian phức hyperbolic và mở ra những hướng nghiên cứu mới.

Trong luận văn này, chúng tôi đặt vấn đề tìm hiểu các kết quả của J.Joseph và M.Kwack theo các hướng đã nêu. Luận văn gồm có hai chương. Chương 1, chúng tôi trình bày những vấn đề cơ bản về giải tích phức nhiều biến và giải tích hyperbolic nhằm chuẩn bị cho chương sau. Bao gồm định nghĩa một số khái niệm về đa tạp phức, không gian phức hyperbolic và tính nhúng hyperbolic của các không gian phức. Tiếp theo là các kết quả của Kiernan, Kobayashi, Kwack và Noguchi về thác triển ánh xạ chỉnh hình giữa các không gian phức. Chương 2 là nội dung chính của luận văn. Trong chương này chúng tôi trình bày một số đặc trưng của tính chất κ , các chứng minh và tổng quát các kết quả của Kiernan, Kobayashi, Kwack và Noguchi.

Các kết quả trình bày trong chương 2 đã được J .Joseph và M .Kwack trình bày trong [4]. Tuy nhiên trong luận văn chúng tôi đã cố gắng trình bày một cách tương đối chi tiết các chứng minh của các định lý và trình bày các vấn đề theo cách hiểu của mình . Ngoài ra chúng tôi còn chứng minh được một số ví dụ mà J .Joseph và M .Kwack đã đưa ra nhằm làm rõ hơn các vấn đề đã được trình bày trong luận văn .

Luận văn được hoàn thành dưới sự hướng dẫn tận tình của PGS.TS Phạm Việt Đức. Em xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới Thầy. Nhân dịp này em cũng xin được bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới các Thầy , Cô đã giảng dạy cho em các kiến thức khoa học trong suốt quá trình học tập tại trường. Xin chân thành cảm ơn Trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên đã tạo điều kiện thuận lợi cho việc học tập của tôi. Cuối cùng tôi xin cảm ơn gia đình, người thân và bạn bè đã động viên giúp đỡ tôi trong suốt quá trình khoá học và hoàn thành luận văn này .

Thái Nguyên, tháng 08 năm 2010

Tác giả

CHƯƠNG 1

MỘT SỐ KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

1.1 Ánh xạ chỉnh hình

1.1.1 Định nghĩa

Cho X là tập mở trong \mathbb{C}^n và $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ là một hàm tùy ý.

(1) Hàm f được gọi là khả vi phức tại $x_0 \in X$ nếu tồn tại ánh xạ tuyến tính $\lambda : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ sao cho :

$$\lim_{|h| \rightarrow 0} \frac{|f(x_0 + h) - f(x_0) - \lambda(h)|}{|h|} = 0$$

trong đó $h = (h_1, h_2, \dots, h_n) \in \mathbb{C}^n$ và $|h| = \sqrt{|h_1|^2 + |h_2|^2 + \dots + |h_n|^2}$

(2) Hàm f gọi là chỉnh hình tại $x_0 \in X$ nếu f là khả vi phức trong một lân cận nào đó của x_0 và được gọi là chỉnh hình trên X nếu f chỉnh hình tại mọi điểm thuộc X .

(3) Cho X là tập mở trong \mathbb{C}^n . Khi đó ánh xạ $f : X \rightarrow \mathbb{C}^m$ có thể được biểu diễn dưới dạng $f = (f_1, f_2, \dots, f_m)$ trong đó $f_i = \pi_i \circ f : X \rightarrow \mathbb{C}$; f được gọi là chỉnh hình trên X nếu f_i chỉnh hình trên X với mọi $i = 1, 2, \dots, m$.

1.1.2 Định nghĩa

Cho X là tập mở trong \mathbb{C}^n , hàm $f : X \rightarrow f(X) \subset \mathbb{C}^m$ là song chỉnh hình nếu f là song ánh chỉnh hình và f^{-1} cũng là ánh xạ chỉnh hình.

1.2 Đa tạp phức

1.2.1 Định nghĩa và ví dụ

1.2.1.1 Định nghĩa

Cho X là một không gian tôpô Hausdorff

(1) Cặp (U, φ) được gọi là một bản đồ địa phương của X ở đó U

là một tập mở trong X , $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ nếu các điều kiện sau được thỏa mãn :

(i) $\varphi(U)$ là một tập mở trong \mathbb{R}^n .

(ii) $\varphi: U \rightarrow \varphi(U)$ là một đồng phôi.

(2) Họ $A = \{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$ các bản đồ địa phương của X được gọi là một tập bản đồ giải tích (atlas) của X nếu các điều kiện sau được thỏa mãn:

(i) $\{U_i\}_{i \in I}$ là một phủ mở của X .

(ii) Với mọi U_i, U_j mà $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ thì ánh xạ

$$\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}: \varphi_i(U_i \cap U_j) \rightarrow \varphi_j(U_i \cap U_j)$$

là ánh xạ chỉnh hình.

Xét họ các atlas trên X . Hai atlas A_1, A_2 được gọi là tương đương nếu hợp $A_1 \cup A_2$ là một atlas. Đây là một quan hệ tương đương trên tập các atlas. Mỗi lớp tương đương xác định một cấu trúc khả vi phức trên X , và X cùng với cấu trúc khả vi phức trên nó được gọi là một đa tạp phức n chiều.

1.2.1.2 Ví dụ

(1) Giả sử D là một miền trong \mathbb{R}^n , khi đó D là một đa tạp phức n chiều với bản đồ địa phương $\{(D, Id_D)\}$.

(2) Đa tạp xạ ảnh $P^n(\mathbb{C})$.

Xét $U_i = \{[z_0 : z_1 : \dots : z_n] \in P^n(\mathbb{C}) \mid z_i \neq 0\}$ với $i = 0, 1, 2, \dots, n$. Rõ ràng $\{U_i\}_{i=1}^n$ là một phủ mở của $P^n(\mathbb{C})$.

Xét các đồng phôi $\varphi_i: U_i \rightarrow \mathbb{C}^n$

$$[z_0 : z_1 : \dots : z_n] \mapsto \left(\frac{z_0}{z_i}, \dots, \frac{z_{i-1}}{z_i}, \frac{z_{i+1}}{z_i}, \dots, \frac{z_n}{z_i} \right)$$

Ta có :

$$\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : (z_0, \dots, z_{i-1}, z_{i+1}, \dots, z_n) \mapsto \left(\frac{z_k}{z_j} \right)_{\substack{k=0, \dots, n \\ k \neq j}},$$

ở đó $z_i = 1$ là ánh xạ chỉnh hình. Vậy $P^n(\square)$ là một đa tạp phức n chiều.

1.2.2 Ánh xạ chỉnh hình giữa các đa tạp phức

(1) Cho M, N là hai đa tạp phức. Ánh xạ liên tục $f : M \rightarrow N$ gọi là chỉnh hình trên M nếu với mọi bản đồ địa phương (U, φ) của M và bản đồ địa phương (V, ψ) của N sao cho $f(U) \subset V$ thì ánh xạ

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \rightarrow \psi(V)$$

là chỉnh hình.

Ta ký hiệu $H(M, N)$ là tập các ánh xạ chỉnh hình từ đa tạp phức M đến đa tạp phức N .

(2) Cho M, N là hai đa tạp phức và $f : M \rightarrow N$ là một song ánh. Nếu f, f^{-1} là các ánh xạ chỉnh hình thì f được gọi là ánh xạ song chỉnh hình giữa M và N .

1.2.3 Định nghĩa

(1) Cho M là đa tạp phức, một không gian con phức đóng X là một tập con đóng của M mà về mặt địa phương nó có thể xác định là không điểm của một số hữu hạn các hàm chỉnh hình, nghĩa là với $x_0 \in X$ tồn tại một lân cận mở V của x_0 trong M và một số hữu hạn các hàm chỉnh hình $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ trên V sao cho $X \cap V$ là tập các điểm $x \in X$ thỏa mãn :

$$\varphi_1(x) = \varphi_2(x) = \dots = \varphi_n(x) = 0.$$

(2) Cho M là đa tạp phức, không gian con phức đóng A của M được gọi là một divisor trên M nếu về mặt địa phương thì nó là không điểm của một hàm chỉnh hình, nghĩa là với mỗi $x \in A$ có lân cận V của x trong M sao cho $A \cap V$ là tập các không điểm của hàm f chỉnh hình trên V .

Khi $\dim M = m$ thì divisor A được gọi là có giao chuẩn tắc nếu về mặt địa phương thì :

$$M - A = (D^*)^r \times D^s, \text{ với } r + s = m,$$

trong đó D là đĩa đơn vị trong \square .

1.3 Giả khoảng cách Kobayashi trên không gian phức

1.3.1 Khoảng cách Bergman – Poincaré trên đĩa đơn vị

Giả sử $D = \{z \in \square, |z| < 1\}$ là đĩa đơn vị mở trong \square .

Xét ánh xạ $\rho_D : D \times D \rightarrow \square^+$ xác định bởi $\rho_D(a, b) = \ln \frac{1 + \left| \frac{a-b}{1-\bar{b}a} \right|}{1 - \left| \frac{a-b}{1-\bar{b}a} \right|}, \forall a, b \in D$.

Ta có ρ_D là một khoảng cách trên D và gọi nó là khoảng cách Bergman – Poincaré trên đĩa đơn vị.

1.3.2 Giả khoảng cách Kobayashi trên không gian phức

1.3.2.1 Định nghĩa

Giả sử X là một không gian phức, x và y là hai điểm tùy ý của X . $H(D, X)$ là tập tất cả các ánh xạ chỉnh hình từ đĩa đơn vị D vào không gian phức X được trang bị tôpô compact mở.

Xét dãy các điểm $p_0 = x, p_1, \dots, p_k = y$ của X , dãy các điểm a_1, a_2, \dots, a_k của D và dãy các ánh xạ f_1, f_2, \dots, f_k trong $H(D, X)$ thỏa mãn

$$f_i(0) = p_{i-1}, f_i(a_i) = p_i, \forall i = 1, 2, \dots, k.$$

Ta gọi một dây chuyền chỉnh hình γ nối x với y là tập hợp :

$$\gamma = \{p_0, \dots, p_k, a_1, \dots, a_k, f_1, \dots, f_k\}$$

thỏa mãn các điều kiện trên.

Ta đặt : $L_\gamma = \sum_{i=1}^n \rho_D(0; a_i)$ và định nghĩa $d_X(x, y) = \inf L_\gamma$

trong đó infimum lấy theo tất cả các dây chuyền chỉnh hình γ nối x với y . Để thấy d_X thỏa mãn các tiên đề về giả khoảng cách, tức là :

$$i) d_X(x, y) \geq 0, \forall x, y \in X.$$

$$ii) d_X(x, y) = d_X(y, x), \forall x, y \in X.$$

$$iii) d_X(x, z) \leq d_X(x, y) + d_X(y, z), \forall x, y, z \in X.$$

Nói cách khác d_X là một giả khoảng cách trên X . Giả khoảng cách d_X được gọi là giả khoảng cách Kobayashi trên không gian phức X .

1.3.2.2 Tính chất

Ta có thể dễ dàng chứng minh các tính chất sau của d_X :

$$i) d_D = \rho_D \text{ và } d_{D^n}((z_i), (w_j)) = \max_{j=1, n} \rho(z_i, w_j) \text{ với mọi } (z_i), (w_j) \in D^n.$$

ii) Nếu $f : X \rightarrow Y$ là ánh xạ chỉnh hình giữa các không gian phức X, Y thì

$$d_X(p, q) \geq d_Y(f(p), f(q)), \forall p, q \in X.$$

Từ đó suy ra rằng nếu $f : X \rightarrow Y$ là song chỉnh hình thì

$$d_X(p, q) = d_Y(f(p), f(q)), \forall p, q \in X.$$

iii) Đối với một không gian phức X tùy ý, hàm khoảng cách d_X là liên tục trên $X \times X$.

iv) Nếu X, Y là các không gian phức thì với mọi $x_1, x_2 \in X; y_1, y_2 \in Y$ ta có

$$\max\{d_X(x_1, x_2), d_Y(y_1, y_2)\} = d_{X \times Y}((x_1, y_1), (x_2, y_2)).$$

1.4 Không gian phức hyperbolic

1.4.1 Không gian phức hyperbolic

1.4.1.1 Định nghĩa

Không gian phức X được gọi là không gian hyperbolic nếu giả khoảng cách Kobayashi d_X là khoảng cách trên X , nghĩa là:

$$d_x(p, q) = 0 \Leftrightarrow p = q, \forall p, q \in X$$

1.4.1.2 Ví dụ

(a) D là hyperbolic vì $d_D = \rho_D$ mà ρ_D là khoảng cách trên D nên d_D cũng là khoảng cách trên D .

(b) \square^n không là hyperbolic. Thật vậy, giả sử d_{\square^n} là giả khoảng cách Kobayashi trên \square^n , ta sẽ chỉ ra rằng $d_{\square^n} = 0$ và do đó d_{\square^n} không là khoảng cách trên \square^n .

Với $x, y \in \square^n$ và $\forall p \in D (p \neq 0)$, xét ánh xạ :

$$f : D \rightarrow \square^n$$

$$z \mapsto x + \frac{y-x}{p} z$$

Khi đó f là ánh xạ chỉnh hình, $f(0) = x$ và $f(p) = y$. Do f làm giảm khoảng cách đối với d_D và d_{\square^n} nên ta có:

$$d_D(0; p) \geq d_{\square^n}(f(0); f(p))$$

$$\Rightarrow d_{\square^n}(x, y) \leq \rho_D(0; p).$$

Cho p dần tới 0 ta có $d_{\square^n}(x, y) = 0$. Vậy \square^n không là đa tạp hyperbolic.

1.4.1.3 Tính chất

i) Nếu X, Y là không gian phức, thì $X \times Y$ là không gian hyperbolic khi và chỉ khi cả X và Y đều là các không gian hyperbolic.

ii) Giả sử X là không gian phức, Y là không gian hyperbolic và $f : X \rightarrow Y$ là ánh xạ chỉnh hình và là đơn ánh thì X cũng là không gian hyperbolic. Đặc biệt, nếu X là không gian con phức của không gian hyperbolic Y thì X cũng là hyperbolic.

Chứng minh

Với mọi $x, x' \in X, x \neq x'$ ta có :

$$d_X(x, x') \geq d_Y(f(x), f(x')).$$

Mặt khác do f đơn ánh nên $f(x) \neq f(x')$ và do Y là không gian hyperbolic nên ta có :

$$d_Y(f(x), f(x')) > 0$$

$$\Rightarrow d_X(x, x') > 0$$

$\Rightarrow X$ là không gian hyperbolic.

iii) Định lý Barth (xem [8])

Giả sử X là không gian phức liên thông. Nếu X là hyperbolic thì d_X sinh ra tô pô tự nhiên của X .

1.4.1.4 Mệnh đề (Bổ đề Eastwood)

Giả sử $\pi: X \rightarrow Y$ là ánh xạ chỉnh hình giữa các không gian phức. Giả sử Y là hyperbolic và với mỗi điểm $y \in Y$ có lân cận U của y sao cho $\pi^{-1}(U)$ là hyperbolic thì X là hyperbolic.

1.4.2. Không gian phức hyperbolic đầy

1.4.2.1 Định nghĩa

Không gian phức X được gọi là hyperbolic đầy nếu X là hyperbolic và mọi dãy Cauchy với khoảng cách d_X đều hội tụ.

1.4.2.2 Mệnh đề

Giả sử X là không gian hyperbolic liên thông. Khi đó X là hyperbolic đầy nếu và chỉ nếu với mọi $x \in X$ và $r > 0$ mọi hình cầu đóng $\overline{B}(x, r)$ là compact.

1.4.2.3 Mệnh đề

(a) *Các đĩa và đa đĩa là hyperbolic đầy.*

(b) Tích hữu hạn các không gian hyperbolic đầy là hyperbolic đầy.

(c) Một không gian con đóng của không gian hyperbolic đầy là hyperbolic đầy.

(d) Giả sử $\pi: X \rightarrow Y$ là ánh xạ chỉnh hình giữa các không gian phức. Giả sử Y là hyperbolic đầy và với mỗi $y \in Y$, tồn tại một lân cận U sao cho $\pi^{-1}(U)$ là hyperbolic. Khi đó X là hyperbolic đầy.

(e) Giả sử $\pi: X' \rightarrow X$ là ánh xạ phủ chỉnh hình. Khi đó X là hyperbolic đầy nếu và chỉ nếu X' là hyperbolic đầy.

1.4.3 Không gian phức nhúng hyperbolic

1.4.3.1 Định nghĩa

Giả sử X là không gian con phức của không gian phức Y . Khi đó ta nói X là nhúng hyperbolic trong Y nếu với mọi $x, y \in \overline{X} \subset Y$, tồn tại các lân cận mở U của x và V của y trong Y sao cho

$$d_X(X \cap U, X \cap V) > 0,$$

trong đó d_X là khoảng cách Kobayashi trên X .

1.4.3.2 Nhận xét

i) Không gian phức X là hyperbolic khi và chỉ khi X là nhúng hyperbolic trong chính nó.

ii) Nếu X_1 là nhúng hyperbolic trong Y_1 và X_2 là nhúng hyperbolic trong Y_2 thì $X_1 \times X_2$ là nhúng hyperbolic trong $Y_1 \times Y_2$.

iii) Nếu có hàm khoảng cách ρ trên \overline{X} thỏa mãn

$$d_X(x, y) \geq \rho(x, y), \forall x, y \in \overline{X}$$

thì X là nhúng hyperbolic trong Y .

1.4.3.3 Định lý

Giả sử X là không gian con phức của không gian phức Y . Khi đó các điều kiện sau là tương đương:

HI1. X là nhúng hyperbolic trong Y .

HI2. X là hyperbolic và nếu $\{x_n\}, \{y_n\}$ là các dãy trong X thỏa mãn

$$x_n \rightarrow x \in \partial X, y_n \rightarrow y \in \partial X, d_X(x_n, y_n) \rightarrow 0$$

thì $x = y$.

HI3. Giả sử $\{x_n\}, \{y_n\}$ là các dãy trong X thỏa mãn

$$x_n \rightarrow x \in \overline{X}, y_n \rightarrow y \in \overline{X}$$

Khi đó nếu $d_X(x_n, y_n) \rightarrow 0$ khi $n \rightarrow \infty$ thì $x = y$.

HI4. Giả sử H là hàm độ dài trên Y . Khi đó tồn tại các hàm liên tục dương φ trên Y sao cho:

$$f^*(\varphi H) \leq H_D, \forall f \in H(D, X)$$

trong đó H_Δ là chuẩn hyperbolic trên đĩa đơn vị D .

HI5. Tồn tại hàm độ dài H trên Y sao cho với mọi $f \in H(D, X)$ ta có

$$f^* H \leq H_D.$$

1.4.3.4 Định lý Kiernan

Giả sử X là không gian con phức, compact tương đối trong không gian phức Y .

Khi đó X là nhúng hyperbolic trong Y nếu và chỉ nếu $H(D, X)$ là compact tương đối trong $H(D, Y)$.

1.4.4 Các định lý về thác triển chỉnh hình giữa các không gian phức

1.4.4.1 Định lý

Nếu X là không gian con phức, compact tương đối và nhúng hyperbolic trong không gian phức Y thì mọi $f \in H(D^*, X)$ có thác triển $\tilde{f} \in H(D, Y)$.

1.4.4.2 Định lý Noguchi trên D

Cho X là không gian con phức, compact tương đối và nhúng hyperbolic

trong không gian phức Y . Cho $f \in H(D^*, X)$ và $\{f_n\}$ là dãy trong $H(D^*, X)$.

Khi đó nếu $f_n \rightarrow f$ thì $\tilde{f}_n \rightarrow \tilde{f}$.

1.4.4.3 Định lý K^3

Cho X là không gian con phức, compact tương đối và nhúng hyperbolic trong không gian phức Y . Cho M là đa tạp phức và A là divisor trên M có giao chuẩn tắc, thế thì mỗi $f \in H(M - A, X)$ đều có thác triển $\tilde{f} \in H(M, Y)$.

Chứng minh

Trước hết ta nhận thấy rằng nếu $\{f_n\}$ là dãy trong $H(D^*, X)$, $\{z_k\}$ và $\{z'_k\}$ là các dãy trong D^* hội tụ đến 0 và $f_k(z_k) \rightarrow y \in Y$ thì $f_k(z'_k) \rightarrow y$ và hơn nữa ta có $\tilde{f}_k(0) \rightarrow y$.

Theo giả thiết ta có thể giả sử rằng :

$$M = D^m \text{ và } M - A = (D^*)^r \times D^s, \text{ với } r + s = m.$$

ta chứng minh định lý theo 3 bước :

1) Nếu $M - A = D^*$ thì từ định lý 1.4.4.1 ta có điều phải chứng minh.

2) Giả sử có thác triển f khi $M - A = D^{*n}$ với n nào đó ta sẽ chỉ ra rằng f có thác triển nếu $M - A = D^{*n} \times D^s$ với mọi s .

Giả sử $(\omega, t) = (\omega_1, \dots, \omega_n, t_1, \dots, t_s) \in D^n \times D^s$ và $f : D^{*n} \times D^s \rightarrow X$ là ánh xạ chỉnh hình. Với mỗi t ta đặt $f_t(\omega) = f(\omega, t)$, theo giả thiết f_t có thác triển thành ánh xạ chỉnh hình trên D^n . Ta còn phải chứng minh ánh xạ $f : (\omega, t) \mapsto f(\omega, t)$ là ánh xạ liên tục.

Giả sử f không liên tục tại $(\omega, 0) \Rightarrow \exists$ dãy $\{(\omega^k, t^k)\}$ trong $D^{*r} \times D^s$ hội tụ đến $(\omega, 0)$ nhưng $f(\omega^k, t^k) \rightarrow y \neq f(\omega, 0)$.

Xác định $f_k : D^* \rightarrow X$ bởi $f_k(z) = (\omega^k, z)$.

Từ $t^k \rightarrow 0$ và $f_k(t^k) = f(\omega^k, t^k) \rightarrow y$ nên theo (*) ta có $f_k(0) = f(\omega^k, 0) \rightarrow y$. Mặt khác f_t liên tục với mỗi t do đó $f(\omega^t, 0) \rightarrow f(\omega, 0)$. Điều này mâu thuẫn vì $f(\omega, 0) \neq y$. Vậy 2) được chứng minh.

3) Giả sử f có thác triển nếu $M - A = D^{*n} \times D^s$ với mọi s . Ta sẽ chứng minh f có thác triển nếu $M - A = D^{*n+1}$.

Xét ánh xạ chỉnh hình $f : D^{*n+1} \rightarrow X$ và đặt $g : D^* \rightarrow X$ xác định bởi $g(z) = f(z, z, \dots, z)$. Vậy g chỉnh hình trên D^* và theo định lý 1.4.4.1 thì g có thác triển $\tilde{g} \in H(D, Y)$. Đặt $f(0, 0, \dots, 0) = g(0)$, như vậy ta còn phải chứng minh f là liên tục.

Giả sử f không liên tục, tồn tại dãy $(\omega^k, t^k) = (\omega_1^k, \omega_2^k, \dots, \omega_n^k, t^k)$ trong D^{*n+1} sao cho :

$$\begin{cases} (\omega^k, t^k) \rightarrow 0 \\ f(\omega^k, t^k) \rightarrow y \neq f(0, 0, \dots, 0) \end{cases}$$

Theo (*) thì với $f_k(z) = f\left(\frac{z\omega^k}{|\omega^k|}, t^k\right)$ và $\{z_k\} = \{|\omega^k|\}$ ta có :

$$f(0, t^k) = f_k(0) \rightarrow y.$$

Với $f_k(z) = f\left(\frac{zt^k}{|t^k|}, \frac{zt^k}{|t^k|}, \dots, \frac{zt^k}{|t^k|}, t^k\right)$ và $\{z_k\} = \{|t^k|\}$ ta có :

$$f(0, t^k) = f_k(0) \rightarrow f(0, 0, \dots, 0)$$

Điều này mâu thuẫn vì $f(0, 0, \dots, 0) \neq y$. Vậy 3) được chứng minh và từ đó định lý được chứng minh.

Dựa vào kết quả của K^3 – định lý, các định lý của Lelong và Wirtinger trong lý thuyết độ đo, năm 1985, Noguchi đã chứng minh định lý thác triển hội tụ sau :

1.4.4.4 Định lý Noguchi

Cho X là không gian con phức compact tương đối và nhúng hyperbolic trong không gian phức Y . Cho M là đa tạp phức và A là divisor trên M có giao chuẩn tắc. Giả sử

$$f_n : M - A \rightarrow X$$

là dãy các ánh xạ chỉnh hình, hội tụ đều trên các tập con compact của $M - A$ tới ánh xạ chỉnh hình

$$f : M - A \rightarrow X$$

Giả sử \tilde{f}_n, \tilde{f} là các thác triển chỉnh hình của f_n, f tương ứng từ M vào Y .

Khi đó $\tilde{f}_n \rightarrow \tilde{f}$ trong $H(M, Y)$.

Để chứng minh định lý 1.4.4.4 ta cần một số khái niệm và kết quả sau

1.4.4.5 Định nghĩa

Giả sử X, Y là các không gian phức. Ký hiệu $C(X, Y)$ là họ các ánh xạ liên tục từ X vào Y . Họ $f \subseteq H(X, Y)$ được gọi là họ chuẩn tắc đều nếu $f \circ H(M, X)$ là compact tương đối trong $C(M, Y^+)$, với mỗi đa tạp phức M , trong đó $Y^+ = Y \cup \{\infty\}$ là compact hóa 1 điểm của Y .

Nếu X_0, Y_0 là các không gian con của không gian tôpô X, Y tương ứng và $f \in C(X_0, Y_0)$. Ta ký hiệu $C[X, Y, f]$ là tập các ánh xạ $g \in C(X, Y)$ mà là các thác triển của các phần tử của f .

1.4.4.6 Định lý

Nếu X, Y là các không gian phức thì họ $f \in H(X, Y)$ là chuẩn tắc đều nếu và chỉ nếu $f \circ H(M, X)$ là compact tương đối trong $C(D, Y^+)$.

1.4.4.7 Định lý

Giả sử X là không gian con phức compact tương đối trong không gian

phức Y . Khi đó các điều kiện sau là tương đương :

- i) X là nhúng hyperbolic trong Y ;
- ii) $H(D, X)$ là compact tương đối trong $C(D, Y^+)$;
- iii) $H(D, X)$ là họ con chuẩn tắc đều của $H(D, Y)$.

1.4.4.8 Bổ đề

Giả sử $f \in H(D^{*m}, Y)$ là họ chuẩn tắc đều. Nếu $\{w_n\} \subset D^{*m}, \{f_n\} \subset f$ sao cho $w_n \rightarrow w_0 \in D^m$ và $f_n(w_n) \rightarrow p \in Y$ thì với mỗi lân cận U của p , tồn tại lân cận W của w_0 trong D^m sao cho

$$f_n(W \cap D^{*m}) \subset U.$$

Sử dụng các kết quả trên ta có thể mở rộng K^3 – định lý và định lý thác triển hội tụ của Noguchi như sau

1.4.4.9 Định lý

Giả sử M là đa tạp phức và A là divisor có giao chuẩn tắc trong M . Giả sử $f \in H(M - A, Y)$ là họ chuẩn tắc đều và \bar{f} là bao đóng của f trong $C(M - A, Y^+)$. Khi đó

- i) Mỗi $f \in \bar{f}$ đều thác triển được thành $\tilde{f} \in C(M, Y^+)$.
- ii) $C[M, Y^+, \bar{f}]$ là compact trong $C(M, Y^+)$
- iii) Nếu $\{f_n\} \subset \bar{f}$ và $f_n \rightarrow f$ thì $\tilde{f}_n \rightarrow \tilde{f}$.

Chứng minh

Để chứng minh i) và ii) trước hết ta chứng minh với mỗi $f \in \bar{f}$ đều thác triển được thành $\tilde{f} \in C(M, Y^+)$ và $C[M, Y^+, \bar{f}]$ là compact tương đối trong $C(M, Y^+)$.

Vì bài toán là địa phương nên ta có thể giả thiết rằng $M = D^m$ và $f \in H(D^{*m}, Y)$. Do đó ta chỉ cần chứng minh với mỗi $f \in \bar{f}$ có thác triển $\tilde{f} \in C(D^m, Y^+)$ và $C[D^m, Y^+, \bar{f}]$ là compact tương đối trong $C(D^m, Y^+)$.

Theo định lí Ascoli, ta chỉ cần chứng minh $C[D^m, Y^+, f]$ là liên tục đồng đều trong $C(D^m, Y^+)$.

Giả sử ngược lại, khi đó tồn tại $w_0 \in D^m$, các dãy $\{w_n\}, \{w'_n\}$ trong D^{*m} cùng hội tụ tới w_0 và có dãy $\{f_n\} \subset f$ mà $\tilde{f}_n(w_n) \rightarrow p$ và $\tilde{f}_n(w'_n) \rightarrow q \neq p$. Điều này mâu thuẫn với bổ đề 1.4.4.8. Vậy ta có

$$C[D^m, Y^+, f] \subseteq C(D^m, Y^+).$$

Bây giờ ta chứng minh sự tồn tại thác triển của ánh xạ f .

Giả sử $w_0 \in M, p \in Y^+$ và $\{w_n\} \subset M - A; w_n \rightarrow w_0$ và $f(w_n) \rightarrow p$. Khi đó p xác định duy nhất, do đó với w_0 và p ở trên ta định nghĩa

$$\tilde{f}(w_0) = p.$$

Rõ ràng

$$\tilde{f} = f \text{ trên } M - A,$$

vì nếu ta chọn dãy $w_n = w \in M - A$ với mọi n , thì $\tilde{f}(w) = f(w)$ với mọi $w \in M - A$.

Vậy theo định lí thác triển Riemann, để chứng minh \tilde{f} là thác triển chính hình của f ta chỉ cần chứng minh \tilde{f} là liên tục.

Nếu $\tilde{f}(w_0) = p \in Y$ và U là lân cận mở của p thì gọi V là lân cận compact tương đối của p sao cho $\bar{V} \subset U$. Theo bổ đề 1.4.4.8, tồn tại lân cận mở W của w_0 trong M sao cho $f(W - A) \subset V$. Khi đó

$$\tilde{f}(W) \subset \bar{V} \subset U.$$

Nếu $\tilde{f}(w_0) = \infty$, theo bổ đề 1.4.4.7, tồn tại lân cận mở W của w_0 trong M sao cho $f(M - A) \subset U$, tức là tồn tại lân cận mở W của w_0 trong M sao cho $\tilde{f}(W) \subset V$. Từ đó ta có \tilde{f} liên tục.

Để kết thúc chứng minh i) ta lấy $f \in \bar{f}$. Khi đó tồn tại dãy $\{f_n\}$ trong f sao cho $f_n \rightarrow f$ khi $n \rightarrow \infty$. Do $C[M, Y^+, f]$ là compact tương đối trong $C(M, Y^+)$ nên tồn tại dãy con $\{f_{n_k}\} \subset \{f_n\}$ sao cho $\tilde{f}_{n_k} \rightarrow g \in C(M, Y^+)$. Rõ ràng $g = \tilde{f}$ (vì chúng bằng nhau trên $M - A$). Vậy i) được chứng minh.

Để chứng minh ii) ta chứng minh

$$C[M, Y^+, \bar{f}] = \overline{C[M, Y^+, f]}.$$

Với $g \in \bar{f}$ ta chọn dãy $\{f_n\} \subset f$ sao cho $f_n \rightarrow g$.

Do tính compact tương đối của $C[M, Y^+, f]$ trong $C(M, Y^+)$ và sự tồn tại thác triển trong i), suy ra có dãy con $\{\tilde{f}_{n_k}\} \subset \{\tilde{f}_n\}$ sao cho $\tilde{f}_{n_k} \rightarrow \tilde{g}$, vì vậy $\tilde{g} \in \overline{C[M, Y^+, f]}$.

Do đó

$$C[M, Y^+, \bar{f}] \subset \overline{C[M, Y^+, f]}.$$

Ngược lại, với $\tilde{g} \in \overline{C[M, Y^+, f]}$, tồn tại dãy

$$\{\tilde{f}_n\} \subset C[M, Y^+, f] \text{ mà } \tilde{f}_n \rightarrow \tilde{g}.$$

Suy ra

$$f_n \rightarrow g \text{ trên } M - A \text{ với } \{f_n\} \subset f.$$

Từ đó, $g \in \bar{f}$. Vậy

$$\tilde{g} \in C[M, Y^+, \bar{f}].$$

Hay ta có

$$C[M, Y^+, \bar{f}] \supset \overline{C[M, Y^+, f]}.$$

Vậy ii) được chứng minh.

iii) Giả sử $\{f_n\} \subset \bar{f}$ và $f_n \rightarrow f$. Ta chứng minh

$$\tilde{f}_n \rightarrow \tilde{f} \text{ khi } n \rightarrow \infty.$$

Theo i) thì các \tilde{f}_n và \tilde{f} luôn tồn tại.

Theo ii), vì $\{\tilde{f}_n\} \subset C[M, Y^+, \tilde{f}^-]$ compact trong $C(M, Y^+)$, nên mọi dãy con $\{\tilde{f}_{n_k}\}$ của $\{\tilde{f}_n\}$ đều có dãy con hội tụ tới \tilde{f} . Do đó

$$\tilde{f}_n \rightarrow \tilde{f} \text{ khi } n \rightarrow \infty.$$

Vậy iii) được chứng minh.

1.4.4.10 Nhận xét

Theo hệ quả 3 và hệ quả 7 (xem [3]) khẳng định rằng :

Nếu X là không gian con phức, nhúng hyperbolic trong không gian phức Y và A là divisor có giao chuẩn tắc trong đa tạp phức M thì mỗi $f \in H(M - A, X)$ đều thác triển được thành $\tilde{f} \in C(M, Y^+)$ và nếu X là compact tương đối trong Y thì $\tilde{f} \in H(M, Y)$.

Từ đó theo định lý 1.4.4.7 và định lý 1.4.4.9 ta suy ra kết quả của định lý Noguchi 1.4.4.4.

1.4.4.11 Định lý

Các phát biểu dưới đây là tương đương, với X là không gian con phức trong không gian phức Y .

i) X là nhúng hyperbolic trong Y .

ii) Nếu $\{f_n\}, \{z_n\}$ là các dãy theo thứ tự trong $H(D^*, X)$ và D^* thỏa mãn $z_n \rightarrow 0, f_n(z_n) \rightarrow p$ thì $f_n(z'_n) \rightarrow p$, với mọi dãy $\{z'_n\}$ trong D^* và $z'_n \rightarrow 0$.

iii) Với M là đa tạp phức và A là divisor có giao chuẩn tắc trong M , nếu $\{f_n\}$ và $\{z_n\}$ tương ứng là các dãy trong $H(M - A, X)$ và $M - A$ thỏa mãn $z_n \rightarrow z \in M$, thì $f_n(z'_n) \rightarrow p$, với mọi dãy $\{z'_n\}$ của $M - A$ thỏa mãn $z'_n \rightarrow z$.

CHƯƠNG 2

TÍNH TỰ NHIÊN TÔPÔ CỦA ĐỊNH LÝ NOGUCHI VỀ DÃY CÁC ÁNH XẠ CHÍNH HÌNH GIỮA CÁC KHÔNG GIAN PHỨC

2.1 Mở đầu

Nếu X, Y là các không gian tôpô, ta ký hiệu $F(X, Y)$ là tập hợp các hàm từ X tới Y . Dựa vào các tính chất (i) và (ii) của định lý 1.4.4.11 J. Joseph và M. Kwack đã đưa ra khái niệm sau:

Tính chất κ : Giả sử X và Y là các không gian tôpô và $X_0 \subset X$ là trù mật. Ta nói $\Omega \subset F(X_0, Y)$ thỏa mãn tính chất κ đối với (X_0, X, Y) nếu mỗi $x \in X, y \in Y$ và lưới $\{(f_\alpha, x_\alpha, v_\alpha)\}$ trong $\Omega \times X_0 \times X_0$ thỏa mãn $x_\alpha \rightarrow x, v_\alpha \rightarrow x$ và $f_\alpha(x_\alpha) \rightarrow y$, ta có $f_\alpha(v_\alpha) \rightarrow y$.

Mục đích chính của chúng tôi là sử dụng tính chất κ để mở rộng và chứng minh lại các định lý của Kwack, Kobayashi, Kiernan và Noguchi (Định lý 1.4.4.1, 1.4.4.2, 1.4.4.3, 1.4.4.4) bằng phương pháp tôpô thuần túy. Đồng thời đưa ra một số đặc trưng của tính chất κ và ứng dụng cho nghiên cứu tính nhúng hyperbolic của các không gian phức. Trước hết, ta nhắc lại một số khái niệm sau :

+ Một không gian được gọi là k - không gian nếu một tập con C của không gian là đóng khi $C \cap K$ là đóng trong K cho mỗi tập con compact K của không gian.

+ Mọi không gian tôpô đều được giả thiết là không gian Hausdorff và Y sẽ luôn là không gian compact địa phương, X là k - không gian.

2.2 Tổng quát tôpô các kết quả của Kiernan, Kobayashi, Kwack và Noguchi trong không gian phức

2.2.1 Định nghĩa

Nếu X và Y là các không gian tôpô tùy ý, ta nói rằng $\Omega \subset F(X, Y)$ là liên tục đồng đều (*evenly continuous*) từ $A \subset X$ tới $B \subset Y$ nếu với mỗi $a \in A$, $b \in B$ và $U \in \Sigma(b)$ trong B có $W \in \Sigma(b)$ trong B và $V \in \Sigma(a)$ trong A sao cho:

$$f \in \Omega \text{ và } f(a) \in W \Rightarrow f(V) \subset U.$$

Nếu $\Omega \subset F(X, Y)$ là liên tục đồng đều từ X tới Y , ta nói gọn rằng Ω là liên tục đồng đều.

2.2.2 Mệnh đề (xem [4])

Cho X là không gian chính quy, compact địa phương và Y là không gian chính quy. Khi đó $\Omega \subset C(X, Y)$ là compact tương đối trong $C(X, Y)$ nếu và chỉ nếu :

a) Ω là một tập con liên tục đồng đều của $C(X, Y)$.

b) $\Omega(x) = \{f(x) \in Y | f \in \Omega\}$ là compact tương đối trong Y với mỗi $x \in X$.

Sau đây ta chứng minh mệnh đề thiết lập đặc trưng của họ liên tục đồng đều $\Omega \subset C(X, Y)$.

2.2.3 Mệnh đề

Cho X là một không gian và $X_0 \subset X$ là trù mật trong X . Khi đó $\Omega \subset C(X, Y)$ là liên tục đồng đều nếu và chỉ nếu Ω là liên tục đồng đều từ $X_0 \cup \{v\}$ tới Y với mỗi $v \in X$.

Chứng minh :

\Rightarrow) Giả sử $\Omega \subset C(X, Y)$ là liên tục đồng đều.

Lấy $v \in X, a \in X_0 \cup \{v\}, b \in Y$ và $U \in \Sigma(b)$ trong Y . Do $\Omega \subset C(X, Y)$ là liên tục đồng đều nên có $W \in \Sigma(b), O \in \Sigma(a)$ sao cho :

$$\{f \in \Omega: f(a) \in W\} \subset \{f \in \Omega: f(O) \subset U\}$$

Đặt $V = O \cap (X_0 \cup \{v\})$ thế thì $a \in V$ và V là tập con mở của $X_0 \cup \{v\}$ và $f(V) \subset f(O) \subset U$, vậy

$$\{f \in \Omega: f(a) \in W\} \subset \{f \in \Omega: f(O) \subset U\} \subset \{f \in \Omega: f(V) \subset U\}.$$

Vậy Ω là liên tục đồng đều từ $X_0 \cup \{v\}$ đến Y .

\Leftrightarrow Giả sử $x \in X, y \in Y$ và $U \in \Sigma(y)$. Theo giả thiết thì Ω liên tục đồng đều từ $X_0 \cup \{v\}$ tới Y nên ta có thể chọn $A \in \Sigma(x); B, W \in \Sigma(y)$ sao cho:

$$\bar{W} \subset U \text{ và } \forall f \in \Omega \text{ mà } f(x) \in B \Rightarrow f(A \cap (X_0 \cup \{x\})) \subset W.$$

Ta cần chứng minh $\forall f \in \Omega \text{ mà } f(x) \in B \Rightarrow f(A) \subset \bar{W}$.

Lấy $f \in \Omega, z \in A$ và $H \in \Sigma(f(z))$, ta chứng minh $H \cap W = \emptyset$ (vì khi đó $f(z) \in \bar{W}$). Do $f \in C(X_0 \cup \{z\}, Y)$, ta chọn $Q \in \Sigma(z)$, sao cho :

$$f(Q \cap (X_0 \cup \{z\})) \subset H \text{ (vì tính liên tục của } f \text{ tại } z).$$

Ta có $Q \cap A \in \Sigma(z)$ nên $Q \cap A \cap X_0 \neq \emptyset$ (do X_0 trù mật trong X).

Suy ra

$$\emptyset \neq f(Q \cap A \cap X_0) \subset f(Q \cap (X_0 \cup \{z\})) \cap f(A \cap (X_0 \cup \{x\})) \subset H \cap W.$$

$$\Rightarrow f(z) \in \bar{W} \text{ mà } z \in A \Rightarrow f(A) \subset \bar{W}.$$

Mệnh đề được chứng minh.

Định lý sau thiết lập một đặc trưng nữa của tính chất κ .

2.2.4 Định lý

Cho X_0 là tập con trù mật của không gian X và $\Omega \subset F(X_0, Y)$. Các phát biểu sau đây là tương đương

(1) Ω thỏa mãn tính chất κ ứng với (X_0, X, Y) .

(2) Ω thỏa mãn hai tính chất sau :

a) Mỗi $f \in \Omega$ thác triển thành $\tilde{f} \in C(X, Y^+)$

b) $C[X, Y^+; \Omega]$ là compact tương đối trong $C(X, Y^+)$.

Chứng minh

(2) \Rightarrow (1) : Nếu (1) không xảy ra, ta có thể giả thiết $x \in X; p, q \in Y^+, p \neq q$ và một lưới $\{(f_\alpha, x_\alpha, v_\alpha)\}$ trong $\Omega \times X_0 \times X_0$ sao cho :

$$\begin{cases} x_\alpha \rightarrow x \\ v_\alpha \rightarrow x \\ f_\alpha(x_\alpha) \rightarrow p \\ f_\alpha(v_\alpha) \rightarrow q. \end{cases} \quad (*)$$

Với mỗi α , theo (a) $\Rightarrow f_\alpha$ thác triển được thành \tilde{f}_α . Theo (b) có lưới con $\{\tilde{f}_{\alpha_\mu}\}$ của $\{\tilde{f}_\alpha\}$ và $g \in C(X, Y^+)$ sao cho $\tilde{f}_{\alpha_\mu} \rightarrow g$. Do đó $\tilde{f}_{\alpha_\mu}(x) \rightarrow g(x)$.

Mặt khác theo (b) và mệnh đề 2.2.2 $\Rightarrow C[X, Y^+; \Omega]$ là liên tục đồng đều trong $C(X, Y^+)$, theo định nghĩa liên tục đồng đều với $x_{\alpha_\mu} \in X_0, x_{\alpha_\mu} \rightarrow x$ và $v_{\alpha_\mu} \in X_0, v_{\alpha_\mu} \rightarrow x$ ta có:

$$f_{\alpha_\mu}(x_{\alpha_\mu}) = \tilde{f}_{\alpha_\mu}(x_{\alpha_\mu}) \rightarrow g(x)$$

$$\text{và } f_{\alpha_\mu}(v_{\alpha_\mu}) = \tilde{f}_{\alpha_\mu}(v_{\alpha_\mu}) \rightarrow g(x).$$

Mâu thuẫn với $p \neq q \Rightarrow$ (1) được chứng minh.

(1) \Rightarrow (2) : Hiển nhiên $\Omega \subset C(X_0, Y^+)$.

Thật vậy : Với $f \in \Omega, x \in X_0$, lấy $\{x_n\} \subset X_0$ mà $x_n \rightarrow x \in X_0$; do Y^+ là compact $\Rightarrow f(x_n) \rightarrow p \in Y^+$.

Hơn nữa do Ω thỏa mãn tính chất κ nên với dãy $v_n = x$ thì $f(v_n) \rightarrow f(x) = p$, do đó $f(x)$ liên tục tại $x \Rightarrow \Omega \subset C(X_0, Y^+)$.

Để chứng minh $f \in \Omega$ thác triển thành $\tilde{f} \in C(X, Y^+)$ ta chỉ cần chứng minh rằng f thác triển thành $\tilde{f} \in C(X_0 \cup \{v\}, Y^+)$ với mỗi $v \in X - X_0$.

Theo (1), với mỗi v có điểm $p \in Y^+$ sao cho nếu $\{x_\alpha\}$ là một lưới trong X_0 và $x_\alpha \rightarrow v$ thì $f(x_\alpha) \rightarrow p$ (vì Y^+ compact $\Rightarrow \exists p$ và $f(x_\alpha) \rightarrow p$ khi $x_\alpha \rightarrow v$ do định nghĩa Ω thỏa mãn tính chất κ).

Do đó ta có thể định nghĩa $\tilde{f}(v) = p \Rightarrow \tilde{f}$ liên tục tại v . Ta có $\tilde{f} = f$ trên X_0 do vậy $\tilde{f} \in C(X_0 \cup \{v\}, Y^+)$. Như vậy (2a) được chứng minh.

Để chứng minh (2b) ta giả sử ngược lại $v \in X$ và $C[X, Y^+; \Omega]$ không liên tục đồng đều từ $X_0 \cup \{v\}$ tới Y^+ . Khi đó, tồn tại $x \in X_0 \cup \{v\}, p \in Y^+, U \in \Sigma(p)$ sao cho với mỗi cặp $(V, W) \in \Sigma(x) \times \Sigma(p)$ thỏa mãn $W \subset U$, với $f_{(V, W)} \in \Omega$ và $x_{(V, W)} \in X_0 \cup \{v\}$ thỏa mãn

$$x_{(V, W)} \in V, \tilde{f}_{(V, W)}(x) \in W, \tilde{f}_{(V, W)}(x_{(V, W)}) \in Y^+ - U \subset Y^+ - W.$$

Thứ tự của các cặp (V, W) được định nghĩa như sau :

$$(V_1, W_1) \leq (V_2, W_2) \Leftrightarrow V_2 \subset V_1 \text{ và } W_2 \subset W_1$$

Với mỗi cặp (V, W) , ánh xạ $\tilde{f}_{(V, W)}$ là liên tục và $\tilde{f}_{(V, W)}(x) \in W$ nên tồn tại

$H \in \Sigma(x)$ sao cho $H \subset V$ và $\tilde{f}_{(V, W)}(H) \subset W$. Chọn H như trên và

$y_{(V, W)} \in H \cap X_0$, khi đó $\{y_{(V, W)}\}$ là một lưới trong X_0 .

Nếu $B \in \Sigma(p)$ với $B \subset U$ và $A \in \Sigma(x)$ ta có $x_{(V, W)}, y_{(V, W)} \in A$ và $f_{(V, W)}(y_{(V, W)}) \in B$ với mỗi $(V, W) \geq (A, B)$.

Do đó $y_{(V, W)} \rightarrow x, x_{(V, W)} \rightarrow x$ và $f_{(V, W)}(y_{(V, W)}) \rightarrow p$.

Ta có với mỗi cặp (V, W) thì $x_{(V, W)} \neq x$. Từ đó $x_{(V, W)} \neq v$ (vì $\tilde{f}_{(V, W)}(x) \in W$ nhưng $\tilde{f}_{(V, W)}(x) \in W$ nhưng $\tilde{f}_{(V, W)}(x_{(V, W)}) \in Y^+ - W$ do đó $\notin W$). Nhưng do Y^+ compact nên ta luôn có thể giả thiết rằng $\tilde{f}_{(V, W)}(y_{(V, W)}) \rightarrow q \in Y^+, q \neq p \Rightarrow$ mâu thuẫn với giả thiết Ω thỏa mãn tính chất κ đối với (X_0, X, Y) . Từ đó $C[X, Y^+; \Omega]$ là liên tục đồng đều và (2) được chứng minh.

Từ định lý trên ta nhận được một hệ quả và hệ quả này đã tổng quát hóa các kết quả của Kiernan, Kobayashi, Kwack và Noguchi. Nếu $\Omega \subset F(X_0, Y)$, ta ký hiệu $\bar{\Omega}$ là bao đóng của Ω trong $C(X_0, Y^+)$.

2.2.5 Hệ quả

Cho X_0 là tập con trù mật của không gian X và $\Omega \subset F(X_0, Y)$ thỏa mãn tính chất κ đối với (X_0, X, Y) . Khi đó :

(1) Mỗi $f \in \bar{\Omega}$ thác triển thành $\tilde{f} \in C(X, Y^+)$

(2) Nếu $\{f_\alpha\}$ là một lưới trong Ω và $f_\alpha \rightarrow f$ thì $\tilde{f}_\alpha \rightarrow \tilde{f}$.

Chứng minh

Với $f \in \bar{\Omega} \Rightarrow$ có lưới $\{f_\alpha\} \subset \Omega$ mà $f_\alpha \rightarrow f$. Theo định lý 2.4 có thác triển $\tilde{f}_\alpha \in C(X, Y^+)$ với mỗi α , và tồn tại lưới con $\{f_{\alpha_\mu}\}$ của $\{f_\alpha\}$ sao cho $\tilde{f}_{\alpha_\mu} \rightarrow g \in C(X, Y^+)$. Ta thấy $g = \tilde{f}$ (vì trên X_0 thì $\tilde{f}_{\alpha_\mu} = f_{\alpha_\mu} \rightarrow f$ do đó $f = g$ trên X_0). Vậy (1) được chứng minh.

Nếu $\{f_{\alpha_\mu}\}$ là một lưới con của $\{f_\alpha\}$ và $\tilde{f}_{\alpha_\mu} \rightarrow g \in C(X, Y^+)$ thì $g = \tilde{f}$ (tương tự trên). Vì $C[X, Y^+; \Omega]$ là compact tương đối trong $C[X, Y^+]$ do đó mọi dãy con của $\{\tilde{f}_\alpha\}$ đều có một dãy con $\{\tilde{f}_{\alpha_\mu}\}$ hội tụ đến \tilde{f} nên từ định lý

2.2.4 ta có $\tilde{f}_\alpha \rightarrow \tilde{f}$. (Nếu $\tilde{f}_\alpha \not\rightarrow \tilde{f} \Rightarrow \exists U(\tilde{f}), \tilde{f}_\alpha \notin U(\tilde{f})$ với α đủ lớn \Rightarrow mọi dãy con của \tilde{f}_α đều không hội tụ tới $\tilde{f} \Rightarrow$ mâu thuẫn). Hệ quả được chứng minh.

Nhận xét

Hệ quả 2.2.5 là khái quát của các định lý Kiernan, Kobayashi, Kwack và Noguchi. Thật vậy : Giả sử M là đa tạp phức và A là divisor có giao chuẩn tắc trong M . Trong ví dụ 1 (xem [4]) đã chứng minh được rằng : X là những hyperbolic trong $Y \Leftrightarrow H(M - A, X)$ thỏa mãn tính chất κ đối với $(M - A, M, Y)$ (xem 1.4.4.10). Do đó nếu X là compact tương đối, những hyperbolic trong Y thì theo hệ quả 2.2.5 ta có :

- (1) Mỗi $f \in H(M - A, X)$ đều có thác triển $\tilde{f} \in H(M, Y)$.
- (2) $\forall \{f_n\} \subset H(M - A, X), f_n \rightarrow f \in H(M - A, X)$ thì $\tilde{f}_n \rightarrow \tilde{f}$.

Định lý tiếp theo cung cấp cho một đặc trưng nữa của tính chất κ mà từ đó ta có kết quả mở rộng hơn nữa định lý Noguchi. Sự mở rộng này sẽ được đưa ra trong hệ quả 2.2.7.

2.2.6 Định lý

Cho X_0 là tập con trù mật của không gian X . Khi đó $\Omega \subset F(X_0, Y)$ thỏa mãn tính chất κ đối với (X_0, X, Y) nếu và chỉ nếu hai điều kiện sau được thỏa mãn :

- (1) Mỗi $f \in \Omega$ thác triển được thành $\tilde{f} \in C(X, Y^+)$.
- (2) $C[X, Y^+; \bar{\Omega}]$ là tập con compact của $C(X, Y^+)$.

Chứng minh

\Leftrightarrow) Vì $C[X, Y^+; \Omega]$ là tập con của $C[X, Y^+; \bar{\Omega}]$, do đó nó là compact tương đối trong $C(X, Y^+)$. Vậy theo định lý 2.2.4 ta có Ω thỏa mãn tính chất κ đối với (X_0, X, Y) .

\Rightarrow) Ta chứng tỏ $C[X, Y^+; \bar{\Omega}] = \overline{C[X, Y^+; \Omega]}$

Lấy $\tilde{g} \in C[X, Y^+; \bar{\Omega}] \Rightarrow$ tồn tại lưới $\{f_\alpha\}$ trong Ω sao cho $f_\alpha \rightarrow \tilde{g}$ trong X_0 . Từ giả thiết Ω thỏa mãn tính chất κ với (X_0, X, Y) nên theo định lý 2.2.4 có lưới con $\{f_{\alpha_\mu}\}$ của $\{f_\alpha\}$ mà $\tilde{f}_{\alpha_\mu} \rightarrow h \in \overline{C[X, Y^+; \Omega]} \Rightarrow h = \tilde{g}$ (vì trên X_0 chúng cùng là giới hạn của $\{\tilde{f}_{\alpha_\mu}\}$), do đó $\tilde{g} \in \overline{C[X, Y^+; \Omega]}$.

Từ đó ta có bao hàm $C[X, Y^+; \bar{\Omega}] \subset \overline{C[X, Y^+; \Omega]}$.

Lấy $\tilde{g} \in \overline{C[X, Y^+; \Omega]}$, có lưới $\{f_\alpha\} \subset C[X, Y^+; \Omega]$ sao cho $\tilde{f}_\alpha \rightarrow \tilde{g} \Rightarrow f_\alpha \rightarrow g$ trên $X_0 \Rightarrow \tilde{g} \in C[X, Y^+; \bar{\Omega}] \Rightarrow C[X, Y^+; \bar{\Omega}] \supset \overline{C[X, Y^+; \Omega]}$

Vậy $C[X, Y^+; \bar{\Omega}] = \overline{C[X, Y^+; \Omega]}$. Định lý được chứng minh.

2.2.7 Hệ quả

Cho X_0 là tập con trù mật của không gian X và $\Omega \subset F(X_0, Y)$ thỏa mãn tính chất κ đối với (X_0, X, Y) . Khi đó :

- (1) Ω là compact tương đối trong $C(X_0, Y^+)$,
- (2) Nếu $\{f_\alpha\}$ là một lưới trong $\bar{\Omega}$ và $f_\alpha \rightarrow f$ thì $\tilde{f}_\alpha \rightarrow \tilde{f}$.

Chứng minh

Giả sử $\{f_\alpha\}$ là một lưới trong $\bar{\Omega}$, theo định lý 2.2.6 thì với mỗi α tồn tại $\tilde{f}_\alpha \in C(X, Y^+)$ và có lưới con $\{\tilde{f}_{\alpha_\mu}\}$ của $\{\tilde{f}_\alpha\}$ sao cho $\tilde{f}_{\alpha_\mu} \rightarrow \tilde{g} \in C(X, Y^+)$

$\Rightarrow f_{\alpha_\mu} \rightarrow g$ trên X_0 . Từ đó (1) được chứng minh.

Nếu $\{\tilde{f}_{\alpha_\mu}\}$ là một lưới con hội tụ của $\{\tilde{f}_\alpha\}$ và $f_{\alpha_\mu} \rightarrow f$ thì $\tilde{f}_{\alpha_\mu} \rightarrow \tilde{f}$.

Từ định lý 2.2.6, mỗi lưới con của $\{\tilde{f}_\alpha\}$ đều có một lưới con hội tụ, suy ra $\tilde{f}_\alpha \rightarrow \tilde{f}$ và (2) được chứng minh.

Từ hệ quả 2.2.5 và định lý 2.2.6 ta có kết quả dưới đây :

2.2.8 Hệ quả

Nếu X_0 là tập con trù mật của không gian X thì $\Omega \subset F(X_0, Y)$ thỏa mãn tính chất κ đối với (X_0, X, Y) nếu và chỉ nếu $\bar{\Omega}$ thỏa mãn tính chất κ đối với (X_0, X, Y^+) .

Chứng minh

Từ hệ quả 2.2.5 và định lý 2.2.6 ta có :

Ω thỏa mãn tính chất κ đối với (X_0, X, Y) khi và chỉ khi :

(1) Mỗi $f \in \bar{\Omega}$ thác triển được thành $\tilde{f} \in C(X, Y^+)$

(2) $C[X, Y^+; \bar{\Omega}]$ là tập con compact của $C(X, Y^+)$.

Từ đó theo định lý 2.2.4 ta có $\bar{\Omega}$ thỏa mãn tính chất κ ứng với (X_0, X, Y^+) .

2.2.9 Hệ quả

Cho M là đa tạp phức và A là divisor có giao chuẩn tắc trong M .

Cho X là không gian con phức compact tương đối nhúng hyperbolic trong không gian phức Y . Khi đó :

(1) Mỗi $f \in \overline{H(M - A, X)}$ thác triển được thành $\tilde{f} \in H(M, Y)$

(2) Nếu $\{f_n\}$ là một dãy trong $\overline{H(M - A, X)}$ và $f_n \rightarrow f$ thì $\tilde{f}_n \rightarrow \tilde{f}$.

2.2.10 Định lý

Cho X_0 là tập con trù mật của không gian X . Khi đó $\Omega \subset F(X_0, Y)$ thỏa mãn tính chất κ đối với (X_0, X, Y) nếu và chỉ nếu 3 điều kiện sau được thỏa mãn :

(1) Ω là compact tương đối trong $C(X_0, Y^+)$

(2) Mỗi $f \in \bar{\Omega}$ thác triển được thành $\tilde{f} \in C(X, Y^+)$

(3) Nếu $\{f_\alpha\}$ là một lưới trong Ω và $f_\alpha \rightarrow f$ thì $\tilde{f}_\alpha \rightarrow \tilde{f}$

Chứng minh

+ Điều kiện cần được suy ra từ hệ quả 2.2.6 và hệ quả 2.2.7.

+ Điều kiện đủ : Giả sử $\{f_\alpha\}$ là một lưới trong Ω . Từ (1) \Rightarrow tồn tại lưới con $\{f_{\alpha_\mu}\}$ của $\{f_\alpha\}$ mà $f_{\alpha_\mu} \rightarrow f \in \bar{\Omega}$. Từ (2) \Rightarrow với mỗi μ , tồn tại \tilde{f}_{α_μ} và \tilde{f} và từ (3) ta có $\Rightarrow \tilde{f}_{\alpha_\mu} \rightarrow \tilde{f} \in C[X, Y^+; \Omega]$. Suy ra $C[X, Y^+; \Omega]$ là compact tương đối trong $C(X, Y^+)$, từ đó theo định lý 2.2.4 ta được điều phải chứng minh.

Để kết thúc phần này chúng ta đưa ra một vài ví dụ làm rõ hơn các vấn đề đã trình bày ở trên.

2.2.11 Ví dụ

Cho $X = [0; 1], X_0 = [0; 1) \subset X$.

a) Nếu $f_n \in C(X_0, X)$ xác định bởi $f_n(x) = x^n$ với mỗi n nguyên dương và $\Omega = \{f_n\}$ thì Ω thỏa mãn (1) và (2) của định lý 2.2.10 nhưng không thỏa mãn (3).

b) $C[X, X; F(X_0, X)]$ không là compact tương đối trong $C(X, X)$ và do đó nó không thỏa mãn tính chất κ đối với (X_0, X, X) .

Chứng minh

Trước hết ta chứng minh Ω compact tương đối trong $C(X_0, X)$, cụ thể ta sẽ chỉ ra mọi dãy trong Ω đều hội tụ về hàm $0 \in C(X_0, X)$. Giả sử A là tập compact trong X_0 , B là tập mở trong X và $U_{(A,B)} = \{f_n \in \Omega : f_n(A) \subset B\}$ là lân cận của 0.

Do A compact trong $X_0 \Rightarrow A = [\alpha, \beta]$ ở đó $0 \leq \alpha \leq \beta < 1$.

B mở trong X và $U_{(A,B)} = \{f_n \in \Omega : f_n(A) \subset B\}$ là lân cận của 0 nên $0(A) \subset B \Rightarrow 0 \in B$. Vậy $B = [0, \gamma)$ ở đó $0 \leq \gamma < 1$.

Chọn β sao cho $\beta^n < \gamma \Rightarrow f_n(A) \subset B \Rightarrow f_n \rightarrow 0$.

Mặt khác mỗi $f_n \in \Omega$ có thác triển $\tilde{f}_n : X \rightarrow X$

$$x \mapsto x^n$$

$\Rightarrow \Omega$ thỏa mãn (2) của định lý 2.2.10

Ta thấy rằng $\tilde{f}_n([0,1]) \not\subset B \Rightarrow f_n \not\rightarrow 0 \Rightarrow \Omega$ không thỏa mãn (3) của định lý

2.2.10. Vậy a) được chứng minh.

Để chứng minh b) ta xét dãy $\{\tilde{f}_n\} \subset C[X, X; F(X_0, X_0)]$ xác định bởi

$\tilde{f}_n(x) = x^n$, khi đó \tilde{f}_n là thác triển của $f_n : X_0 \rightarrow X_0$

$$x \mapsto x^n$$

Ta nhận thấy $\{\tilde{f}_n\}$ không chứa một dãy con nào hội tụ, do đó

$C[X, X; F(X_0, X_0)]$ không compact tương đối trong $C(X, X)$.

2.2.12 Ví dụ

$H(D^*, \square - \{0\})$ không thỏa mãn tính chất κ đối với $(D^*, D, (\square - \{0\})^+)$

Thật vậy : giả sử $z_0 \in \square - \{0\}$, ta định nghĩa dãy $\{f_k\}$ trong

$H(D^*, \square - \{0\})$ như sau: $f_k(z) = \frac{z_0}{kz}$.

Khi đó $f_k\left(\frac{1}{k+1}\right) \rightarrow z_0$ trong khi $f_k\left(\frac{1}{2(k+1)}\right) \rightarrow 2z_0 \neq z_0$.

2.2.13 Ví dụ

Cho n là số nguyên dương, $n \neq 1$ và $M = \{(z_1, z_2, \dots, z_n) \in \square^n : z_i \notin \{0; 1\}\}$.

Gọi $[w_0, w_1, \dots, w_n]$ là tọa độ thuần nhất trong không gian xạ ảnh $P^n(\square)$ và π là siêu phẳng $\{[w_0, w_1, \dots, w_n] : w_0 = 0\}$;

Ánh xạ $\psi : M \rightarrow P^n(\square)$ xác định bởi $\psi(z_1, z_2, \dots, z_n) = [1, z_1, \dots, z_n]$.

Ta chứng tỏ rằng $H(D^*, \psi(M))$ không thỏa mãn tính chất κ đối với $(D^*, D, P^n(\square))$

Thật vậy, giả sử $p = [0, 1, w_2, \dots, w_n]$ là một điểm của π với $|w_i| \geq 1, \forall i$.

Dãy $\{f_k\}$ trong $H(D^*, \psi(M))$ xác định bởi

$$f_k(z) = \left[1; \frac{k}{z^k}; \frac{w_2}{z^{k+1}}; \dots; \frac{w_n}{z^{k+1}}\right] = \left[\frac{z^k}{k}; 1; \frac{w_2}{kz}; \dots; \frac{w_n}{kz}\right].$$

Khi đó: $f_k\left(\frac{1}{k+1}\right) \rightarrow p$ và $f_k\left(\frac{1}{2(k+1)}\right) \rightarrow [0; 1; 2w_2; \dots; 2w_n] \neq p$.

Hơn nữa với mỗi z cố định ta có $f_k(z) \rightarrow [0; 1; 0; \dots; 0]$ nên f_k hội tụ đến ánh xạ hằng f trên D^* . Khi đó tồn tại $\tilde{f}_k, \tilde{f} \in H(D, P^n(\square))$ với mỗi k nhưng $\{\tilde{f}_k\}$ không hội tụ (vì không thỏa mãn tính chất κ) \Rightarrow Điều phải chứng minh.

2.2.14 Nhận xét

Hệ quả 2.2.7 chứng tỏ rằng Ω có thể thay thế bởi $\bar{\Omega}$ trong điều kiện (3) của định lý 2.2.10.

Chú ý rằng trong điều kiện (3) ta có thể ngầm giả thiết rằng \tilde{f}_α và \tilde{f} tồn tại với mỗi α .

Để dàng thấy từ nhận xét trên và định lý 2.2.10 rằng nếu $X_0 \subset X$ là trù mật thì $\Omega \subset F(X_0, Y)$ thỏa mãn tính chất κ ứng với (X_0, X, Y) nếu và chỉ nếu hai điều kiện sau được thỏa mãn :

(1) Ω là compact tương đối trong $C(X_0, Y^+)$

(2) Ánh xạ $k: \bar{\Omega} \rightarrow C(X, Y^+)$ xác định bởi $k(f) = \tilde{f}$ là phép nhúng.

Chúng ta kết thúc phần này bởi định lý và hệ quả sau đây :

2.2.15 Định lý

Cho $\Delta \subset C(X, Y)$ là compact tương đối; $S \subset X$ thỏa mãn nếu $f, g \in \bar{\Delta}$ và $f = g$ trên S , thì $f = g$. Nếu $\{f_\alpha\}$ là một lưới trong $\bar{\Delta}$; $f \in \bar{\Delta}$ và $f_\alpha \rightarrow f$ trên S , thì $f_\alpha \rightarrow f$ (trên toàn bộ X).

Chứng minh

Vì $\{f_\alpha\}$ là một lưới trong $\bar{\Delta}$ là compact trong $C(X, Y) \Rightarrow$ có lưới con $\{f_{\alpha_\mu}\}$ mà $f_{\alpha_\mu} \rightarrow h \in \bar{\Delta}$ trên X .

Theo giả thiết $\Rightarrow f_{\alpha_\mu} \rightarrow h$ và $f_{\alpha_\mu} \rightarrow f$ trên S suy ra $h = f$ trên $S \Rightarrow h = f$ trên X . Mà $\bar{\Delta}$ compact nên mọi dãy con của f_α đều có dãy con hội tụ đến f , do đó $f_\alpha \rightarrow f$ trên X . Định lý được chứng minh.

2.2.16 Hệ quả

Cho $X_0 \subset X$ là trù mật và $\Omega \subset F(X_0, Y)$ thỏa mãn tính chất κ ứng với (X_0, X, Y) . Giả sử tồn tại một tập $S \subset X$ sao cho nếu $f, g \in C(X, Y^+)$ và $f = g$ trên S thì $f = g$.

Khi đó nếu $\{f_\alpha\}$ là một lưới trong $\bar{\Omega}$ và $\{\tilde{f}_\alpha\}$ hội tụ trong S thì $\{\tilde{f}_\alpha\}$ hội tụ.

Chứng minh

Nếu $\{f_\alpha\}$ là một lưới trong $\bar{\Omega}$ thì theo hệ quả 2.2.5, với mỗi α , tồn tại \tilde{f}_α và theo định lý 2.2.6, $\tilde{f}_{\alpha_\mu} \rightarrow f \in C(X, Y^+)$ với mỗi lưới con $\{\tilde{f}_{\alpha_\mu}\}$ của $\{\tilde{f}_\alpha\}$.

Theo giả thiết nếu $\{\tilde{f}_\alpha\}$ hội tụ trên S thì $\tilde{f}_\alpha \rightarrow f$ trên S , do dãy con $\tilde{f}_{\alpha_\mu} \rightarrow f$ trên S .

Áp dụng định lý 2.2.15 với $\Delta = C(X, Y^+)$ ta có $\tilde{f}_\alpha \rightarrow f$ trên X .

2.3 Một số đặc trưng của tính chất κ và ứng dụng

Trong phần này chúng tôi trình bày một số điều kiện cần và đủ để Ω thỏa mãn tính chất κ đối với (X_0, X, Y) và đưa ra các ứng dụng của kết quả trong 2.2, đó chính là các đặc trưng của tính nhúng hyperbolic của các không gian phức.

Đầu tiên ta xét các điều kiện để tồn tại sự thác triển hàm từ tập con trù mật của không gian lên toàn bộ không gian. Mệnh đề sau được chứng minh trong [1].

2.3.1 Mệnh đề

Cho X_0 là tập con trù mật trong không gian X , Y là không gian chính quy và $f : X_0 \rightarrow Y$ là một hàm. Khi đó f có thác triển liên tục $\tilde{f} : X \rightarrow Y$ nếu và chỉ nếu với mỗi $x \in X$, có $y \in Y$ sao cho nếu $\{x_\alpha\}$ là một lưới trong X_0 và $x_\alpha \rightarrow x$ thì $f(x_\alpha) \rightarrow y$.

Ta dễ dàng thấy rằng nếu f thỏa mãn các giả thiết của mệnh đề 2.3.1 thì f có thác triển liên tục $\tilde{f} : X \rightarrow Y$ nếu và chỉ nếu :

(a) $\left\{ \bigcap_{\Sigma(y)} \overline{f^{-1}(W)} : y \in Y \right\}$ phủ X ,

(b) Nếu $x \in \bigcap_{\Sigma(y)} \overline{f^{-1}(W)}$ và $\{x_\alpha\} \subset X_0$ mà $x_\alpha \rightarrow x$ thì $f(x_\alpha) \rightarrow y$.

Trong định lý và các mệnh đề dưới đây, ta xây dựng một số điều kiện cần và đủ khác cho sự tồn tại của thác triển liên tục từ tập con trù mật để đưa ra những đặc trưng của tính chất κ . Trong định lý và các mệnh đề này cả X và Y đều không giả thiết là k -không gian.

2.3.2 Định lý

Cho X_0 là tập con trù mật trong không gian X , Y là không gian chính quy và $f : X_0 \rightarrow Y$ là một hàm. Các phát biểu dưới đây là tương đương :

(1) Hàm f thác triển thành hàm liên tục $\tilde{f} : X \rightarrow Y$

(2) Với mỗi $x \in X, \bigcap_{\Sigma(x)} \overline{f(V \cap X_0)} \cap \bar{K}$ là tập có một phần tử với mỗi $K \subset Y$ và $f(V \cap X_0) \cap K \neq \emptyset$ với mỗi $V \in \Sigma(x)$.

(3) Hàm f thỏa mãn hai điều kiện sau :

(a) $\overline{f^{-1}(K)} \cap \overline{f^{-1}(M)} = \emptyset$ nếu K và M là tập con đóng rời nhau của Y

(b) $\bigcap_{\Sigma(x)} \overline{f(V \cap X_0)} \neq \emptyset$ với mỗi $x \in X$.

Chứng minh

(1) \Rightarrow (2) : Với mỗi $x \in X$ ta có :

$$\{\tilde{f}(x)\} \subset \bigcap_{\Sigma(x)} \tilde{f}(V) \subset \bigcap_{\Sigma(x)} \overline{f(V \cap X_0)} \subset \bigcap_{\Sigma(x)} \overline{\tilde{f}(V)} = \{\tilde{f}(x)\} \quad (*)$$

Thật vậy ta chỉ cần chứng minh $\tilde{f}(V) \subset \overline{f(V \cap X_0)}$ với mọi $V \in \Sigma(x)$.

Giả sử $y \in \tilde{f}(V)$ khi đó với mọi $W \in \Sigma(y)$ đều có $\bar{x} \in V$ và $U \in \Sigma(\bar{x})$ sao cho $y \in \tilde{f}(\bar{x})$ và $\tilde{f}(U) \subset W$.

$$\text{Do } V \cap U \cap X_0 \neq \emptyset \Rightarrow \exists x_0 \in V \cap U \cap X_0 \Rightarrow \begin{cases} x_0 \in U \\ x_0 \in V \cap X_0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(x_0) \in W \\ f(x_0) \in f(V \cap X_0) \end{cases} \Rightarrow W \cap f(V \cap X_0) \neq \emptyset \text{ với mọi } W \in \Sigma(y).$$

$$\Rightarrow y \in \overline{f(V \cap X_0)} \Rightarrow \tilde{f}(V) \in \overline{f(V \cap X_0)}.$$

$$\text{Từ (*) ta có } \bigcap_{\Sigma(x)} \overline{f(V \cap X_0)} = \{\tilde{f}(x)\}.$$

Vậy với mỗi $x \in X$ thì $\bigcap_{\Sigma(x)} \overline{f(V \cap X_0)}$ là tập có một phần tử.

Ngoài ra, nếu $K \subset Y$ và $f(V \cap X_0) \cap K \neq \emptyset$ với mọi $V \in \Sigma(x)$, ta sẽ chứng minh tập $\bigcap_{\Sigma(x)} \overline{f(V \cap X_0)} \cap \bar{K}$ là tập có một phần tử.

Thật vậy, do $f(V \cap X_0) \cap K \neq \emptyset$ nên $\exists y \in f(V \cap X_0) \cap K$

$$\Rightarrow \begin{cases} y \in f(V \cap X_0) \\ y \in K \end{cases} \text{ với mọi } V \in \Sigma(x)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y \in \overline{f(V \cap X_0)} \\ y \in \bar{K} \end{cases} \text{ với mọi } V \in \Sigma(x) \Rightarrow \begin{cases} y \in \bigcap_{\Sigma(x)} \overline{f(V \cap X_0)} \\ y \in \bar{K} \end{cases}$$

$\Rightarrow \bigcap_{\Sigma(x)} \overline{f(V \cap X_0)} \cap \bar{K} \neq \emptyset$. Mặt khác do $\bigcap_{\Sigma(x)} \overline{f(V \cap X_0)}$ là tập có một phần tử nên $\bigcap_{\Sigma(x)} \overline{f(V \cap X_0)} \cap \bar{K}$ là tập có một phần tử.

Vậy (1) \Rightarrow (2).

(2) \Rightarrow (3) : Giả sử $\overline{f^{-1}(K)} \cap \overline{f^{-1}(M)} \neq \emptyset$ với K và M là tập con đóng rời nhau của $Y \Rightarrow \exists x \in \overline{f^{-1}(K)} \cap \overline{f^{-1}(M)}$.

Vì $x \in \overline{f^{-1}(K)} \Rightarrow f(V \cap X_0) \cap K \neq \emptyset, \forall V \in \Sigma(x) \Rightarrow \bigcap_{\Sigma(x)} \overline{f(V \cap X_0)} \cap K$ là tập có một phần tử.

Tương tự ta có : $\bigcap_{\Sigma(x)} \overline{f(V \cap X_0)} \cap M$ là tập có một phần tử.

Kết hợp với $\bigcap_{\Sigma(x)} \overline{f(V \cap X_0)}$ là tập có một phần tử ta có $K \cap M \neq \emptyset$, điều này mâu thuẫn với giả thiết. Do đó (2) \Rightarrow (3).

(3) \Rightarrow (1) : Trước tiên ta chứng minh rằng $\bigcap_{\Sigma(x)} \overline{f(V \cap X_0)}$ là tập chỉ có một phần tử với mỗi $x \in X$. Giả sử $y, z \in \bigcap_{\Sigma(x)} \overline{f(V \cap X_0)}$ và $y \neq z$.

Lấy W, H theo thứ tự là các lân cận đóng rời nhau của y, z . Khi đó $x \in \overline{f^{-1}(W)} \cap \overline{f^{-1}(H)}$, mâu thuẫn điều kiện (3a). Vậy $\bigcap_{\Sigma(x)} \overline{f(V \cap X_0)}$ là tập chỉ có một phần tử với mỗi $x \in X$.

Giả sử $\{y\} = \bigcap_{\Sigma(x)} \overline{f(V \cap X_0)}$, ta định nghĩa $\tilde{f}(x) = y$. Như vậy nếu $x \in X_0$ thì $f(x) \in \bigcap_{\Sigma(x)} \overline{f(V \cap X_0)}$ nên $\tilde{f}(x) = f(x)$. Bây giờ ta giả sử $x \in X, W \in \Sigma(\tilde{f}(x))$ và $W_1, W_2 \in \Sigma(\tilde{f}(x))$ thỏa mãn $\bar{W}_1 \subset W_2 \subset \bar{W}_2 \subset W$, khi đó theo (3a) ta có

$$\begin{cases} x \in \overline{f^{-1}(\bar{W}_1)} \\ x \notin \overline{f^{-1}(Y - W_2)}. \end{cases}$$

Từ đó tồn tại $V \in \Sigma(x)$ thỏa mãn $V \cap X_0 \cap f^{-1}(Y - W_2) = \emptyset$

$$\Rightarrow f(V \cap X_0) \subset W_2 \text{ và } \tilde{f}(V) = \bigcup_{z \in V} \bigcap_{Q \in \Sigma(z)} \overline{f(Q \cap X_0)} \subset \overline{f(V \cap X_0)} \subset \bar{W}_2 \subset W$$

$$\Rightarrow \tilde{f}(V) \subset W.$$

Vậy \tilde{f} liên tục và (1) được chứng minh.

2.3.3 Mệnh đề (xem [2])

Cho X_0 là không gian con trù mật trong không gian X , Y là không gian chính quy và cho $f \in C(X_0, Y)$. Khi đó f có thác triển liên tục $\tilde{f} \in C(X, Y)$ nếu và chỉ nếu $\{f(V \cap X_0) : V \in \Sigma(x)\}$ hội tụ với mỗi $x \in X$.

2.3.4 Mệnh đề (xem [9])

Cho X_0 là tập con trù mật trong không gian X , Y là không gian compact và $f : X_0 \rightarrow Y$ là một hàm. Các phát biểu dưới đây là tương đương :

(1) Hàm f thác triển thành hàm $\tilde{f} \in C(X, Y)$.

(2) Với mỗi $x \in X, \bigcap_{\Sigma(x)} \overline{f(V \cap X_0)}$ là tập chỉ có một điểm.

(3) Nếu K và M là tập con đóng rời nhau của Y thì :

$$\overline{f^{-1}(K)} \cap \overline{f^{-1}(M)} = \emptyset.$$

Bây giờ để khái quát tính chất κ ta đưa ra thêm một số định nghĩa và khái niệm cần thiết.

2.3.5 Định nghĩa (xem [4])

Cho $\{A_\alpha\}_\Lambda$ là một lưới các tập con của không gian tôpô X . Ta gọi

(1) Một giới hạn trên của $\{A_\alpha\}_\Lambda$ là $\bigcap_{\mu \in \Lambda} \overline{\bigcup_{\alpha \geq \mu} A_\alpha}$, ký hiệu là $\overline{\lim_\Lambda A_\alpha}$ hay đơn giản hơn là $\overline{\lim} A_\alpha$ nếu không có sự nhầm lẫn.

(2) Ta nói rằng $x \in X$ là một điểm tụ mạnh đối với $\{A_\alpha\}_\Lambda$ nếu với mỗi $V \in \Sigma(x)$ thì có α sao cho $A_\alpha \subset V$.

(3) Nếu $\{f_\alpha\}_\Lambda$ là lưới các hàm từ không gian X tới không gian Y , $X_0 \subset X$ và $x \in X$ thì ta có lưới $\{f_\alpha(V \cap X_0)\}_x$. Chúng ta sử dụng $\Lambda \times \Sigma(x)$ như là tập sắp thứ tự bởi quan hệ :

$$(\alpha, V) \leq (\mu, W) \Leftrightarrow \alpha \leq \mu \text{ và } W \subset V.$$

2.3.6 Định lý

Cho X_0 là tập con trù mật trong không gian X và cho $\Omega \subset F(X_0, Y)$.

Các phát biểu dưới đây là tương đương :

(1) Ω thỏa mãn tính chất κ đối với (X_0, X, Y) .

(2) Với mỗi lưới $\{f_\alpha\}$ trong $\overline{\Omega}$ có lưới con $\{f_{\alpha_\mu}\}$ của $\{f_\alpha\}$ thỏa mãn $\overline{\lim} f_{\alpha_\mu}^{-1}(K) \cap \overline{\lim} f_{\alpha_\mu}^{-1}(M) = \emptyset$ với mỗi cặp tập con rời nhau K, M của Y mà K compact và M đóng.

(3) Với mỗi lưới $\{f_\alpha\}$ trong $\bar{\Omega}$ có lưới con $\{f_{\alpha_\mu}\}$ của $\{f_\alpha\}$ thỏa mãn với mỗi cặp tập con rời nhau K, M của Y mà K compact và M đóng, tồn tại lân cận W của K thỏa mãn $\overline{\lim} f_{\alpha_\mu}^{-1}(W) \cap \overline{\lim} f_{\alpha_\mu}^{-1}(M) = \emptyset$.

(4) Với mỗi lưới $\{f_\alpha\}$ trong $\bar{\Omega}$ có lưới con $\{f_{\alpha_\mu}\}$ của $\{f_\alpha\}$ thỏa mãn với mỗi tập con đóng M của Y và $y \in Y - M$, tồn tại lân cận $W \in \Sigma(y)$ thỏa mãn $\overline{\lim} f_{\alpha_\mu}^{-1}(W) \cap \overline{\lim} f_{\alpha_\mu}^{-1}(M) = \emptyset$.

(5) Với mỗi lưới $\{f_\alpha\}$ trong $\bar{\Omega}$ có lưới con $\{f_{\alpha_\mu}\}$ của $\{f_\alpha\}$ sao cho với mỗi $x \in X$ và $K \subset Y$ compact, khi đó hoặc là $\{f_{\alpha_\mu}(V \cap X_0)\}_x$ có điểm tụ mạnh trong Y hoặc $f_{\alpha_\mu}(V \cap X_0) \subset Y - K$.

(6) Với mỗi $x \in X$ và lưới $\{f_\alpha\}$ trong $\bar{\Omega}$, hoặc là tồn tại lưới con của $\{f_\alpha(V \cap X_0)\}_x$ có điểm tụ mạnh trong Y , hoặc với mỗi tập compact $K \subset Y$, thì $f_\alpha(V \cap X_0) \subset Y - K$.

(7) Nếu $\{f_\alpha\}$ là lưới trong $\bar{\Omega}$ thì có lưới con $\{f_{\alpha_\mu}\}$ của $\{f_\alpha\}$ sao cho với mỗi $x \in X$ và tập compact $K \subset Y$, thì mỗi $y \in K \cap \overline{\lim} f_{\alpha_\mu}(V \cap X_0)$ là điểm tụ mạnh đối với $\{f_{\alpha_\mu}(V \cap X_0)\}_x$.

(8) Nếu $\{f_\alpha\}$ là lưới trong Ω thì có lưới con $\{f_{\alpha_\mu}\}$ của $\{f_\alpha\}$ sao cho với mỗi $x \in X$ và tập compact $K \subset Y$, thì mỗi $y \in K \cap \overline{\lim} f_{\alpha_\mu}(V \cap X_0)$ là điểm tụ mạnh đối với $\{f_{\alpha_\mu}(V \cap X_0)\}_x$.

Chứng minh

Hiển nhiên (3) \Rightarrow (4), (5) \Rightarrow (6) và (7) \Rightarrow (8);

(1) \Rightarrow (2) : Giả sử $\{f_\alpha\}$ là lưới trong $\bar{\Omega}$ và K, M là các tập con rời nhau của Y trong đó K compact và M đóng. Từ hệ quả 2.2.5 và định lý 2.2.6, $\tilde{f}_\alpha \in C(X, Y^+)$ tồn tại với mỗi α và có lưới con $\{f_{\alpha_\mu}\}$ của $\{f_\alpha\}$ sao cho $\tilde{f}_{\alpha_\mu} \rightarrow g \in C(X, Y^+)$.

Giả sử $x \in \overline{\lim} f_{\alpha_\mu}^{-1}(K) \cap \overline{\lim} f_{\alpha_\mu}^{-1}(M) \Rightarrow \tilde{f}_{\alpha_\mu}(x) \rightarrow g(x)$ và bởi tính liên tục đồng đều của $C[X, Y^+, \bar{\Omega}]$ và tính compact của K trong Y nên ta có $g(x) \in K \cap \bar{M}$ trong $Y^+ \Rightarrow g(x) \in K \cap M$, mâu thuẫn với giả thiết $K \cap M = \emptyset$.

(2) \Rightarrow (3): Do $K, M \subset Y, K \cap M = \emptyset$ và K compact, M đóng nên có một lân cận compact W thỏa mãn $W \cap M = \emptyset$, từ đó ta có điều phải chứng minh.

(4) \Rightarrow (1) : Giả sử có $x \in X, y \in Y$ và $\{(f_\alpha, x_\alpha, v_\alpha)\}$ là lưới trong $\Omega \times X_0 \times X_0$ sao cho :

$$\begin{cases} x_\alpha \rightarrow x \\ v_\alpha \rightarrow x \\ f_\alpha(x_\alpha) \rightarrow y \\ f_\alpha(x_\alpha) \not\rightarrow y \end{cases}$$

để đến được mâu thuẫn ta chọn $H \in \Sigma(y)$, khi đó tồn tại lưới con của $\{(f_\alpha, x_\alpha, v_\alpha)\}$ vẫn gọi là $\{(f_\alpha, x_\alpha, v_\alpha)\}$ thỏa mãn

$$\begin{cases} f_\alpha(x_\alpha) \rightarrow y \\ f_\alpha(x_\alpha) \in Y - H \end{cases} \text{ với mỗi } \alpha.$$

Khi đó nếu $W \in \Sigma(y)$ và $\{f_{\alpha_\mu}\}$ là lưới con của $\{f_\alpha\}$ thì ta có :

$$x \in \overline{\lim} f_{\alpha_\mu}^{-1}(W \cap H) \cap \overline{\lim} f_{\alpha_\mu}^{-1}(Y - H) \subset \overline{\lim} f_{\alpha_\mu}^{-1}(W) \cap \overline{\lim} f_{\alpha_\mu}^{-1}(Y - H).$$

Điều này mâu thuẫn với (4). Vậy (1) đúng.

(1) \Rightarrow (5) : Giả sử $K \subset Y$ là compact và $\{f_\alpha\}$ là lưới trong $\bar{\Omega}$ thỏa mãn $f_\alpha(V \cap X_0) \cap K \neq \emptyset$ (nghĩa là $f_\alpha(V \cap X_0) \not\subset Y - K$) với mọi cặp $(\alpha, V) \in \Lambda \times \Sigma(x)$. Theo hệ quả 2.2.5 và định lý 2.2.6 thì có lưới con $\{f_{\alpha_\mu}\}$ của $\{f_\alpha\}$ thỏa mãn $\tilde{f}_{\alpha_\mu} \rightarrow g \in C(X, Y^+)$. Khi đó $g(x) \in K$.

Lấy $W \in \Sigma(g(x))$ nằm trong Y thì do tính liên tục đồng đều của $C[X, Y, \bar{\Omega}]$ nên ta có $\tilde{f}_{\alpha_\mu}(V) \subset W$ và do đó $\tilde{f}_{\alpha_\mu}(V \cap X_0) \subset W$.

(1) \Rightarrow (7) : Nếu $\{f_\alpha\}$ là lưới trong $\bar{\Omega}$ thì theo hệ quả 2.2.5 và định lý 2.2.6 ta có lưới con $\{f_{\alpha_\mu}\}$ của $\{f_\alpha\}$ thỏa mãn $\tilde{f}_\alpha \in C(X, Y^+)$ với mỗi μ và $\tilde{f}_{\alpha_\mu} \rightarrow g \in C(X, Y^+)$.

Nếu $x \in X, K \subset Y$ là compact và $y \in K \cap \overline{\lim} f_{\alpha_\mu}(V \cap X_0)$ thì $y = g(x) \in Y$ là điểm tụ mạnh đối với $\{f_{\alpha_\mu}(V \cap X_0)\}_x$.

(6) hoặc (8) \Rightarrow (1) : Cho $x \in X, y \in Y$, W là lân cận compact của y và cho $\{(f_\alpha, x_\alpha, v_\alpha)\}$ là lưới trong $\Omega \times X_0 \times X_0$ sao cho $x_\alpha \rightarrow x, v_\alpha \rightarrow x$, $f_\alpha(v_\alpha) \in Y - W$ với mỗi α và $f_\alpha(x_\alpha) \rightarrow y \Rightarrow y \in W \cap \overline{\lim} f_\alpha(V \cap X_0)$ và $f_\alpha(V \cap X_0) \cap W \neq \emptyset$. Do (6) hoặc (8) tồn tại lưới con $\{f_{\alpha_\mu}(V \cap X_0)\}$ của $\{f_\alpha(V \cap X_0)\}_x$ sao cho $f_{\alpha_\mu}(V \cap X_0) \subset W$.

Điều này là mâu thuẫn do $v_\alpha \rightarrow x$ và $f_\alpha(v_\alpha) \in Y - W$ với mỗi α .

Định lý được chứng minh.

2.3.7 Hệ quả

Cho Y là tập compact, $X_0 \subset X$ là trù mật và cho $\Omega \subset F(X_0, Y)$. Các phát biểu dưới đây là tương đương :

(1) Ω thỏa mãn tính chất κ đối với (X_0, X, Y) .

(2) Với mỗi lưới $\{f_\alpha\}$ trong $\bar{\Omega}$ có lưới con $\{f_{\alpha_\mu}\}$ của $\{f_\alpha\}$ sao cho với mỗi $x \in X$, $Y \cap \overline{\lim} f_{\alpha_\mu}(V \cap X_0)$ là tập hợp có một phần tử.

(3) Với mỗi lưới $\{f_\alpha\}$ trong $\bar{\Omega}$ có lưới con $\{f_{\alpha_\mu}\}$ của $\{f_\alpha\}$ sao cho $\{f_{\alpha_\mu}(V \cap X_0)\}_x$ có điểm tụ mạnh trong Y với mỗi $x \in X$.

(4) Với mỗi lưới $\{f_\alpha\}$ trong $\bar{\Omega}$ có lưới con $\{f_{\alpha_\mu}\}$ của $\{f_\alpha\}$ sao cho $\overline{\lim} f_{\alpha_\mu}^{-1}(K) \cap \overline{\lim} f_{\alpha_\mu}^{-1}(M) = \emptyset$ với mỗi cặp tập con đóng rời nhau K và M của Y .

(5) Nếu lưới $\{f_\alpha\}$ trong $\bar{\Omega}$ có lưới con $\{f_{\alpha_\mu}\}$ của $\{f_\alpha\}$ sao cho nếu $y, z \in Y; y \neq z$ thì tồn tại các tập mở $W \in \Sigma(y), H \in \Sigma(z)$ thỏa mãn $\overline{\lim} f_{\alpha_\mu}^{-1}(W) \cap \overline{\lim} f_{\alpha_\mu}^{-1}(H) = \emptyset$.

(6) Nếu $x \in X; y, z \in Y$ và $\{(f_\alpha, x_\alpha, v_\alpha)\}$ là lưới trong $\Omega \times X_0 \times X_0$ sao cho $x_\alpha \rightarrow x, v_\alpha \rightarrow x, f_\alpha(v_\alpha) \rightarrow y$ và $f_\alpha(v_\alpha) \rightarrow z$ thì $y = z$.

(7) Ω thỏa mãn :

(a) Mỗi $f \in \Omega$ thác triển thành $\tilde{f} \in C(X, Y)$

(b) $\{\tilde{f} : f \in \Omega\}$ là compact tương đối trong $C(X, Y)$.

Chứng minh

(1) \Leftrightarrow (2) \Leftrightarrow (3) : Do các mệnh đề tương đương (1), (5) và (6) trong định lý 2.3.6 và tính compact của Y .

(1) \Leftrightarrow (4) : Do sự tương đương của (1) và (4) trong định lý 2.3.6.

(4) \Rightarrow (5) \Rightarrow (6) : Hiển nhiên.

(6) \Rightarrow (7) \Rightarrow (1) : Hiển nhiên từ định lý 2.2.4.

Hệ quả được chứng minh.

Nếu $X = D$ và $X_0 = D^*$, hoặc M là đa tạp phức, $X = M$ và $X_0 = M - A$ với A là divisor có giao chuẩn tắc trong M , mỗi $x \in X$ ta có một cơ sở các tập mở $\theta(x)$ thỏa mãn $V \cap X_0$ là liên thông với mỗi $V \in \theta(x)$. Định lý tiếp theo là một đặc trưng khác của tính chất κ .

2.3.8 Định lý

Cho $X_0 \subset X$ là trù mật và giả sử mỗi $x \in X$ có cơ sở $\theta(x)$ của các tập mở thỏa mãn $V \cap X_0$ là liên thông với mỗi $V \in \theta(x)$, $\Omega \subset F(X_0, Y)$. Các phát biểu dưới đây là tương đương:

(1) Ω thỏa mãn tính chất κ đối với (X_0, X, Y) .

(2) Với mỗi $x \in X; y, z \in Y$ và $\{(f_\alpha, x_\alpha, v_\alpha)\}$ là một lưới trong $\Omega \times X_0 \times X_0$ sao cho $x_\alpha \rightarrow x, v_\alpha \rightarrow x, f_\alpha(v_\alpha) \rightarrow y$ và $f_\alpha(v_\alpha) \rightarrow z$, thì ta có $y = z$.

(3) Với mỗi lưới $\{f_\alpha\}$ trong $\bar{\Omega}$ có lưới con $\{f_{\alpha_\mu}\}$ của $\{f_\alpha\}$ sao cho $\{f_{\alpha_\mu}(V \cap X_0)\}_x$ có điểm tụ mạnh trong Y với mỗi $x \in X$.

(4) Với mỗi lưới $\{f_\alpha\}$ trong $\bar{\Omega}$, có lưới con $\{f_{\alpha_\mu}\}$ của $\{f_\alpha\}$ sao cho $\overline{\lim} f_{\alpha_\mu}^{-1}(K) \cap \overline{\lim} f_{\alpha_\mu}^{-1}(M) = \emptyset$ với mỗi cặp tập hợp compact rời nhau K và M của Y .

(5) Với mỗi lưới $\{f_\alpha\}$ trong $\bar{\Omega}$, có lưới con $\{f_{\alpha_\mu}\}$ của $\{f_\alpha\}$ sao cho nếu $y, z \in Y; y \neq z$ thì tồn tại $W \in \Sigma(y), H \in \Sigma(z)$ thỏa mãn $\overline{\lim} f_{\alpha_\mu}^{-1}(K) \cap \overline{\lim} f_{\alpha_\mu}^{-1}(H) = \emptyset$.

Chứng minh

Ta chỉ cần chứng minh $(4) \Rightarrow (1)$ và $(2) \Rightarrow (1)$.

Giả sử (1) không đúng. Khi đó có thể giả thiết $\{(f_\alpha, x_\alpha, v_\alpha)\}$ là lưới trong $\Omega \times X_0 \times X_0$, $x \in X; y \in Y$, $f_\alpha(x_\alpha) \rightarrow y$, $x_\alpha \rightarrow x$, $W, H \in \Sigma(y)$ thỏa mãn $\bar{W} \subset H$, \bar{H} compact, $f_\alpha(x_\alpha) \in W$ và $f_\alpha(v_\alpha) \in Y - \bar{H}$ với mỗi α .

Với mỗi lưới con $\{f_{\alpha_\mu}\}$ của $\{f_\alpha\}$ ta có

$$x \in \overline{\lim} f_{\alpha_\mu}^{-1}(\partial W) \cap \overline{\lim} f_{\alpha_\mu}^{-1}(\partial H)$$

ở đó $\partial W, \partial H$ biểu diễn tương ứng là biên của W và H . Từ đó có lưới $\{(f_\alpha, x_\alpha, q_\alpha)\}$ trong $\Omega \times X_0 \times X_0$ và $q \in \partial W$ sao cho $x_\alpha \rightarrow x, q_\alpha \rightarrow q$, $f_\alpha(x_\alpha) \rightarrow y, f_\alpha(q_\alpha) \rightarrow q, q \neq y$ nên (4) và (2) không xảy ra.

Vậy $(4) \Rightarrow (1)$ và $(2) \Rightarrow (1)$. Định lý được chứng minh.

Trong 2.2.9 ta đã chỉ ra được rằng không gian phức X là nhúng hyperbolic trong không gian phức $Y \Leftrightarrow H(M - A, X)$ thỏa mãn tính chất κ đối với $(M - A, M, Y)$, với M là đa tạp phức và A là divisor trên M có giao chuẩn tắc. Sử dụng kết quả này và áp dụng các hệ quả 2.3.7 và 2.3.8 ta nhận được một đặc trưng của tính nhúng hyperbolic của các không gian sau:

2.3.9 Hệ quả

Với X là không gian con phức của không gian phức Y ta có các phát biểu sau đây là tương đương:

(1) X là nhúng hyperbolic trong Y .

(2) Với mỗi dãy $\{f_n\}$ trong $\overline{H(D^*, X)}$, có dãy con $\{f_{n_k}\}$ của $\{f_n\}$ thỏa mãn $\overline{\lim} f_{n_k}^{-1}(K_1) \cap \overline{\lim} f_{n_k}^{-1}(K_2) = \emptyset$ với mỗi cặp tập con rời nhau K_1, K_2 của Y mà K_1 compact và K_2 đóng.

(3) Với mỗi dãy $\{f_n\}$ trong $\overline{H(D^*, X)}$ có dãy con $\{f_{n_k}\}$ của $\{f_n\}$ sao cho với mỗi cặp tập con rời nhau K_1, K_2 của Y mà K_1 compact và K_2 đóng, tồn tại lân cận W của K_1 thỏa mãn $\overline{\lim} f_{n_k}^{-1}(W) \cap \overline{\lim} f_{n_k}^{-1}(K_2) = \emptyset$.

(4) Với mỗi dãy $\{f_n\}$ trong $\overline{H(D^*, X)}$, có dãy con $\{f_{n_k}\}$ của $\{f_n\}$ sao cho, với mỗi $x \in D$ và $K \subset Y$ compact, hoặc là $\{f_{n_k}(V \cap X_0)\}_x$ có điểm tụ mạnh trong Y hoặc $f_{n_k}(V \cap X_0) \subset Y - K$.

(5) Với mỗi $x \in D$ và dãy $\{f_n\}$ trong $\overline{H(D^*, X)}$ hoặc là tồn tại lưới con của $\{f_{n_k}(V \cap D^*)\}_x$ có điểm tụ mạnh trong Y , hoặc là với mỗi tập con compact K của Y , $f_n(V \cap D^*) \subset Y - K$.

(6) Nếu $\{f_n\}$ là dãy trong $\overline{H(D^*, X)}$, có dãy con $\{f_{n_k}\}$ của $\{f_n\}$ sao cho, với mỗi $x \in D$ và K compact trong Y , mỗi $y \in K \cap \overline{\lim} f_{n_k}(V \cap D^*)$ là điểm tụ mạnh với $\{f_{n_k}(V \cap D^*)\}_x$.

(7) Với mỗi dãy $\{f_n\}$ trong $\overline{H(D^*, X)}$, có dãy con $\{f_{n_k}\}$ của $\{f_n\}$ sao cho $\overline{\lim} f_{n_k}^{-1}(K_1) \cap \overline{\lim} f_{n_k}^{-1}(K_2) = \emptyset$ với cặp các tập compact rời nhau $K_1, K_2 \subset Y$.

(8) Với mỗi dãy $\{f_n\}$ trong $\overline{H(D^*, X)}$ có dãy con $\{f_{n_k}\}$ của $\{f_n\}$ sao cho nếu $y, z \in Y; y \neq z$ thì tồn tại $W \in \Sigma(y), H \in \Sigma(z)$ thỏa mãn

$$\overline{\lim} f_{n_k}^{-1}(W) \cap \overline{\lim} f_{n_k}^{-1}(H) = \emptyset.$$

2.3.10 Hệ quả

Với X là không gian con phức của không gian phức Y ta có các phát biểu sau đây là tương đương:

- (1) X là nhúng hyperbolic trong Y .
- (2) Với mỗi dãy $\{f_n\}$ trong $\overline{H(D^*, X)}$, có lưới con $\{f_m\}$ của $\{f_n\}$ sao cho $\overline{\lim} f_m(V \cap D^*)$ là tập một điểm với mỗi $x \in D$.
- (3) Với mỗi dãy $\{f_n\}$ trong $\overline{H(D^*, X)}$ có lưới con $\{f_m\}$ của $\{f_n\}$ sao cho $\{f_m(V \cap D^*)\}_x$ có điểm tụ mạnh trong Y với mỗi $x \in D$.
- (4) Với mỗi dãy $\{f_n\}$ trong $\overline{H(D^*, X)}$, có dãy con $\{f_{n_k}\}$ của $\{f_n\}$ sao cho $\overline{\lim} f_{n_k}^{-1}(K_1) \cap \overline{\lim} f_{n_k}^{-1}(K_2) = \emptyset$ với mỗi cặp tập hợp đóng rời nhau $K_1, K_2 \subset Y$.
- (5) Nếu $\{f_n\}$ là dãy trong $\overline{H(D^*, X)}$, có dãy con $\{f_{n_k}\}$ của $\{f_n\}$ thỏa mãn nếu $y, z \in Y; y \neq z$, thì tồn tại $W \in \Sigma(y), H \in \Sigma(z)$ thỏa mãn $\overline{\lim} f_{n_k}^{-1}(W) \cap \overline{\lim} f_{n_k}^{-1}(H) = \emptyset$.

Nhận xét

Trong các hệ quả 2.3.9 và 2.3.10, D^* có thể thay bởi $M - A$ với M là đa tạp phức và A là divisor có giao chuẩn tắc trong M . Các lưới con trong tương đương (4) và (5) của hệ quả 2.3.9 và trong tương đương (2) và (3) của hệ quả 2.3.10 có thể lấy là dãy.

Các kết quả sau là các định lý dạng Định lý Ascoli:

2.3.11 Định lý

Cho Y là không gian chính quy (không nhất thiết là k - không gian) và $\Omega \subset C(X, Y)$ thỏa mãn $\Omega(x)$ là compact tương đối trong Y với mỗi $x \in X$.

Các phát biểu sau đây là tương đương :

- (1) Ω là liên tục đồng đều.
- (2) Với mỗi lưới $\{f_\alpha\}$ trong Ω , có lưới con $\{f_{\alpha_\mu}\}$ của $\{f_\alpha\}$, sao cho

$\overline{\lim} f_{\alpha_\mu}^{-1}(K) \cap \overline{\lim} f_{\alpha_\mu}^{-1}(M) = \emptyset$ với mỗi cặp tập hợp con đóng rời nhau K, M của Y .

(3) Với mỗi lưới $\{f_\alpha\}$ trong Ω , có lưới con $\{f_{\alpha_\mu}\}$ của $\{f_\alpha\}$, sao cho với mỗi $x \in X$, $\{f_{\alpha_\mu}(V)\}_x$ có điểm tụ mạnh trong Y .

Chứng minh

(1) \Rightarrow (2) : Lập luận tương tự chứng minh (1) \Rightarrow (2) của định lý 2.3.6.

(2) \Rightarrow (3) : Giả sử $f_\alpha(x) \rightarrow y$, cho $W \in \Sigma(y), H \in \Sigma(z)$ sao cho $\bar{H} \subset W, x \in \overline{\lim} f_{\alpha_\mu}^{-1}(\bar{H})$ với mỗi lưới con $\{f_{\alpha_\mu}\}$ của $\{f_\alpha\}$.

Với mỗi lưới con $\{f_{\alpha_\mu}\}$ của $\{f_\alpha\}$ từ giả thiết (2), ta có $x \notin \overline{\lim} f_{\alpha_\mu}^{-1}(Y - W)$.

Từ đó $f_{\alpha_\mu}(V) \subset W$.

(3) \Rightarrow (1) : Giả sử $x \in X, y \in Y$, lưới $\{(f_\alpha, x_\alpha)\}$ trong $\Omega \times X$ và $W \in \Sigma(y)$ thỏa mãn $x_\alpha \rightarrow x, f_\alpha(x_\alpha) \in Y - W$ với mọi α và $f_\alpha(x) \rightarrow y$. Khi đó không có lưới con $\{f_{\alpha_\mu}\}$ của $\{f_\alpha\}$ để $\{f_{\alpha_\mu}(V)\}$ có điểm tụ mạnh. Mâu thuẫn này suy ra định lý được chứng minh.

2.3.12 Hệ quả

Cho Y là không gian chính quy (không nhất thiết là k - không gian). Khi đó $\Omega \subset C(X, Y)$ là compact tương đối nếu và chỉ nếu $\Omega(x)$ là compact tương đối trong Y với mỗi $x \in X$ và Ω thỏa mãn hoặc là điều kiện (2) hoặc là điều kiện (3) của định lý 2.3.11.

KẾT LUẬN

Trong luận văn này, chúng tôi đã tìm hiểu các kết quả của J. Joseph và M. Kwack trong việc chứng minh K^3 – định lý và định lý thác triển hội tụ của Noguchi bằng phương pháp hoàn toàn dựa vào các tính chất tôpô của không gian hàm. Cụ thể là các kết quả sau :

Tổng quát hóa các kết quả của Kiernan, Kobayashi, Kwack và Noguchi về thác triển ánh xạ chỉnh hình giữa các không gian phức bằng cách đưa ra định nghĩa và thiết lập tính chất đặc trưng của tính chất κ (định lý 2.2.4, 2.2.6, 2.2.10; mệnh đề 2.2.5, 2.2.7, 2.2.9) đưa ra các chứng minh chi tiết và các ví dụ minh họa (ví dụ 2.2.11, 2.2.12, 2.2.13).

Khái quát hóa tính chất κ (định lý 2.3.6, 2.3.8; hệ quả 2.3.7) và đưa ra tính chất đặc trưng của tính hyperbolic và tính nhúng hyperbolic của không gian phức (hệ quả 2.3.9, 2.3.10).

Chúng tôi chứng minh lại sự mở rộng cho tính hyperbolic và tính nhúng hyperbolic của không gian phức.

Cuối cùng chúng tôi nhắc lại các định lý dạng định lý Ascoli.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] **N. Bourbaki and J. Dieudonné** (1939), *Note de T ratopologie II*, Rev. Questions Sci. **77**, 180 – 181.
- [2] **J. Dugundji** (1996), *Topology*, Allyn and Bacon, Boston.
- [3] **J. E. Joseph and M. H. Kwack** (1994), *Hyperbolic imbedding and space of continuous extensions of holomorphic maps*, J. Geometric Analysis, v.4, 361 – 378.
- [4] **J. E. Joseph and M. H. Kwack** (1995), *The topological nature of two Noguchi theorems on sequences of holomorphic mappings between complex spaces*. Canadian. J. Math. 47 no. 6, 1240 – 1252.
- [5] **M. Kwack** (1969), *Generalization of the big Picard theorem*, Ann. Math. 90, 9 – 22 .
- [6] **P. Kiernan** (1973), *Hyperbolically inbedded spaces and the big Picard theorem*, Math. Ann. 204, 203 – 209 .
- [7] **S. Kobayashi** (1998), *Hyperbolic Complex Space*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, 318.
- [8] **S. Lang** (1987), *Introduction to Complex Hyperbolic Space*, Springer Verlag.
- [9] **A. D Ta manov** (1952), *On the extension of continuous mappings of topogical space*, (Russian) Mat. Sb. 31, 459 – 462.