

الحمد لله وحده نحمده ونشكره ونستعين به ونستغفره

ومن سيئات أعمالنا
من يهده الله فلا مضل له ومن يضلل فلا هادي له
أشهد أن لا إله إلا الله وحده لا شريك له
وأشهد أن محمدا عبده ورسوله
صلى الله عليه وسلم وعلى آله وصحبه أجمعين
ومن تبعهم بالإحسان الى يوم الدين
, إنك أنت العليم الخبير
ربنا لا فهم لنا إلا ما أفهمتنا, إنك أنت الجواد الكريم
ربي اشرح لي صدري ويسر لي أمري واحلل لي
... ة لساني يفقهوا قولي

فإن أصدق الحديث كتاب الله تعالى وخير الهدي, هدي
سيدنا محمد صلى الله عليه وسلم تسليما
وشر الأمور محدثاتها وكل محدثة بدعة وكل بدعة ضلالة

فاللهم أجرنا وقنا عذابها برحمتك يا ارحم
الراحمين

<http://enstp.web.officelive.com>

بسم الله الرحمن الرحيم

« اللهم بك أصبحنا، وبك أمسينا، وبك فينا، وبك نموت
واليك النشور »

- إذا أصبحت -

« اللهم إني أصبحت أشهدك وأشهد حملة عرشك ،
وملائكتك وجميع خلقك أنك أنت الله لا إله إلا أنت
وحدك لا شريك لك ، وأن محمداً عبدك ورسولك »
- 4 مرات -

« سبي الله لا إله إلا هو عليه توكلت وهو رب العرش
العظيم »

- 7 مرات -

« رضيت بالله رباً، وبالإسلام ديناً، وبمحمد صلى الله عليه
وسلم نبياً »

- 3 مرات -

« سبحان الله وحده : عدد خلقه ، ورضا نفسه ، وزنة
عرشه و مبادئ كلماته »

- 3 مرات -

« أستغفر الله وأتوب إليه »

- 100 مرة -

إِذَا أَتَيْتَ مَضْجَعَكَ، فَتَوَضَّأْ وَضُوءَكَ لِلصَّلَاةِ، ثُمَّ اضْطَجِعْ عَلَى شِقِّكَ
الْأَيْمَنِ، ثُمَّ قُلْ : اللَّهُمَّ أَسْلَمْتُ وَجْهِيَ إِلَيْكَ، وَفَوَّضْتُ أَمْرِي إِلَيْكَ،
وَأَلْجَأْتُ ظَهْرِي إِلَيْكَ، رَغْبَةً وَرَهْبَةً إِلَيْكَ، لَا مَلْجَأَ وَلَا مَنْجَى مِنْكَ إِلَّا إِلَيْكَ،
اللَّهُمَّ آمَنْتُ بِكِتَابِكَ الَّذِي أَنْزَلْتَ، وَنَبِيِّكَ الَّذِي أَرْسَلْتَ. فَإِنْ مِتَّ مِنْ
لَيْلَتِكَ، فَأَنْتَ عَلَى الْفِطْرَةِ، وَاجْعَلْهُنَّ آخِرَ مَا تَكَلَّمُ بِهِ

مَنْ نَامَ عَلَى وَضُوءٍ فَأَذْرَكَهُ الْمَوْتُ فِي تِلْكَ اللَّيْلَةِ فَهُوَ عِنْدَ اللَّهِ شَهِيدٌ
مَنْ تَوَضَّأَ فَأَحْسَنَ الْوُضُوءَ خَرَجَتْ خَطَايَاهُ مِنْ جَسَدِهِ حَتَّى تَخْرُجَ مِنْ تَحْتِ
أَظْفَارِهِ

إِذَا تَوَضَّأَ الْعَبْدُ الْمُسْلِمُ أَوْ الْمُؤْمِنُ فَعَسَلَ وَجْهَهُ خَرَجَ مِنْ وَجْهِهِ كُلُّ خَطِيئَةٍ
نَظَرَ إِلَيْهَا بِعَيْنَيْهِ مَعَ الْمَاءِ، أَوْ مَعَ آخِرِ قَطْرِ الْمَاءِ، فَإِذَا غَسَلَ يَدَيْهِ خَرَجَ
كُلُّ خَطِيئَةٍ كَانَ بَطَشَتْهَا يَدَاهُ مَعَ الْمَاءِ، أَوْ مَعَ آخِرِ قَطْرِ الْمَاءِ، فَإِذَا غَسَلَ
رِجْلَيْهِ خَرَجَتْ كُلُّ خَطِيئَةٍ مَشَتْهَا رِجْلَاهُ مَعَ الْمَاءِ أَوْ مَعَ آخِرِ قَطْرِ الْمَاءِ
حَتَّى يَخْرُجَ نَقِيًّا مِنَ الذُّنُوبِ

عايض القرني

SOMMAIRE

▪ INTRODUCTION	1
▪ DEGRE DE LIBERTE	5
▪ MATRICE DE RIGIDITE	9
▪ MATRICE DE TRANSFORMATION	14
▪ TECHNIQUE D'ASSEMBLAGE	18
▪ EXEMPLES	24

1. INTRODUCTION :

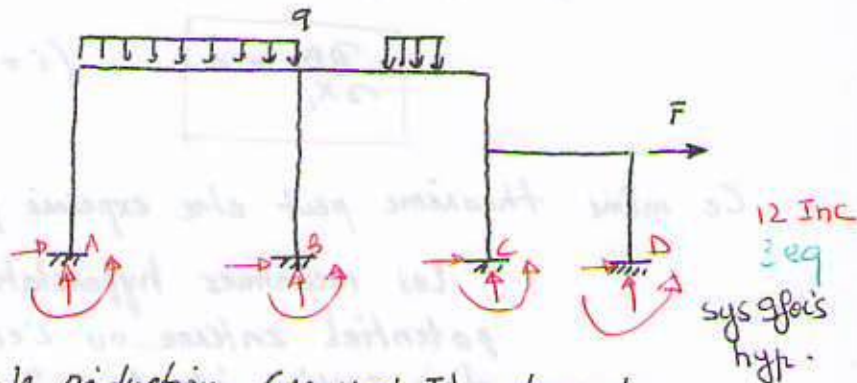
Rappels sur La methode des forces.

Pour le calcul des structures (principalement hyperstatiques), La resistance des materiaux propose deux grandes methodes :

- La methode des Forces
- La methode des déplacements

Dans la methode des forces, les inconnues choisies sont des forces (au sens large). Ce qui determine le degre d'hyperstatite de la structure.

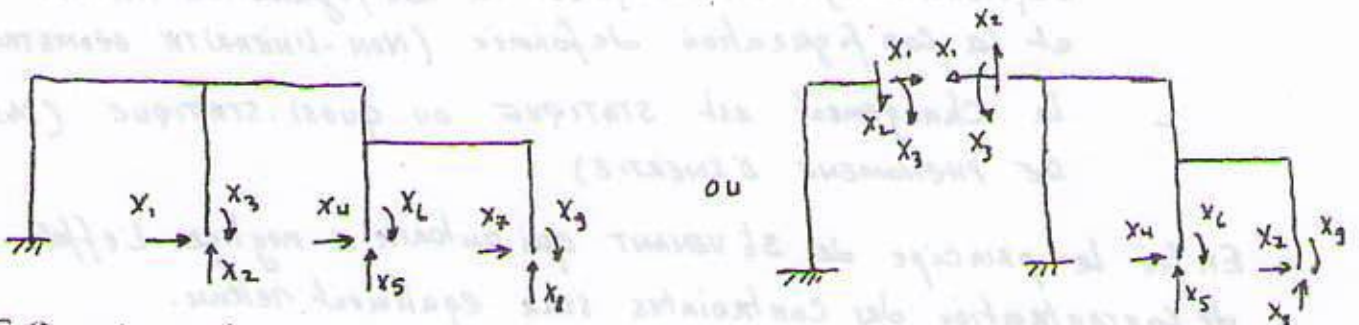
Par exemple L'ossature ci-contre est neuf (9) fois hyperstatique



Pour determiner les elements de reduction (M, N et T) dans la structure ; il y a lieu d'abord de calculer les INCONNUES HYPERSTATIQUES X_i ($i=1, 9$) $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_9 \end{pmatrix}$

LE CHOIX de ces inconnues reste a l'appréciation du calculateur et plusieurs SCHEMAS peuvent etre envisages dans le choix du SYSTEME ISOSTATIQUE FONDAMENTAL

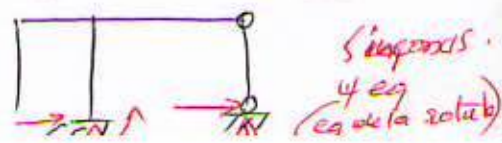
Pour la même ossature on peut avoir plusieurs schémas possibles :



1^{er} = Systeme isostatique fondamental.

- 1 -

Si on a choisit



Le système d'équations a été établi pour la détermination de ces inconnues s'écrit en appliquant le 2ème théorème de CASTIGLIANO

" La dérivée partielle du potentiel interne par rapport à une force donnée (au sens large), exprime le déplacement correspondant."

Par "Correspondant"; on entend le déplacement du point d'application de la force et dans la direction de cette force.

Dans le cas qui nous intéresse, les déplacements correspondants sont nuls; ce qui permet d'écrire:

$$\boxed{\frac{\partial W}{\partial X_i} = 0} \quad (i = 1, 9)$$

Ce même théorème peut être exprimé par:

" Les inconnues hyperstatiques minimisent le potentiel interne ou l'énergie de déformation d'un système élastique "

Ce qui permet de rappeler; dans le cadre qui nous intéresse;
Les HYPOTHESES RETENUES:

- Le système est élastique (Loi de Hooke vérifiée); il n'y a pas de phénomène de NON-LINEARITE MECANIQUE (plasticité....)
- Les déplacements sont petits (et par suite les déformations) - on confond la configuration initiale et la configuration déformée (NON-LINEARITE GEOMETRIQUE)
- Le chargement est STATIQUE ou QUASI-STATIQUE (PAS DE PHENOMENE D'INERTIE)

Enfin le principe de ST. VENANT qui autorise à négliger l'effet de concentration des contraintes sera également retenu.

$$W = \int_{\text{structure}} \frac{1}{2} \frac{M^2}{EI} dS + \int_S \frac{1}{2} \frac{N^2}{E\Omega} dS + \int_S \frac{1}{2} \frac{T^2}{G\Omega} dS$$

L'énergie de déformation W , devra être évaluée pour toute la structure

$$W = \int_{\text{structure}} \frac{1}{2} \frac{M^2}{EI} ds + \int_{\text{struct.}} \frac{1}{2} \frac{N^2}{ES} ds + \int_{\text{struct.}} \frac{1}{2} \frac{T^2}{GS} ds$$

I, S, S' représentent les caractéristiques géométriques respectivement ; Moment d'inertie, section et section réduite.

E et G : Module d'élasticité et de cisaillement.

Pour les éléments courants (hauteur de la section relativement faible par rapport à la longueur) et dans le cas où l'effet de l'effort normal n'est pas prépondérant, on peut retenir le terme de la flexion seulement (HYPOTHESE DE BERNOLLI)

Le système d'équations s'écrit alors :

$$[S_{ij}] \cdot \{X_j\} + \{S_{ip}\} = 0$$

$$W = \frac{1}{2} \int \frac{M^2}{EI} ds$$

$$v = f(x_i)$$

$$\frac{\partial W}{\partial x_i} = 0 \quad \{i=1 \dots 9\}$$

$[S_{ij}]$ est une matrice d'ordre (n) correspondant au nombre d'inconnues hyperstatiques.

S_{ij}
matrice
de souplesse
 x_j : vecteur

C'est une certaine forme de "MATRICE DE SOUPLESSE" puisque ses éléments correspondent à des facteurs de souplesse

des inc. hyperst. FACTEUR DE SOUPLESSE : "Déplacement obtenu pour un effort unitaire"

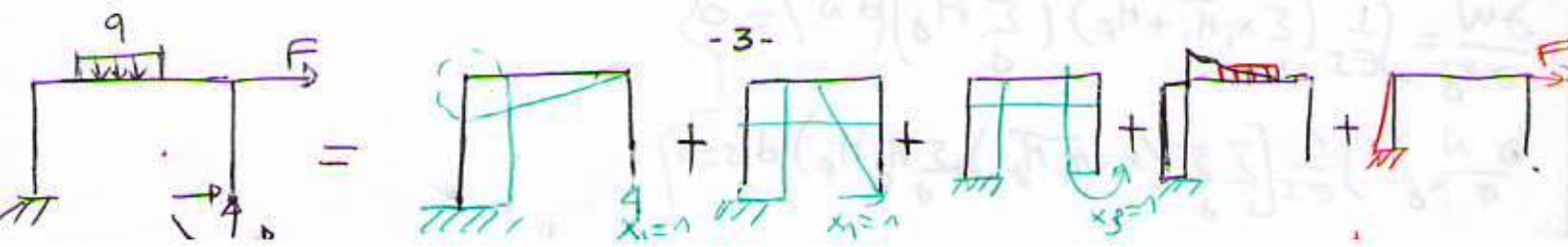
S_{ip} : vecteur de force
En effet :

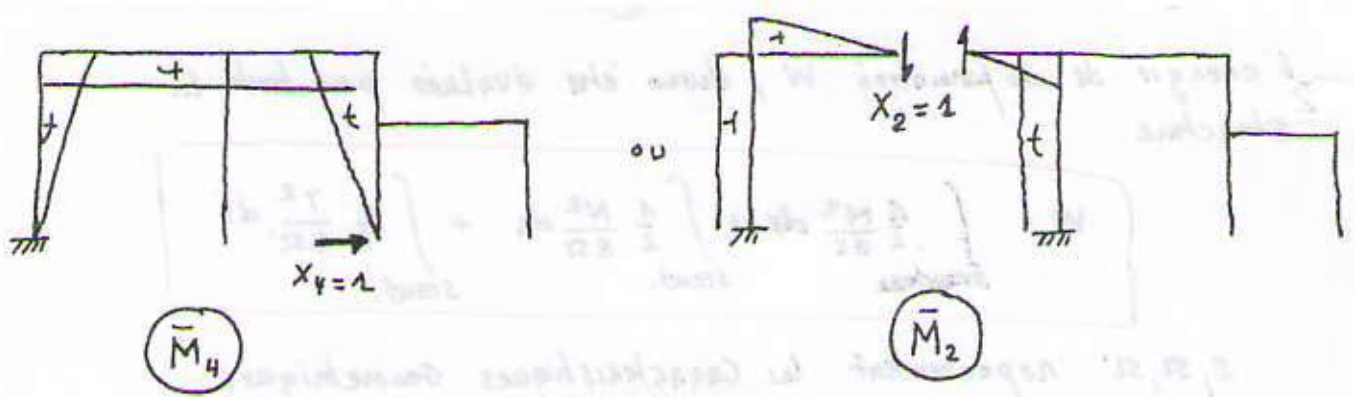
$$S_{ij} = \int \frac{\bar{M}_i \bar{M}_j}{EI} ds$$

\bar{M}_i ou \bar{M}_j : Moment de flexion dans la structure due à l'inconnue hyperstatique X_i ou $X_j = 1$

Par exemple dans le cas de l'ossature à l'étude ;

$$x_1 \bar{M}_1 + x_2 \bar{M}_2 + x_3 \bar{M}_3 + \bar{M}_F$$





$\{S_{ij}\}$ est un vecteur d'ordre (n) donné par :

$$S_{ij} = \int \frac{\bar{M}_i M_j}{EI} ds$$

ou M_j ; représente le moment de flexion dans le système isostatique fondamental du aux charges données.

Par ailleurs la matrice $[S_{ij}]$ est symétrique. Ceci peut être facilement montré par le théorème de MAXWELL-BETTI ou directement d'après la relation donnant S_{ij} ; puisque \bar{M}_i et \bar{M}_j jouent des rôles symétriques.

ON REMARQUERA QUE SI LA METHODE EST PEDAGOGIQUEMENT très puissante (UTILISATION DE THEOREMES GENERAUX SUR LES SYSTEMES ELASTIQUES et procedure visuelle très visuelle) ; elle demeure néanmoins très difficile d'utilisation dans un CALCUL AUTOMATIQUE puisque à chaque structure peut correspondre plusieurs choix de système ISOSTATIQUE FONDAMENTAUX.

$$M = \sum X_i \bar{M}_i + M_F$$

$$\frac{dM}{dX_j} = \sum \bar{M}_j$$

$$\frac{\partial W}{\partial X_j} = \int \frac{M}{EI} \frac{dM}{dX_j} ds = 0$$

-4-

$$\frac{\partial W}{\partial X_j} = \int \frac{1}{EI} \left(\sum_i X_i \bar{M}_i + M_F \right) \left(\sum_j \bar{M}_j \right) ds = 0$$

$$\frac{\partial W}{\partial X_j} = \int \frac{1}{EI} \left[\sum_i \sum_j (X_i \bar{M}_i \bar{M}_j) + \sum_j \bar{M}_j M_F \right] ds = 0$$

$$\frac{\partial W}{\partial X_j} = \sum_j \left[\sum_i \frac{1}{EI} X_i \bar{M}_i \bar{M}_j \right] + \sum_j \left[\frac{1}{EI} \bar{M}_j M_F \right] ds = 0$$

$$[S_{ij}] + [X_j] + [S_{jP}] = 0$$

j, i, P

2. DEGRE DE LIBERTÉ

- Dans la méthode des déplacements ; les inconnues choisies sont des déplacements ou des degrés de liberté.

- Le caractère physique du déplacement se prête plus facilement à une technique de détermination automatique ; contrairement à une force qui est un concept dans la mesure est déduite à partir d'une mesure d'un déplacement.

Dans le plan une section donnée possède trois déplacements possibles ou trois degrés de liberté :

- Les deux translations (u) et (v)
- La rotation (θ)

Une poutre, constituée de plusieurs sections possède théoriquement une infinité de degrés de liberté.



Cependant, en regard à la continuité de la poutre et aux équations gouvernant la déformée [par exemple équations de BRESSE] on peut estimer que la connaissance des déplacements aux EXTRIMITÉS (nœuds) de la poutre est suffisante pour en déduire la déformation complète de la poutre.

On peut donc représenter une poutre par les deux nœuds extrêmes (origine - extrémité) et la connaissance des déplacements de ces deux nœuds est suffisante pour connaître complètement le Comportement de ce milieu.



les équations de BRESSE, donnent les déplacements u, v, θ d'un point quelconque de la poutre.

$$u = u_A - \int_{x_0}^x \frac{N}{ES} dx$$

$$v = v_A + \theta_A(x - x_0) + \int_{x_0}^x \frac{M(x-\xi)}{EI} d\xi - \int_{x_0}^x \frac{T}{GSt} d\xi$$

$$\theta = \theta_A + \int_{x_0}^x \frac{M}{EI} dx$$

ON PEUT DONC SANS AMBIGÜITÉ se référer simplement aux déplacements possible des sections (ou noeuds) extrêmes

AINSI UNE POUTRE DANS LE PLAN POSSEDE 6 DEPLACEMENTS POSSIBLES OU SIX (6) DEGRÉS DE LIBERTÉ

Le NOMBRE DE DEGRÉS DE LIBERTÉ D'UNE STRUCTURE, CONSTITUÉE PAR UN ASSEMBLAGE DE POUTRES POURRAIT SE DEDUIRE A PARTIR DES CONSIDÉRATIONS CI-DESSUS

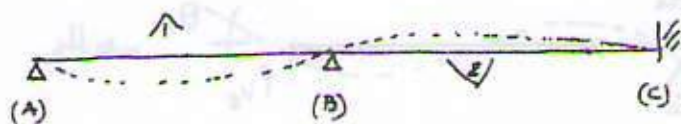
NOMBRE DE DEGRÉ DE LIBERTÉ D'UNE STRUCTURE = NOMBRE D'INDÉTERMINATION CINÉMATIQUE DE LA STRUCTURE

Par indétermination cinématique : on entend les déplacements possibles de la structure compatibles avec les liaisons existantes

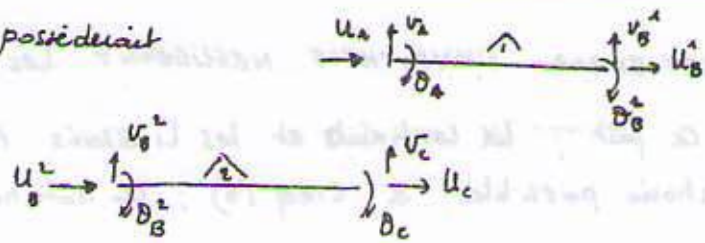
Le nombre de degré de liberté ainsi défini (HYPOTHÈSES RETENUES) est unique ; et il est important dans leur détermination de les définir tous sans pour autant en définir plus (REDONDANT)

Pour fixer les idées ; nous donnons dans les exemples ci-après quelques exemples pour la détermination du nombre de degrés de liberté d'une structure.

Pour la poutre précédente :



- l'élément de poutre $\triangle 1$ posséderait
- de même l'élément $\triangle 2$



Ceci représente un bilan exhaustif de tous les degrés de liberté ou déplacements possibles de la structure.

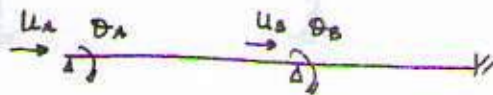
* Cependant la CONTINUITÉ AU NOEUD (B) impose :

$$u_B^1 = u_B^2 = u_B \quad ; \quad \theta_B^1 = \theta_B^2 = \theta_B \quad \text{et} \quad \theta_B^2 = \theta_B^1 = \theta_B$$

* PAR ailleurs LES CONDITIONS DE LIAISONS de la structure permettent la détermination de certains degrés de liberté soit :

$$u_A = u_B = u_C = 0 \quad ; \quad \theta_C = 0 \quad \text{et} \quad u_C = 0$$

Finalement la structure possède les quatre degrés de liberté restants :

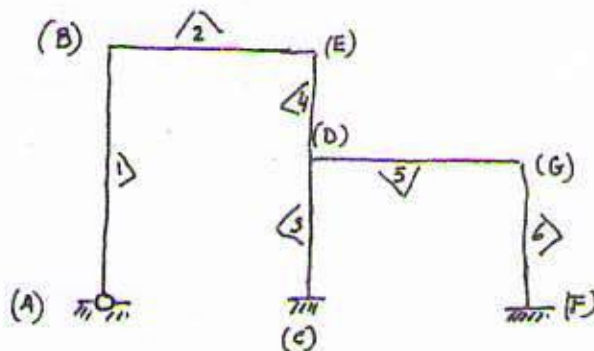


* DE PLUS SI NOUS RETENONS L'HYPOTHÈSE DE NÉGLIGER LES DÉFORMATIONS AXIALES

du fait que $u_C = 0$ alors $u_B = u_A = 0$

Avec cette hypothèse ; La structure ne possède que deux degrés de liberté : les rotations θ_A et θ_B

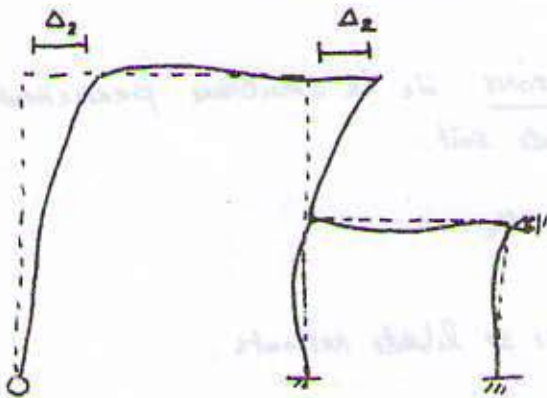
Exemple 2



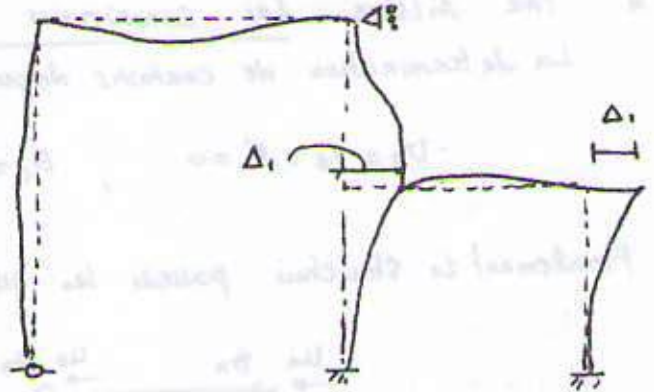
* ON RETIENDRA L'HYPOTHESE NEGLIGEANT LES DÉFORMATIONS AXIALES
 DE CE FAIT ; la continuité et les liaisons réduisent le nombre de
 rotations possibles à cinq (5) ; les rotations $\theta_A, \theta_B, \theta_D, \theta_E$ et θ_G

Nous avons par ailleurs une possibilité de DÉVERSÈMENT LATÉRAL de
 la structure et il s'agit d'en déterminer le NOMBRE DE DÉVERSÈMENT
POSSIBLE ?

En fixant le 1^{er} niveau :



En fixant le 2^{ème} niveau :



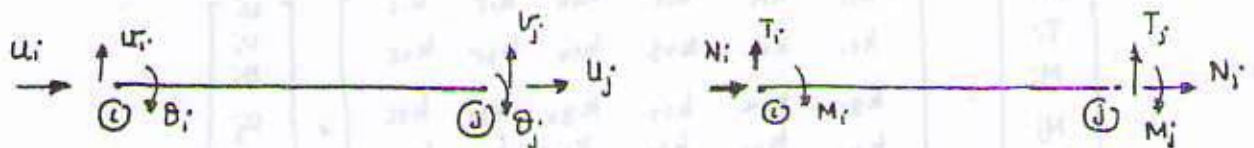
Ainsi la structure à l'étude possède au total Sept (7) degrés de
 liberté ; cinq rotations [$\theta_A, \theta_B, \theta_D, \theta_E$ et θ_G] et deux déversements
 Latéraux [Δ_1 et Δ_2]



③

MATRICE DE RIGIDITE DES ELEMENTS

La déformation d'un élément de la structure est représentée par les déplacements des noeuds qui le déterminent.



on remarquera que les déplacements (D.D.L) et les efforts aux noeuds sont représentés dans ce cas dans un système LOCAL ; lié à la barre ou la poutre (au noeud i vers le noeud j)

Le problème qui est posé est de lier le vecteur $[u_i, v_i, \theta_i, u_j, v_j, \theta_j]^T$ représentant les déplacements au vecteur $[N_i, T_i, M_i, N_j, T_j, M_j]^T$ représentant les efforts aux noeuds

Par Analogie à la relation $f = k \cdot x$ liant l'effort dans un ressort due à un déplacement (x) en fonction de la rigidité k

k : est un facteur de rigidité ; qui est donc l'effort produit par un déplacement unitaire $x=1$

La relation précédente lie un seul effort (f) à un seul degré de liberté (x)

Si l'on GÉNÉRALISE ; on peut donc écrire la relation

$$[f] = [k][S]$$

avec $[f] = [N_i, T_i, M_i, N_j, T_j, M_j]^T$

et $[S] = [u_i, v_i, \theta_i, u_j, v_j, \theta_j]^T$

$[f]$ et $[S]$ étant des vecteurs de dimension (6×1) ; la matrice

$[k]$ devra donc être de dimension (6×6) et chacun de ses coefficients k_{ij} représentera un facteur de rigidité ; c'est à dire l'effort produit par un déplacement unitaire

Pour déterminer les coefficients de rigidité k ; il faudrait donc calculer les efforts induits par chaque déplacement unitaire

Si on écrit :

$$\begin{bmatrix} N_i \\ T_i \\ M_i \\ N_j \\ T_j \\ M_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} & k_{16} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} & k_{26} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} & k_{35} & k_{36} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} & k_{45} & k_{46} \\ k_{51} & k_{52} & k_{53} & k_{54} & k_{55} & k_{56} \\ k_{61} & k_{62} & k_{63} & k_{64} & k_{65} & k_{66} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ \theta_i \\ u_j \\ v_j \\ \theta_j \end{bmatrix}$$

- Le coefficient k_{11} représente l'effort Normal induit par $u_i = 1$
- Le coefficient k_{21} représente l'effort tranchant induit par $u_i = 1$

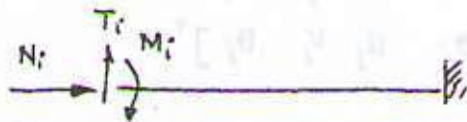
Pour déterminer tous ces coefficients on donne successivement aux déplacements $u_i, v_i, \theta_i, u_j, v_j, \theta_j$ la valeur unitaire alors que tous les autres déplacements restent bloqués.

1// DÉPLACEMENT UNITAIRE $U_i = 1$

Le problème consiste à résoudre la structure suivante



On utilise la méthode de forces pour le résoudre. Soit le choix du système statique fondamental



les équations à établir :

$$\frac{\partial W}{\partial N_i} = 0 \quad \frac{\partial W}{\partial T_i} = 1$$

et

$$\frac{\partial W}{\partial M_i} = 0$$

(par application du théorème de CASTIGLIANO)

W ; représente l'énergie de déformation dans la poutre

ON RETIENT L'HYPOTHÈSE DE L'ÉNERGIE DE FLEXION SEULEMENT

alors:

$$W = \int_0^L \frac{1}{2} \frac{M^2}{EI} ds$$

L'expression du Moment interne s'écrit $M(x) = M_i + T_i x$

On remarquera que cette expression suppose que la configuration déformée a été assimilée à la configuration initiale (droite) et que nous avons donc négligé les effets du second ordre (effet de N_i sur le moment interne)

$$\frac{\partial W}{\partial N_i} = \int \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial N_i} dx = 0 \quad \text{Comme } \frac{\partial M}{\partial N_i} = 0 \quad \text{l'équation est identiquement nulle avec } N_i = 0$$

$$\frac{\partial W}{\partial T_i} = \int_0^L \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial T_i} dx = 1 = \int_0^L \frac{1}{EI} (M_i + T_i x) (x) dx$$

$$\text{Si } EI = \text{constante dans la poutre alors } \frac{1}{EI} \left[M_i \frac{L^2}{2} + T_i \frac{L^3}{3} \right] = 1 \quad (1)$$

$$\frac{\partial W}{\partial M_i} = \int_0^L \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial M_i} dx = 0 = \int_0^L \frac{1}{EI} (M_i + T_i x) (1) dx$$

$$\text{soit : } M_i L + T_i \frac{L^2}{2} = 0 \quad (2)$$

La résolution de (1) et (2) donne :

$$T_i = \frac{12EI}{L^3} \quad \text{et} \quad M_i = -\frac{6EI}{L^2}$$

On obtient donc pour $U_i = 1$ ($u_i = u_j = v_j = \theta_i = \theta_j = 0$)

$$N_i = 0$$

$$T_i = \frac{12EI}{L^3} \quad \text{et} \quad M_i = -\frac{6EI}{L^2}$$

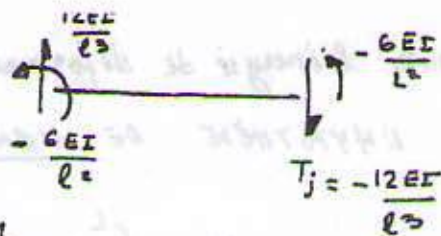
on a ainsi obtenu les coefficients de rigidité

$$k_{21} = 0$$

$$k_{22} = \frac{12EI}{L^3}$$

$$\text{et} \quad k_{23} = -\frac{6EI}{L^2}$$

L'équilibre de la poutre :



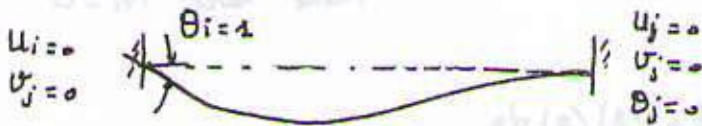
on a donc toujours pour $U_j = 1$

$$N_j = 0 \quad T_j = -\frac{12EI}{L^2} \quad \text{et} \quad M_j = -\frac{6EI}{L^2}$$

Soit les Coefficients de rigidité :

$$k_{24} = 0 \quad k_{25} = -\frac{12EI}{L^2} \quad \text{et} \quad k_{26} = -\frac{6EI}{L^2}$$

2°) DÉPLACEMENT UNITAIRE $\Theta_i = 1$



$$\frac{\partial W}{\partial N_i} = 0$$

$$\frac{\partial W}{\partial T_i} = 0$$

$$\frac{\partial W}{\partial M_i} = 1$$

La procédure décrite précédemment conduit aux facteurs de rigidité :

$$k_{31} = 0 \quad k_{32} = -\frac{6EI}{L^2} \quad k_{33} = \frac{4EI}{L}$$

$$k_{34} = 0 \quad k_{35} = \frac{6EI}{L^2} \quad \text{et} \quad k_{36} = \frac{2EI}{L}$$

REMARQUE :

- on pourra remarquer que $k_{23} = k_{32} = -\frac{6EI}{L^2}$

IL FAIT CETTE REMARQUE EST GÉNÉRALE POUR LES COEFFICIENTS DE RIGIDITÉ à SAVOIR

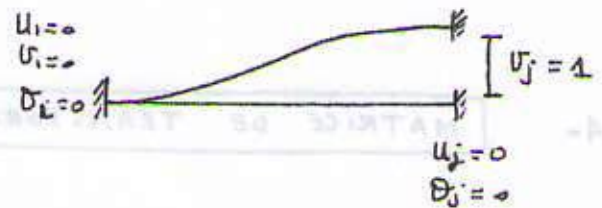
$$k_{\alpha m} = k_{m \alpha} \quad \alpha, m = 1, 6$$

Cette propriété provient d'un théorème plus général, le

THÉORÈME DE MAXWELL-BETTI

La matrice $[k]$ est donc symétrique

Tous les autres coefficients seront obtenus en considérant tous LES MODS DE DÉFORMATION DE LA POUTRE



FINALEMENT ON PEUT ECRIRE :

$$\begin{bmatrix} N_i \\ T_i \\ M_i \\ N_j \\ T_j \\ M_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EQ}{L} & 0 & 0 & -\frac{EQ}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EQ}{L} & 0 & 0 & \frac{EQ}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ \theta_i \\ u_j \\ v_j \\ \theta_j \end{bmatrix}$$

LA MATRICE DE RIGIDITE PRECEDENTE peut etre specialisee pour une barre ou un element de treillis.

Il suffit d'eliminer les degres de liberte qui ne sont pas actifs et de retenir simplement u_i et u_j .

Soit:

$$\begin{bmatrix} N_i \\ N_j \end{bmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ u_j \end{bmatrix}$$



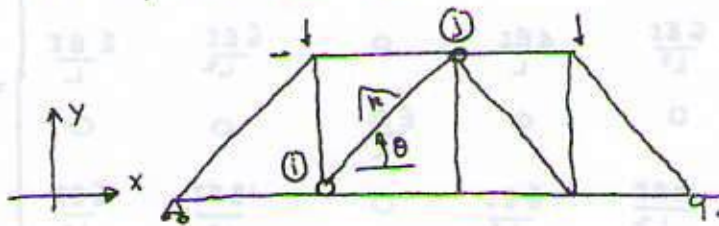
4.

MATRICE DE TRANSFORMATION

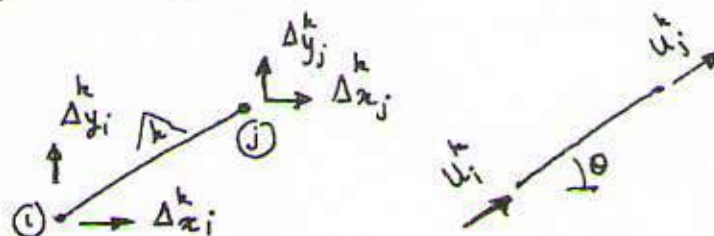
Au fait les matrices de rigidite [poutre ou barre de treillis] donnees ci-dessus sont exprimees dans un repere Local lie a l'element.

Dans un calcul de structure constituees par un ensemble d'elements les equations d'equilibre sont ecrites dans un repere GLOBAL, dans lequel on repere la structure.

Aussi, il est necessaire de pouvoir exprimer ces matrices de rigidite dans un systeme GLOBAL.



Si l'on s'interesse a la barre h du treillis ci-dessus on peut repérer les degres de liberte dans les deux repères [LOCAL et GLOBAL]



on pourra noter :

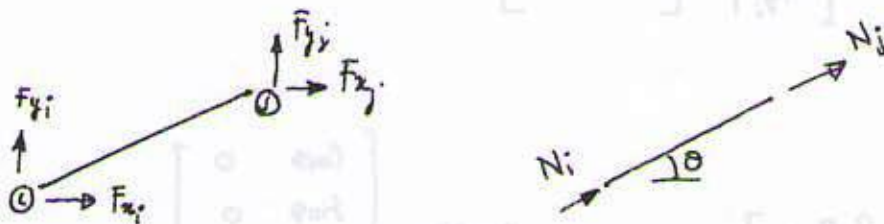
$$[S]^k = [u_i \ u_j]^k{}^T \quad \text{D.D.L (Hydrom Local)}$$

$$\text{et } [\Delta]^k = [\Delta x_i \ \Delta y_i \ \Delta x_j \ \Delta y_j]^k{}^T \quad \text{D.D.L (GLOBAL)}$$

De même

$$[f]^k = [N_i^k \ N_j^k]^T$$

$$\text{et } [F]^k = [F_{x_i}^k \ F_{y_i}^k \ F_{x_j}^k \ F_{y_j}^k]^T$$



Nous avons établi :

$$[f]^k = [k]^k [S]^k \quad \text{ou } [f] = [k] [S]$$

Nous voulons établir :

$$[F] = [K_G] [\Delta]$$

On peut toujours déterminer : $[S] = [R] [\Delta]$

ou $[R]$ est une matrice de transformation :

Par exemple dans le cas Concideré :

$$u_i = \Delta x_i \cos \theta + \Delta y_i \sin \theta$$

$$u_j = \Delta x_j \cos \theta + \Delta y_j \sin \theta$$

que l'on peut écrire sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} u_i \\ u_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta & \sin \theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta x_i \\ \Delta y_i \\ \Delta x_j \\ \Delta y_j \end{bmatrix}$$

De même on peut écrire :

$$[f] = [R][F]$$

ou

$$[F] = [R^{-1}][f]$$

$$F_{xi} = N_i \cos \theta$$

$$F_{xj} = N_j \cos \theta$$

$$F_{yi} = N_i \sin \theta$$

$$F_{yj} = N_j \sin \theta$$

qui peut s'écrire :

$$\begin{bmatrix} F_{xi} \\ F_{yi} \\ F_{xj} \\ F_{yj} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 \\ \sin \theta & 0 \\ 0 & \cos \theta \\ 0 & \sin \theta \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} N_i \\ N_j \end{bmatrix}$$

on a donc :

$$[R] = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta & \sin \theta \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad [R^{-1}] = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 \\ \sin \theta & 0 \\ 0 & \cos \theta \\ 0 & \sin \theta \end{bmatrix}$$

on remarquera que $[R^{-1}] = [R]^T$

Pourtant de la :

$$[f] = [k][\delta]$$

$$[R][F] = [k][R][\Delta]$$

$$[R^{-1}].[R].[F] = [R^{-1}][k][R][\Delta]$$

$$[F] = \underbrace{[R^T][k][R]}_{[K_G]} [\Delta]$$

$$\text{Soit } [K_G] = [R^T][k][R]$$

$[K_G]$ est encore une matrice symétrique.

Le développement pour le cas d'une barre de treillis donne.

$$[K_G] = \frac{ES}{L} \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \cos\theta \sin\theta & -\cos^2\theta & -\cos\theta \sin\theta \\ \cos\theta \sin\theta & \sin^2\theta & -\sin\theta \cos\theta & -\sin^2\theta \\ -\cos^2\theta & -\cos\theta \sin\theta & \cos^2\theta & \cos\theta \sin\theta \\ -\sin\theta \cos\theta & -\sin^2\theta & \sin\theta \cos\theta & \sin^2\theta \end{bmatrix}$$

on peut retrouver la matrice de rigidité $[K_G]$ d'un élément de poutre dans le système global.

Il suffit de retrouver la matrice de transformation $[R]$ pour ce cas qui s'écrit :

$$[R] = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

on remarquera que c'est la matrice bien connue de ROTATION

Il est à noter que cette dernière aurait pu être utilisée dans le cas du treillis en annulant le terme correspondant au degré de liberté rotation c.a.d.

$$[R] = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

La transformation $R^T[K]R$ aurait conduit à la même matrice de rigidité $[K_G]$ pour l'élément barre de treillis.

On remarquera la propriété bien connue d'une matrice de rotation

$$[R^{-1}] = [R^T]$$

4. TECHNIQUES D'ASSEMBLAGE

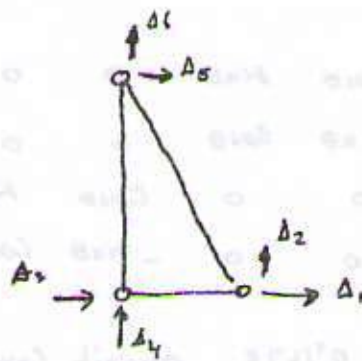
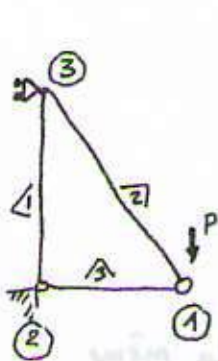
La technique d'assemblage sera décrite en se référant à un élément de treillis, mais elle pourra être étendue facilement à d'autres types d'éléments. Les Concepts à retenir :

- a) Il y a deux systèmes de NUMÉROTATION ; l'un pour la structure en totalité et l'autre pour l'élément en cours d'étude ou de traitement.
- b) La relation entre les deux NUMÉROTATIONS détermine la position des coefficients de rigidité de la matrice élémentaire $[k]$; dans la matrice de rigidité totale de la structure $[K_T]$

Lorsque les coefficients de rigidité de chaque élément de la structure sont numériquement connus dans le système d'axes global, L'ASSEMBLAGE consiste à les combiner algébriquement entre eux conformément aux CONDITIONS D'EQUILIBRE et de COMPATIBILITÉ aux nœuds.

Cela fournit un système global d'équations forces-déplacements rapportés aux nœuds de tous les éléments ainsi assemblés.

Afin d'illustrer le processus considérons la formation des équations forces-déplacement relatives à la structure suivante.



Degrés de liberté de la structure considérée Libre

A l'étape actuelle tous les degrés de liberté ont été retenus ; les conditions de Liaison de la structure à la Liaison n'ont pas encore été appliquées.

On obtient ainsi les matrices de rigidité de chaque élément :

Element ①

$$i=2 \quad \theta=90^\circ$$

$$j=3$$

$$[k_1] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_1 & 0 & -k_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -k_1 & 0 & k_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta_3 \\ \Delta_4 \\ \Delta_5 \\ \Delta_6 \end{bmatrix}$$

Element ②

$$i=3$$

$$j=1$$

$$\theta=315^\circ$$

$$\cos\theta = 1/\sqrt{2}$$

$$\sin\theta = -1/\sqrt{2}$$

$$[k_2] = \begin{bmatrix} \frac{k_2}{2} & -\frac{k_2}{2} & -\frac{k_2}{2} & \frac{k_2}{2} \\ -\frac{k_2}{2} & \frac{k_2}{2} & \frac{k_2}{2} & -\frac{k_2}{2} \\ -\frac{k_2}{2} & \frac{k_2}{2} & \frac{k_2}{2} & -\frac{k_2}{2} \\ \frac{k_2}{2} & -\frac{k_2}{2} & -\frac{k_2}{2} & \frac{k_2}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta_5 \\ \Delta_6 \\ \Delta_1 \\ \Delta_2 \end{bmatrix}$$

Element ③

$$i=1$$

$$j=2$$

$$\theta=180^\circ$$

$$\cos\theta = -1$$

$$\sin\theta = 0$$

$$[k_3] = \begin{bmatrix} k_3 & 0 & -k_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -k_3 & 0 & k_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \Delta_3 \\ \Delta_4 \end{bmatrix}$$

formellement pour obtenir la matrice de rigidité de la structure ; il suffit d'additionner les matrices de rigidité élémentaires

$$[K] = \sum [k_i]$$

Pour le faire ; il y a lieu :

1°// REARRANGER les coefficients de rigidité des matrices élémentaires selon l'arrangement des degrés de liberté de la structure $[\Delta_1 \Delta_2 \Delta_3 \Delta_4 \Delta_5 \Delta_6]^T$

2°// EXPANDER les matrices élémentaires à la dimension de la matrice de rigidité totale de la structure $[6 \times 6]$

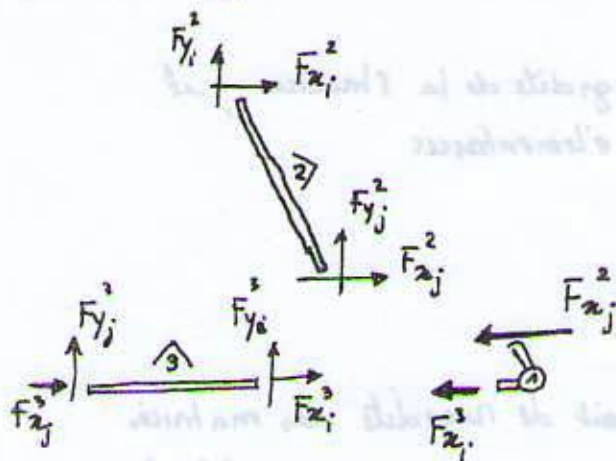
Nous aurons ainsi :

$$[K] = \begin{bmatrix} \left(\frac{k_2}{2} + k_3\right) & -\frac{k_2}{2} & -k_3 & 0 & -\frac{k_2}{2} & \frac{k_2}{2} \\ -\frac{k_2}{2} & \frac{k_2}{2} & 0 & 0 & \frac{k_2}{2} & -\frac{k_2}{2} \\ -k_3 & 0 & k_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_1 & 0 & -k_1 \\ -\frac{k_2}{2} & \frac{k_2}{2} & 0 & 0 & \frac{k_2}{2} & -\frac{k_2}{2} \\ \frac{k_2}{2} & -\frac{k_2}{2} & 0 & -k_1 & -\frac{k_2}{2} & \left(k_1 + \frac{k_2}{2}\right) \end{bmatrix} \begin{matrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \Delta_3 \\ \Delta_4 \\ \Delta_5 \\ \Delta_6 \end{matrix}$$

Montrons qu'en fait ; Chaque "Ligne" ou chaque "Colonne" de la matrice de rigidité globale de la structure représente une équation d'équilibre correspondant au degré de liberté en cours de traitement

Ainsi par exemple la 1^{ère} ligne (ou la 1^{ère} colonne correspondant au degré de liberté Δ_1) représenterait l'équilibre en X du nœud (1) tandis que la quatrième ligne (correspondant au degré de liberté Δ_4) représenterait l'équation d'équilibre en Y du nœud (2)

Pour cela examinons le schéma rendu libre du nœud (1)



* l'équation d'équilibre du nœud (1) en X ; s'écrit :

$$F_{xj}^2 + F_{xi}^3 = 0$$

or d'après la matrice de rigidité élémentaire de barres (2) et (3), on peut écrire :

$$F_{xj}^2 = -\frac{k_2}{2} \cdot \Delta_5 + \frac{k_2}{2} \Delta_6 + \frac{k_2}{2} \Delta_1 - \frac{k_2}{2} \Delta_2$$

$$F_{xi}^3 = k_3 \Delta_1 + 0 \cdot \Delta_2 - k_3 \Delta_3 + 0 \cdot \Delta_4$$

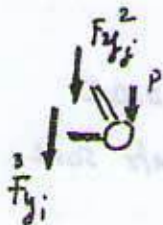
Ces relations rearrangées s'écrivent :

$$F_{2j}^2 = \begin{bmatrix} \frac{h_2}{2} & -\frac{h_2}{2} & 0 & 0 & -\frac{h_2}{2} & \frac{h_2}{2} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \Delta_3 \\ \Delta_4 \\ \Delta_5 \\ \Delta_6 \end{bmatrix}$$

$$F_{2j}^3 = \begin{bmatrix} h_3 & 0 & -h_3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \Delta_3 \\ \Delta_4 \\ \Delta_5 \\ \Delta_6 \end{bmatrix}$$

Leur sommation conduit bien à la 1^{ère} ligne.
ou la 1^{ère} colonne de $[K]$

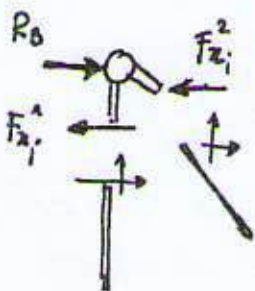
- On remarquera que dans les équations traitées ; ne font pas intervenir de forces extérieures ; par contre si nous avions traité l'équilibre du nœud (1) ou (4) ; la charge (P) interviendrait dans l'équation et on écrirait



$$F_{yi}^3 + F_{yi}^2 + P = 0$$

Donc au niveau de la 2^{ème} équation ; il y a lieu de tenir compte de la charge appliquée au nœud.

- De la même manière ; si nous avions traité la 5^{ème} ligne ; équation d'équilibre en x du nœud (3) correspondant au D.O.L (Δ_5) ; la réaction de l'appui interviendrait évidemment dans l'équation



$$F_{xi}^2 + F_{xi}^1 - R_B = 0$$

Donc d'une manière générale on peut écrire le système d'équations représentant l'équilibre des nœuds

$$[K][\Delta] + [F'] = 0$$

$[K]$: est la matrice de rigidité ASSEMBLÉE de la structure

$[\Delta]$: est le vecteur de tous les degrés de liberté de la structure

$[F']$: vecteur force représentant les efforts appliqués aux noeuds y compris les réactions d'appui.

LIAISONS OU CONDITIONS LIMITES

- Le système $[K][\Delta] + [F'] = 0$ tel que écrit jusqu'à présent est singulier ; car tous les degrés de liberté de la structure ont été retenus
- Il y a lieu maintenant de tenir compte des LIAISONS de la structure avec l'extérieur et de ne retenir que les degrés de liberté Actifs

Dans le cas en cours d'étude par exemple ; seuls les D.D.L (Δ_1, Δ_2 et Δ_6) sont actifs ; tous les autres déplacements sont nuls : $\Delta_3 = \Delta_4 = \Delta_5 = 0$

on remarquera qu'à ces degrés de liberté "RESTRAINTS", correspondent les réactions d'appui R_A^x, R_A^y et R_B

$$\begin{bmatrix} K \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \Delta_3=0 \\ \Delta_4=0 \\ \Delta_5=0 \\ \Delta_6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ P \\ R_A^x \\ R_A^y \\ R_B \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

On remarquera que l'on peut réarranger le système :

$$[K] \times \left\{ \begin{array}{l} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \Delta_6 \\ \dots \\ \Delta_3 \\ \Delta_4 \\ \Delta_5 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{D.D.L} \\ \text{Actifs} \\ \\ \text{LIAISONS} \end{array} + \begin{bmatrix} 0 \\ P \\ 0 \\ \dots \\ R_A^x \\ R_A^y \\ R_B \end{bmatrix} = 0$$

formellement d'une manière générale on peut écrire:

$$\begin{bmatrix} K_{aa} & K_{ar} \\ K_{ra} & K_{rr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta_a \\ \Delta_r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_a \\ R \end{bmatrix} = 0$$

La matrice de rigidité $[K]$ a été partitionnée

$[\Delta_a]$; représentera le vecteur des degrés de liberté actifs.

$[\Delta_r] = [0]$: représentera les degrés de libertés "retenus" ou Restraints

$[P_a]$: le vecteur force ou charges appliquées

$[R]$: le vecteur reactions d'appui.

Si $[\Delta_r] = 0$ Alors $[K_{aa}][\Delta_a] + [P_a] = 0$

On obtient donc les déplacements : $[\Delta_a] = -[K_{aa}]^{-1} [P_a]$

De même on peut obtenir les reactions en écrivant:

$$[K_{ra}][\Delta_a] + [R] = 0 \quad [R] = -[K_{ra}][\Delta_a]$$

Ayant déterminé les déplacements $[\Delta_a]$; on peut maintenant revenir au niveau de chaque matrice de rigidité élémentaire pour déterminer les effets

- Dans le système global:

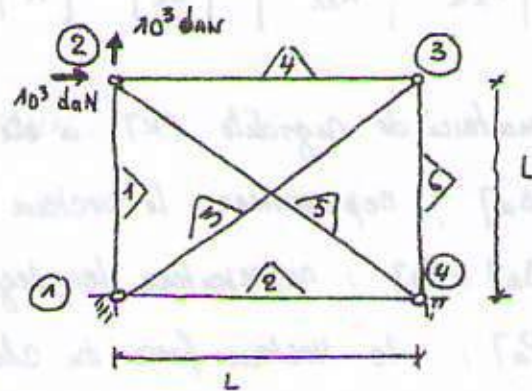
$$[F] = [K][\Delta]$$

- Dans le système local lié à l'élément.

$$[f] = [h][F] = [h][K][\Delta]$$

EXEMPLE : STRUCTURE EN TREILLIS (D'APRÈS - J. ROBINSON - ANALYSE MATRICIELLE DES STRUCTURES A L'USAGE DES INGÉNIEURS - pp. 302 - 307)

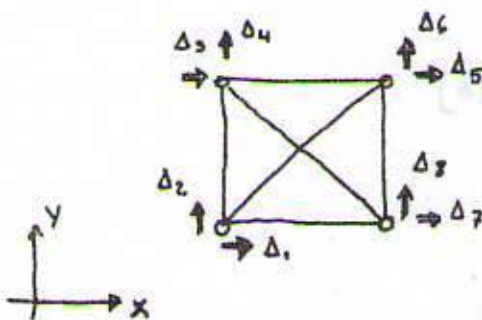
Il s'agit de retrouver les déplacements des nœuds et les efforts dans les éléments pour le treillis ci-contre ?



- Les caractéristiques des barres et leur connexion sont données par le tableau :

Element	NOEUD (I)	NOEUD (J)	AIRE	Longueur
1	1	2	S_2	L
2	1	4	"	L
3	1	3	"	$L\sqrt{2}$
4	2	3	"	L
5	2	4	"	$L\sqrt{2}$
6	3	4	"	L

- La structure considérée libre possède 8 degrés de liberté : 2x4 ils sont notés $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_8$ et sont représentés par la figure :

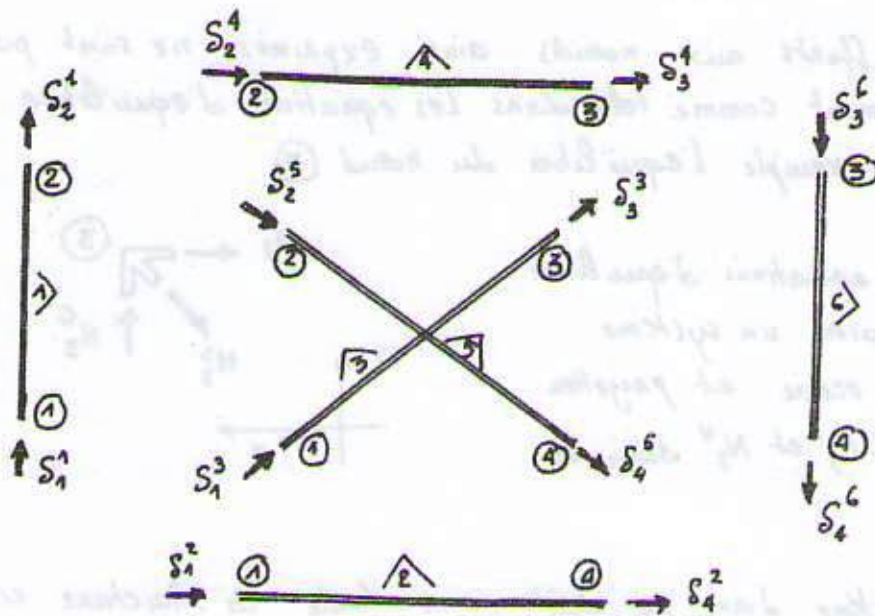


Le vecteur déplacement est donc donné par :

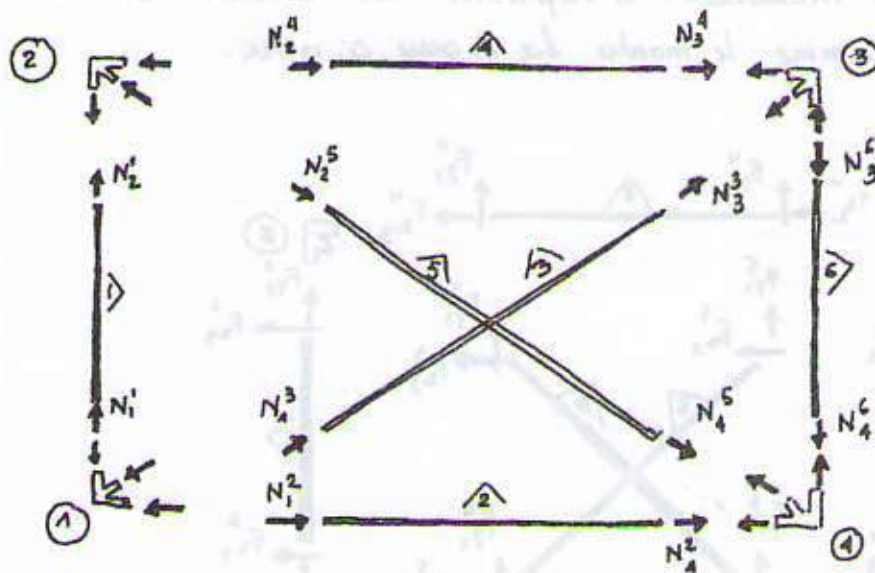
$$[\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_7, \Delta_8]^T$$

on remarquera que ces déplacements ou D.O.L. sont repérés dans le système de coordonnées GLOBALE ; liée à la structure.

- Par contre chaque élément pris séparément possède deux degrés de liberté dans un système d'axe de coordonnées lié à l'élément
- on notera ces déplacements par la figure suivante :



Les efforts dans les barres dans le système d'axe Local



Chaque matrice de rigidité élémentaire $[k]$ va lier les efforts et les déplacements ainsi définis.

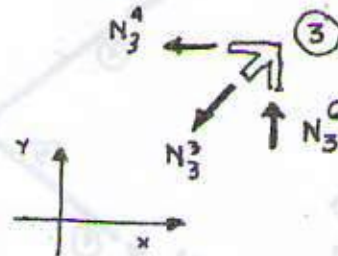
Par exemple on peut écrire pour les barres 1 et 3

$$\begin{bmatrix} N_1^1 \\ N_2^1 \end{bmatrix} = \frac{E\Omega}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \delta_1^1 \\ \delta_2^1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} N_1^3 \\ N_3^3 \end{bmatrix} = \frac{E\Omega}{LV_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \delta_1^3 \\ \delta_3^3 \end{bmatrix}$$

Cependant Les efforts aux noeuds ainsi exprimés ne sont pas utilisables directement comme tels dans les équations d'équilibre.

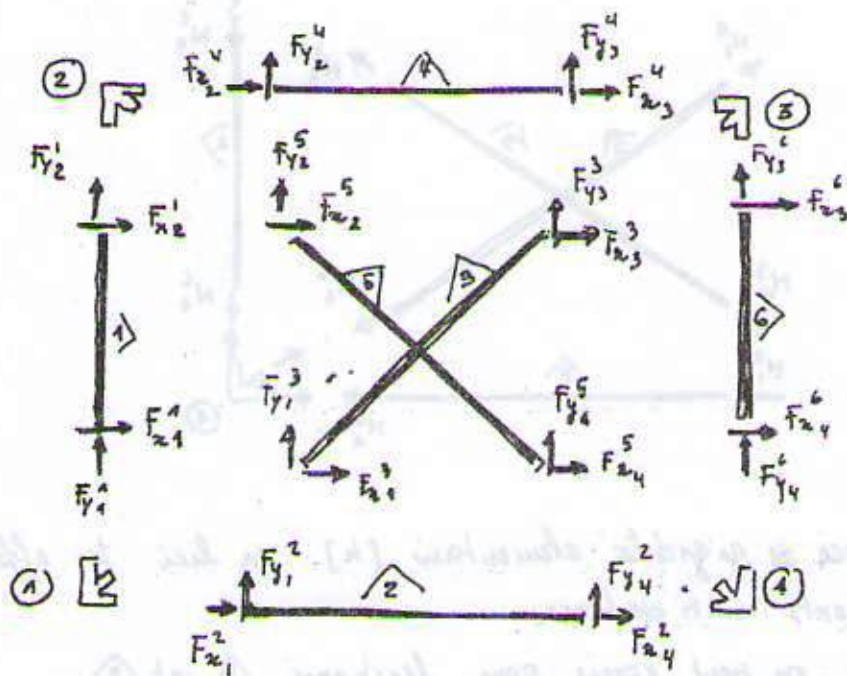
Examinons par exemple l'équilibre du noeud ③

Pour écrire les équations d'équilibre nous devons choisir un système d'axe pour les écrire et projeter les efforts N_3^1 , N_3^2 et N_3^4 dans ce système.



Le choix du système d'axe se fait pour toute la structure et l'on parle ainsi du système d'axe GLOBAL, qui a servi à repérer la structure, et il servira à écrire les équations d'équilibre.

Aussi, il est plus intéressant d'exprimer les "EFFORTS" dans ce système global, comme le montre la figure ci-après.



La matrice de rigidité de l'élément barre s'écrit dans un système d'axes GLOBAL :

$$[K] = \frac{ES}{L} \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \cos\theta \sin\theta & -\cos^2\theta & -\cos\theta \sin\theta \\ \sin\theta \cos\theta & \sin^2\theta & -\sin\theta \cos\theta & -\sin^2\theta \\ -\cos^2\theta & -\cos\theta \sin\theta & \cos^2\theta & \cos\theta \sin\theta \\ -\sin\theta \cos\theta & -\sin^2\theta & \sin\theta \cos\theta & \sin^2\theta \end{bmatrix}$$

* LA MATRICE DE RIGIDITÉ DE L'ÉLÉMENT $\triangle 1$: ($\theta = 90^\circ$; $\cos\theta = 0$; $\sin\theta = 1$)

$$\begin{bmatrix} F_{x1}^1 \\ F_{y1}^1 \\ F_{x2}^1 \\ F_{y2}^1 \end{bmatrix} = \frac{ES}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \Delta_3 \\ \Delta_4 \end{bmatrix}$$

on peut écrire de la même manière les matrices de rigidité de tous les éléments du treillis :

Élément $\triangle 2$

$$\begin{bmatrix} F_{x1}^2 \\ F_{y1}^2 \\ F_{x4}^2 \\ F_{y4}^2 \end{bmatrix} = \frac{ES}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \Delta_3 \\ \Delta_4 \end{bmatrix}$$

Élément $\triangle 3$

$$\begin{bmatrix} F_{x1}^3 \\ F_{y1}^3 \\ F_{x3}^3 \\ F_{y3}^3 \end{bmatrix} = \frac{ES}{2\sqrt{2}L} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \Delta_3 \\ \Delta_4 \end{bmatrix}$$

Element ④

$$\begin{bmatrix} F_{x2}^4 \\ F_{y2}^4 \\ F_{x3}^4 \\ F_{y3}^4 \end{bmatrix} = \frac{ES}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta_3 \\ \Delta_4 \\ \Delta_5 \\ \Delta_6 \end{bmatrix}$$

Element ⑤

$$\begin{bmatrix} F_{x2}^5 \\ F_{y2}^5 \\ F_{x4}^5 \\ F_{y4}^5 \end{bmatrix} = \frac{ES}{2\sqrt{2}L} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta_3 \\ \Delta_4 \\ \Delta_5 \\ \Delta_6 \end{bmatrix}$$

Element ⑥

$$\begin{bmatrix} F_{x3}^6 \\ F_{y3}^6 \\ F_{x4}^6 \\ F_{y4}^6 \end{bmatrix} = \frac{ES}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta_5 \\ \Delta_6 \\ \Delta_7 \\ \Delta_8 \end{bmatrix}$$

EQUATIONS D'EQUILIBRE : ASSEMBLAGE

Pour faire la démonstration de la méthode d'assemblage de la matrice de rigidité d'une structure considérée comme libre, nous considérerons successivement l'équilibre des nœuds 1, 2, 3 et 4.

nœud ① Equilibre en (x) : $F_{x1}^1 + F_{x1}^2 + F_{x1}^3 = 0$

$$F_{x1}^1 = \frac{ES}{L} [0 \ 0 \ 0 \ 0] \times [\Delta_1 \ \Delta_2 \ \Delta_3 \ \Delta_4]^T$$

$$F_{x1}^2 = \frac{ES}{L} [1 \ 0 \ -1 \ 0] \times [\Delta_1 \ \Delta_2 \ \Delta_7 \ \Delta_8]^T = \frac{ES}{L} \Delta_1 - \frac{ES}{L} \Delta_7$$

$$F_{x1}^3 = \frac{ES}{2\sqrt{2}L} [1 \ 1 \ -1 \ -1] \times [\Delta_1 \ \Delta_2 \ \Delta_5 \ \Delta_6]^T =$$

si nous développons les équations pour faire intervenir tous les degrés de liberté de la structure, on pourra écrire l'équation :

$$\frac{ES}{L} \left[1 + \frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}}, 0, 0, -\frac{1}{2\sqrt{2}}, -\frac{1}{2\sqrt{2}}, -1, 0 \right] \times [\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_8]^T = 0$$

De la même manière on peut écrire l'équilibre du nœud ① selon (y)

Soit : $F_{y,1}^1 + F_{y,1}^2 + F_{y,1}^3 = 0$

Ce qui conduirait à :

$$\frac{ES}{L} \left[\frac{1}{2\sqrt{2}}, 1 + \frac{1}{2\sqrt{2}}, 0, -1, -\frac{1}{2\sqrt{2}}, -\frac{1}{2\sqrt{2}}, 0, 0 \right] \times [\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \dots, \Delta_8]^T = 0$$

Ces deux équations nous donnent respectivement la 1^{ère} et la 2^{ème} Ligne de la matrice de rigidité de la structure considérée comme libre.

on pourra reprendre de la même manière pour les autres équations d'équilibre de chaque nœud.

CÉPENDANT ; on remarquera qu'au niveau du nœud ② ; DÉS EFFORTS EXTÉRIEURS sont appliqués au nœud ; il ne faudrait pas les oublier dans les équations d'équilibre.

Ainsi l'équilibre selon (x) du nœud ② s'écrit :

$$F_{x,2}^1 + F_{x,2}^4 + F_{x,2}^5 + 1000 = 0$$

et en (y) $F_{y,2}^1 + F_{y,2}^4 + F_{y,2}^5 + 1000 = 0$

on peut résumer l'ensemble des équations d'équilibre sous la forme ;

$$F_{x,1}^1 + F_{x,1}^2 + F_{x,1}^3 + 0 = 0 \quad (1)$$

$$F_{y,1}^1 + F_{y,1}^2 + F_{y,1}^3 + 0 = 0 \quad (2)$$

$$F_{x,2}^1 + F_{x,2}^4 + F_{x,2}^5 + 100 = 0 \quad \vdots$$

$$F_{y,2}^1 + F_{y,2}^4 + F_{y,2}^5 + 100 = 0 \quad \vdots$$

$$F_{x,3}^3 + F_{x,3}^4 + F_{x,3}^6 + 0 = 0 \quad \vdots$$

$$\begin{aligned} F_{y_3}^3 + F_{y_3}^4 + F_{y_3}^6 + 0 &= 0 \\ F_{x_4}^2 + F_{x_4}^5 + F_{x_4}^6 + 0 &= 0 \\ F_{y_4}^2 + F_{y_4}^5 + F_{y_4}^6 + 0 &= 0 \quad (8) \end{aligned}$$

Ces huit (8) equations s'ecrivent sous forme matricielle :

$$\frac{ES}{2V_2L} \begin{bmatrix} 3.83 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & -2.83 & 0 \\ 1 & 3.83 & 0 & -2.83 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3.83 & -1 & -2.83 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2.83 & -1 & 3.83 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -2.83 & 0 & 3.83 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 3.83 & 0 & -2.83 \\ -2.83 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 3.83 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -2.83 & -1 & 2.83 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \Delta_3 \\ \Delta_4 \\ \Delta_5 \\ \Delta_6 \\ \Delta_7 \\ \Delta_8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1000 \\ 1000 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

Soit :

$$[K] \cdot [\Delta] + [F'] = 0$$

$[K]$: matrice de rigidite de la structure considerie comme libre.

$[\Delta]$: Vecteur : "Deplacements"

$[F']$: Vecteur "Forces appliquees aux noeuds"

$[K]$ est la matrice de Rigidite Assemblee de la structure. Elle represente la somme des matrices de rigidite de chaque element. On vient donc d'adopter une procedure d'ASSEMBLAGE de la matrice de rigidite globale de la structure a partir des matrices de rigidite de chaque element. D'une maniere formelle on peut ecrire :

$$[K] = \sum_i [k_i]$$

Cette sommation représente l'écriture des équations d'équilibre de tous les nœuds de la structure dans un système cohérent qui est le système d'axes GLOBAL.

On peut l'effectuer d'une manière systématique ; il suffit d'EXPANDER chaque matrice de rigidité élémentaire écrite dans le système d'axe GLOBAL. Ce qui donne par exemple pour les matrices $[k_3]$ et $[k_5]$

Element $\triangle 3$

$$[k_3] = \frac{E\Omega}{2\sqrt{2}L} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Element $\triangle 5$

$$[k_5] = \frac{E\Omega}{2\sqrt{2}L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

CALCUL DES DEPLACEMENTS

Afin d'obtenir une matrice de rigidité de la structure qui ne soit pas singulière, il faut imposer les liaisons à cette structure. Dans cet exemple :

$$\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_7 = \Delta_8 = 0$$

Ce qui s'écrit :

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \Delta_1=0 \\ \Delta_2=0 \\ \Delta \\ \Delta_3=0 \\ \Delta_4=0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p'_1 \\ p'_2 \\ p'_3 \end{bmatrix} = 0$$

En développant :

$$\begin{aligned} a \times 0 + b \cdot \Delta + c \times 0 &= p'_1 \\ d \times 0 + e \cdot \Delta + f \times 0 &= p'_2 \\ g \times 0 + h \cdot \Delta + k \times 0 &= p'_3 \end{aligned}$$

La deuxième equation s'écrit :

$$\frac{ES}{2\sqrt{2}L} \begin{bmatrix} 3.83 & -1 & -2.83 & 0 \\ -1 & 3.83 & 0 & 0 \\ -2.83 & 0 & 3.83 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3.83 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \Delta_3 \\ \Delta_4 \\ \Delta_5 \\ \Delta_6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1000 \\ 1000 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

La résolution donne les déplacements $\Delta_3, \Delta_4, \Delta_5, \Delta_6$ soit :

$$\begin{bmatrix} \Delta_3 \\ \Delta_4 \\ \Delta_5 \\ \Delta_6 \end{bmatrix} = \frac{L}{ES} \times 1000 \begin{bmatrix} 2.6945 \\ 1.4426 \\ 2.1359 \\ -0.5585 \end{bmatrix}$$

Connaissant les déplacements on peut déterminer les Efforts dans le système global grâce aux matrices de rigidité de chaque élément

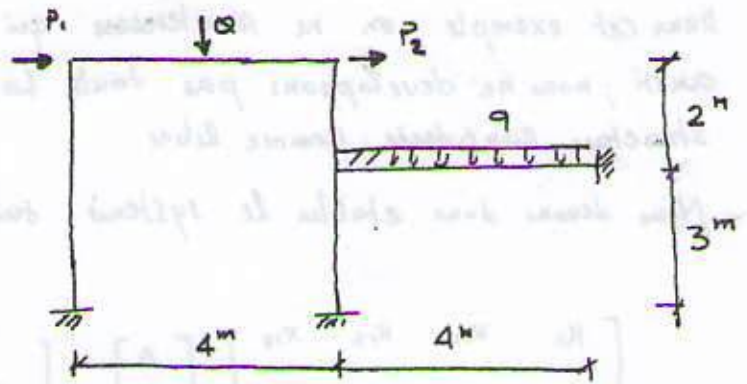
Par exemple pour l'élément A

$$\begin{bmatrix} F_{x_2}^4 \\ F_{y_2}^4 \\ F_{x_3}^4 \\ F_{y_3}^4 \end{bmatrix} = \frac{ES}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2.6945 \\ 1.4426 \\ 2.1359 \\ -0.5585 \end{bmatrix} \frac{L \times 10^3}{ES} = \begin{bmatrix} 557.5 \\ 0 \\ -557.5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

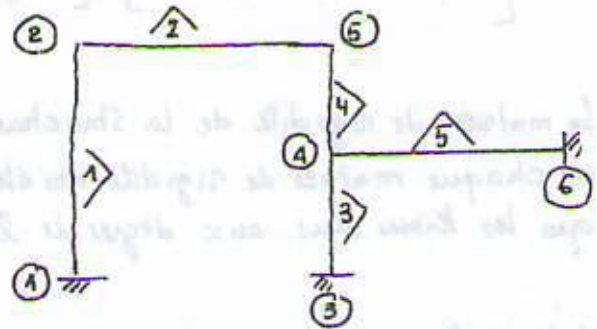
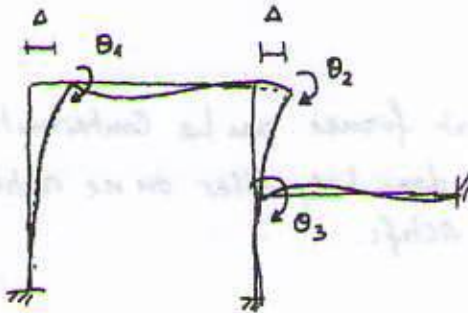
EXEMPLE 2

- PORTIQUE

Soit à déterminer le système d'équations gouvernant le comportement de la structure ci-contre.



* Détermination des degrés de liberté et topologie de la structure.



Le système comporte 4 degrés de liberté $\Delta, \theta_1, \theta_2, \theta_3$; nous allons établir directement la matrice de rigidité de la structure

La matrice de rigidité d'un élément de poutre dans son repère local est donnée (En négligeant les déformations axiales)

$$\begin{bmatrix} T_i \\ M_i \\ T_j \\ M_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & +\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{12EI}{L^3} & +\frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} & +\frac{6EI}{L^2} \\ -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & +\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_i \\ \theta_i \\ U_j \\ \theta_j \end{bmatrix}$$

Dans cet exemple on ne s'intéresse qu'aux degrés de liberté actifs aussi ; nous ne développons pas toute la matrice de rigidité de la structure considérée comme libre

Nous devons donc établir le système suivant :

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \Delta \\ \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F^* \end{bmatrix} = 0$$

La matrice de rigidité de la structure étant formée par la contribution de chaque matrice de rigidité des éléments dans lesquelles on ne retient que les termes dus aux degrés de liberté actifs.

ELEMENT ④



par Analogie à la poutre de notre repère local on peut déduire directement la matrice de rigidité $[K_4]$ dans le repère global

En effet si on considère que ① correspond à 1 et ② correspond à 2 ; la correspondance entre O.D.L s'établit comme suit

au nœud ① les déplacements sont empêchés donc U_1 et θ_1 sont nuls

tandis que Δ correspondrait à U_2
et θ_1 — " — à θ_2

Les termes correspondants de $[K]$ se déduisent

$$[K_4] = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \Delta : U_2 \\ \theta_1 : \theta_2 \end{matrix}$$

Element ②



Dans ce cas θ_1 correspondrait à θ_i
et θ_2 ————— à θ_j

Soit $[K_2] = \begin{bmatrix} \frac{4EI}{L} & \frac{2EI}{L} \\ \frac{2EI}{L} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \cdot \begin{matrix} \theta_1 : \theta_i \\ \theta_2 : \theta_j \end{matrix}$

Element ③



θ_3 correspondrait à θ_j soit

$$[K_3] = \left[\frac{4EI}{L} \right] \cdot \theta_3$$

Element ④



θ_2 correspondrait à θ_j
 Δ ————— à U_j
 θ_3 ————— à θ_i

$$[K_4] = \begin{bmatrix} \frac{4EI}{L} & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ \frac{2EI}{L} & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \begin{matrix} \theta_3 \\ \Delta \\ \theta_2 \end{matrix}$$

Element ⑤



$$[K_5] = \left[\frac{4EI}{L} \right] \cdot \theta_3$$

Les rigidités des barres sont données par:

	①	②	③	④	⑤
$12EI/L^3$	0,096	0,1	0,44	1,5	0,1875
$6EI/L^2$	0,24	0,375	0,67	1,5	0,375
$4EI/L$	0,8	1,0	1,33	2,0	1,0
$2EI/L$	0,4	0,5	0,67	1,0	0,5

$$[K_1] = \begin{bmatrix} 0,096 & 0,24 \\ 0,24 & 0,8 \end{bmatrix} \begin{matrix} \Delta \\ \theta_1 \end{matrix}$$

$$[K_2] = \begin{bmatrix} 1 & 0,5 \\ 0,5 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{matrix}$$

$$[K_3] = [1,33] \cdot \theta_3$$

$$[K_4] = \begin{bmatrix} 2,0 & 1,5 & 1,0 \\ 1,5 & 1,5 & 1,5 \\ 1,0 & 1,5 & 2,0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \theta_3 \\ \Delta \\ \theta_2 \end{matrix}$$

$$[K_5] = [1,0] \cdot \theta_3$$

La matrice de rigidité assemblée

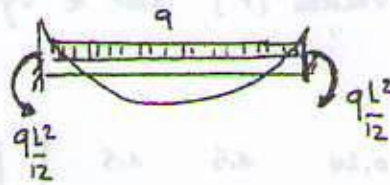
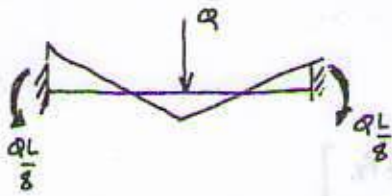
Δ	θ_1	θ_2	θ_3
0,096 (1) 1,5 (4)	0,24 (1) x	1,5 (4)	1,5 (4)
0,24 (1)	0,8 (1) 1 (2)	0,5 (2)	
1,5 (4)	0,5 (2)	2 (2) 2,0 (4)	1,0 (4)
1,5 (4)		1,0 (4)	1,33 (3) 1,00 (5) 2,00 (4)

Soit

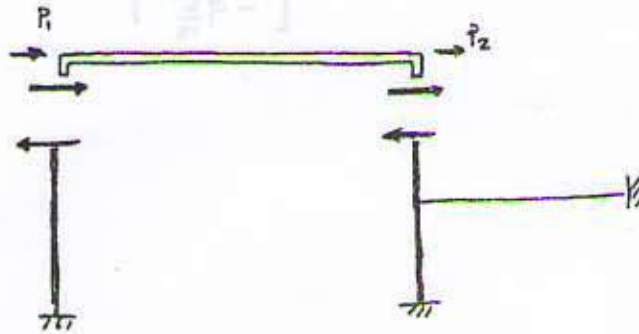
$$\begin{bmatrix} 1,596 & 0,24 & 1,5 & 1,5 \\ 0,24 & 1,8 & 0,5 & 0 \\ 1,5 & 0,5 & 3 & 1 \\ 1,5 & 0 & 1 & 4,33 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta \\ \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F' \end{bmatrix} = 0$$

Comme on l'a vu dans l'exemple précédent $[F']$ correspond aux charges appliquées ; il s'agit de la participation de ces charges dans les équations d'équilibre correspondant aux degrés de liberté actifs. Ainsi pour " Δ " correspondrait une équation d'équilibre en translation de l'étage correspondant et pour les rotations $\theta_1, \theta_2, \theta_3$; des équations d'équilibre en Moment des nœuds correspondants.

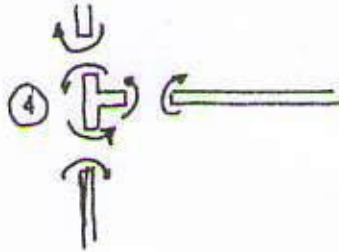
Les Moments d'encastrement parfaits des poutres chargées Δ et ∇



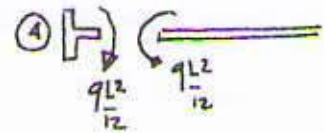
La Coupure au niveau de l'étape. (Equation correspondant à Δ)



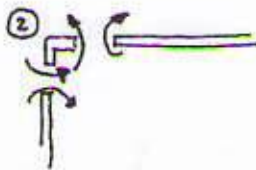
noeud ④ (Equation correspondant à θ_3)



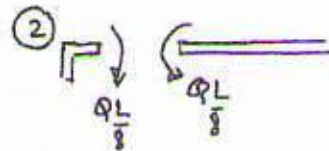
Moment d'encastrement



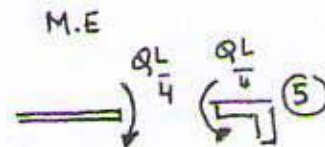
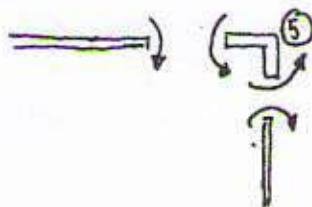
noeud ② (Equation correspondant à θ_1)



M^t d'encastrement



noeud ⑤



Les schémas rendus libre de la page précédente permettent de déduire le vecteur $[F']$ soit le système:

$$\begin{bmatrix} 1,596 & 0,24 & 1,5 & 1,5 \\ 0,24 & 1,8 & 0,5 & 0 \\ 1,5 & 0,5 & 3 & 1 \\ 1,5 & 0 & 1 & 4,33 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_1 + P_2 \\ -q\frac{L}{4} \\ +q\frac{L}{4} \\ -q\frac{L^2}{12} \end{bmatrix} = 0$$

